MATHEMATISCHE UNTERHALTUNGEN UND SPIELE

VON

DR. W. AHRENS
IN ROSTOCK

ZWEITE, VERMEHRTE UND VERBESSERTE AUFLAGE

ZWEITER BAND

MIT 128 FIGUREN IM TEXT

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1918

Vorwort.

Weit später, als ich selbst je beabsichtigt oder erwartet hätte, folgt der zweite Band des Buches dem ersten. Es war im grunde nur ein Kapitel, das diese lange Verzögerung verursacht hat, das immer von neuem dazu nötigte, die Ausarbeitung und Fertigstellung des zweiten Bandes noch weiter zurückzustellen. Die „magischen Quadrate" (Kap. XII) mit ihrer überaus umfangreichen Literatur, mit ihren mannigfachen Beziehungen zu anderen, außerhalb der Mathematik liegenden Fragen und Gebieten sind es, von denen ich hier spreche. Dieses Kapitel allein oder vornehmlich war es, für dessen Neugestaltung, wie sie mir als anstrebenswert vorschwebte, ich mich nach Erscheinen des ersten Bandes lange Zeit hindurch nicht genügend gerüstet fühlte. Allein, je weiter ich — mit großen Zwischenpausen — meine Studien und Vorarbeiten über diesen Gegenstand fortsetzte, je mehr ich dabei auch in die anderen hierbei in Betracht kommenden Gebiete eintrat, um so deutlicher zeigte sich die Unmöglichkeit, das Thema im Rahmen eines Kapitels dieses Bandes auch nur einigermaßen zu erschöpfen. Das nächste Stadium war nunmehr der Plan, das in erster Auflage einbändige Buch auf drei Bände auszudehnen, deren zweiter ausschließlich einer eingehenden Behandlung von Geschichte und Theorie der magischen Quadrate gewidmet sein sollte. Allein, auch dieser Plan wurde — aus äußeren Gründen — alsbald wieder aufgegeben, und so mußte ich mich letzten Endes doch entschließen, auf eine wesentliche Neugestaltung und vor allem auf eine nennenswerte Umfangserweiterung des Kapitels XII zu verzichten, und die eingehende Behandlung seines Gegenstandes einer

selbständig erscheinenden Monographie[1]) vorbehalten. Unbeschadet dieses Sonderplans ist aber auch hier auf besonderen Wunsch der Verlagshandlung das Kapitel der „magischen Quadrate“, das manche Leser vielleicht vermißt hätten, beibehalten, ungefähr in dem alten Umfange und demzufolge, wenn auch in neuer Bearbeitung, mit im wesentlichen dem alten Charakter. Da bei dieser Fassung des Programms ein Grund des Aufschubs nicht mehr bestand, konnte ich das Bandmanuskript vor nunmehr zwei Jahren (1916) abschließen. Daß bis zum Erscheinen des Bandes dann nochmals mehr als zwei Jahre vergehen würden, ahnte ich freilich damals nicht. So ist denn also für diesen zweiten Band in seinem Verhältnis zum ersten das „nonum prematur in annum“ buchstäblich wahr geworden. Freilich, daß diese lange Vorbereitungs- und Wartezeit dem Bande zum Vorteil gereicht habe, wage ich nicht zu hoffen; ich weiß vielmehr recht wohl, daß der beträchtliche zeitliche Abstand in der Ausarbeitung der verschiedenen Kapitel manche Ungleichmäßigkeiten in sekundären Dingen, wie insbesondere den Zitaten, zur Folge gehabt hat; auch in typographischer Beziehung sind solche Inkongruenzen — infolge einer längeren, völligen Stockung des Satzes, der aus besonderem Grunde mit den letzten Abschnitten, insbesondere dem „Literarischen Index“, begonnen hatte, — zu finden, ohne daß mir jedoch die nachträgliche Beseitigung solcher Unebenheiten geboten erschienen wäre. Auf der anderen Seite darf allerdings aus dem ungewöhnlich langen Aufschub auch ein wohl nicht ganz belangloser Gewinn verbucht werden: er fällt dem ersten Bande zu, der vermöge der umfangreichen „Nachträge und Berichtigungen zu Bd. I“, die Bd. II bringt (S. 315—360) und deren gar manche erst aus neuester Zeit stammen, schon jetzt — vor der Zeit — eine Verjüngung, sozusagen eine dritte Auflage, erlebt.

Gegenstände und Reihenfolge der einzelnen Kapitel sind dieselben, wie in der ersten Auflage, geblieben; nur sind zwei

1) Diese, im Manuskript zum größten Teil fertig, wird hoffentlich im kommenden Jahre, etwa im Umfange dieses Bandes, erscheinen können.

der damaligen Kapitel (XVI und XVII) jetzt zu einem (XVI) zusammengezogen, und andererseits ist ein neuer Abschnitt (Kap. XXIII) hinzugetreten, der aus kleinen „Nachträgen“ zu Kap. VI, § 4, die ursprünglich in Aussicht genommen waren, erwachsen ist und nach Einräumung eines eigenen Kapitels entsprechend weiter ausgestaltet wurde; eine organische Verbindung dieses Kapitels mit dem zugehörigen Abschnitt aus Bd. I kann freilich erst eine spätere Auflage anstreben. Neu bearbeitet sind gegenüber der ersten Auflage mehr oder weniger alle Kapitel, auch haben die meisten — abgesehen von einigen Streichungen kleinerer Partien, die niemand vermissen wird, — eine Erweiterung erfahren, einige, wie insbesondere XV und XIX, sogar eine recht beträchtliche. Auch für diesen Band, insbesondere auch für die „Nachträge zu Bd. I“, haben verschiedene Freunde des Buches größere oder kleinere Beiträge beigesteuert; ihnen allen, die natürlich an den betreffenden Stellen genannt sind, drängt es mich, auch hier meinen verbindlichsten Dank zu sagen. Ein weiterer Nachtrag zu Bd I, den Herr Dr. G. Pólya, Privatdozent am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich, kurzlich zur Verfügung stellte, konnte seinem ganzen Charakter nach nur für eine gesonderte Veröffentlichung, als Originalbeitrag, in Frage kommen und erscheint daher hier (S. 364—374) in dieser Form; dabei mochte ich nicht unterlassen, mit Dank gegen den Herrn Verfasser hervorzuheben, daß es mir eine besondere Ehre ist, diese so wertvolle und interessante Arbeit des ausgezeichneten Forschers hier zur Veröffentlichung bringen zu dürfen, ebenso wie es mich mit lebhafter Freude erfüllt, durch die schönen Ergebnisse dieser Untersuchung das Band zwischen der Unterhaltungsmathematik und wichtigen Bestandteilen der strengen Wissenschaft enger geknüpft zu sehen.

Den Beschluß des Bandes und damit des ganzen Werkes bilden ausführliche, beiden Bänden gemeinsame Namen- und Sachregister. Ihnen vorher geht, wie in der ersten Ausgabe, ein bereits erwähnter „Literarischer Index“, der die Aufgabe erfüllen soll, die gesamte Literatur der Unterhaltungsmathematik zu vereinigen. Daß dieses Gebiet einer scharfen Circumskription kaum

fähig ist und somit Meinungsverschiedenheiten über die Zugehörigkeit nicht weniger Schriften sehr wohl möglich sind, bedarf keiner Erwähnung. So sehr diese Literaturliste nun auch gegenüber der früheren Ausgabe sich gedehnt hat[1]), so sind doch andererseits auch wieder, zumal aus der älteren Zeit, eine Reihe von Eindringlingen, die, mit einer irreführenden Maske versehen oder in anderen Bibliographien mit einem falschen Signum aufgeführt, sich zu Unrecht in die erste Ausgabe eingeschlichen hatten, hier bei näherer Prüfung ausgeschlossen worden. Titel wie „Arithmetisch-geometrischer Lustgarten“, „Arithmetische Ergötzlichkeiten“, „Mathematisches Sinnen-Confect“, „Arithmetische Erquickstunden“ usw., besagen, so verheißungsvoll sie auch klingen, naturgemäß oft recht wenig in unserem Sinne, und tatsächlich bieten Bücher dieser und anderer ähnlicher, ehemals so beliebter Titel an Stoffen und Problemen der in unserem Buche behandelten Art oft schlechterdings nichts. Statt dessen findet man darin beispielsweise lediglich algebraische Textaufgaben und zwar von solcher Art, wie man sie heute ebenso gut oder vielmehr besser in jeder Schulaufgabensammlung antrifft, und höchstens mit dem Unterschiede, daß diese in jenen älteren Werken in möglichst romanhafter Einkleidung erscheinen. Da wird meinetwegen eine längliche Geschichte erzählt von einem Schiff, das am Gestade eines weltverlorenen Eilands einen seiner Matrosen, der sich irgendwie sträflich vergangen hatte, aussetzen und zurücklassen mußte, und es folgt nun eine förmliche Robinsonade, die uns schildert, wie der Zurückgelassene bei der Abfahrt der Gefährten von Verzweiflung gepackt wird, wie er dann auf Mittel sinnt, ein Boot herzustellen, wie er hierbei endlich auf den Gedanken verfällt, ein Grab aufzugraben, um den darin ruhenden Sarg zu einem Boot umzuarbeiten, und wie er auf diese Weise schließlich doch noch das Schiff seiner früheren Gefährten einzuholen vermag Der langen Rede kurzer Sinn, die ganze „mathematische Erquickung“,

1) Die erste Ausgabe, bis zum Jahre 1900 reichend, wies 330 Nummern auf, die jetzige bis zu dem gleichen Zeitpunkt rund 600

liegt dann darin, aus irgendwelchen, zum Schluß und ziemlich unvermittelt beigebrachten Daten die Entfernung von der Insel zu berechnen, in der dies Zusammentreffen stattfand. Oder es handelt sich um Bücher, wie jene in die erste Ausgabe meines „Index“ gleichfalls zu Unrecht aufgenommenen „Mysteria numerorum“, deren Inhalt der große Euler in einem Briefe durchaus zutreffend mit folgenden Worten gekennzeichnet hat: „In Petri Bungi Mysteriis numerorum“, so schreibt er an Goldbach[1]), „habe ich nicht das geringste Merkwürdige gefunden. Er durchgehet der Ordnung nach alle Zahlen von 1, 2, 3 bis tausend, und merkt von einer jeden an, wo solche in der Heil. Schrift und andern Auctoribus vorkommen; als bei 38 bringt er nichts anderes vor, als das Exempel des Kranken beim Teich zu Betesda, welcher 38 Jahre daselbst gelegen.“ — Obwohl ich in der langen Zwischenzeit zwischen den beiden Auflagen bei jeder sich bietenden Gelegenheit bestrebt gewesen bin, mich mit den mir damals noch nicht bekannten Schriften des „Index“ bekannt zu machen, nicht selten, wie schon gesagt, mit dem Erfolge, daß sich nun die Streichung des betreffenden Titels als notwendig oder angebracht ergab, so stehen doch auch in dem jetzigen Verzeichnis noch eine ganze Anzahl solcher Schriften, die mir durchaus unzugänglich und fremd geblieben sind, und unter ihnen wieder sind nicht ganz wenige, deren Legitimation, hier überhaupt zu erscheinen, mir keineswegs zweifelsfrei zu sein scheint; es sind dies die Nrn 16, 18, 21, 32, 64, 82, 86, 102, 103, 135, 139, 140, 145, 152, 164, 212, 221, 223, 277, 297, 317, 434 — Die Abkürzungen der verschiedenen Publikationsorgane werden auch dem Nichtfachmann im ganzen verständlich sein; höchstens wäre wohl zu bemerken, daß unter „Assoc. franç“ die Veröffentlichungen (Comptes rendus) der „Association française pour l'avancement des sciences“ und unter „Educ. Times Reprints“ die „Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times“ zu verstehen sind.

---

1) 9. Sept 1741; s „Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du 18ème siècle“, t. I, 1843, p. 106.

Schließlich möchte ich, um weiteren unnötigen Anfragen vorzubeugen, noch bemerken, daß der im Vorwort des ersten Bandes erwähnte „Mathematische Spielkasten“ seit längerem vergriffen ist und von der dort genannten Firma auch nicht wieder hergestellt wird, da diese überhaupt die Herstellung und den Vertrieb von Spielen aufgegeben und sich vor längerer Zeit wesentlich anderen geschäftlichen Aufgaben zugewandt hat. Manche hier in meinem Buche behandelte Spiele sind jedoch von den Züllchower Anstalten, Züllchow bei Stettin, erhältlich, worüber die in der Regel allweihnachtlich neu erscheinenden reichhaltigen Kataloge (Preisverzeichnisse) dieser Anstalten nähere Auskunft zu geben vermögen.

Rostock (zr Zt Arendsee i M.), den 22. Juni 1918.

W. Ahrens.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Kapitel XII. Magische Quadrate 1
§ 1. Einleitung Die einfachsten Formen magischer Quadrate 2
§ 2. Methode der Einer und n-er 7
§ 3. Andere Methoden für ungerade Zellenzahl. 18
I Die erste Methode des Moschopulos und die Methode der Inder. 20
II. Bachets Terrassenmethode . . . 27
III. Moschopulos' Springer-Methode 31
§ 4. Pandiagonale magische Quadrate 39
§ 5 Magische Quadiate von gerader Zellenzahl . . 47
Kapitel XIII Eulersche Quadrate 55
§ 1. Das Problem der 36 Offiziere . . 55
§ 2. Diagonale Eulersche Quadrate . 64
Kapitel XIV. Anordnungsprobleme . . 69
Abschnitt I. Verschiedene Anordnungen . 69
§ 1. Anordnungen im Kreise 69
§ 2. Promenaden zu je zwei und Paarung der Teilnehmer von Schachturnieren 79
§ 3 Promenaden von n^2 Personen zu je n 94
Abschnitt II Kirkmans Schulmadchen-Problem . . 97
§ 1. Einleitung. Verwandte Probleme 97
§ 2 Lösungen des Kirkmanschen Problems . . . 102
§ 3 Sylvesters Forderung 110
§ 4. Erweiterungen und Verallgemeinerungen 114
Kapitel XV. Das Josephsspiel 118
§ 1. Geschichte und Literatur des Spiels 118
§ 2. Empirische Lösungen und Merkverse . . . 147
§ 3. Das mathematische Problem und seine Umkehrung . 154
§ 4. Oberreihen 156
§ 5 Die Buschesche Lösung des mathematischen Problems . 161
§ 6 Das Verfahren Schuberts. — Die Untersuchungen Eulers und Taits 165
Kapitel XVI Brücken und Labyrinthe 170
§ 1 Liniensysteme 171
§ 2 Bäume . . 173
§ 3. Polyeder . . . 176
§ 4. Geschlossene Kreise . . 180
§ 5. Das Eulersche Brückenproblem . . . 183
§ 6 Labyrinthe 189
§ 7. Durchwanderung aller Wege eines Labyrinths . 192

Seite

Kapitel XVII. Das Hamiltonsche Dodekaederspiel 196
§ 1. Geschichte und Wesen des Spiels 196
§ 2. Wanderungen ohne Vorschriften über Reihenfolge der Stationen. 198
§ 3. Wanderungen bei vorgeschriebenen Anfangsstationen. . 202
§ 4 Weitere Aufgaben Hamiltons 206
§ 5. Das Ikosaederspiel. Die übrigen regulären Polyeder . . 208
Kapitel XVIII. Das Farben-Karten-Problem 211
§ 1 Wesen und Geschichte des Problems 211
§ 2 Nachbargebiete auf einfach zusammenhängenden Flächen 213
§ 3. Nachbargebiete auf der Ringfläche 216
§ 4. Eine Verallgemeinerung des Kartenproblems 219
§ 5. Ein Satz von Tait 220
§ 6 Das Problem im dreidimensionalen Raume 224
Kapitel XIX. Das Boss Puzzle oder Fünfzehner-Spiel. . . 226
§ 1. Geschichte, Literatur und Beschreibung des Spiels . 226
§ 2. Das elementare Puzzle. Schlußstellungen des gewöhnlichen Puzzle 232
§ 3. Die mathematische Theorie des Spiels 234
§ 4. Abarten und Verallgemeinerungen 248
§ 5. Das Puzzle mit Schranken 254
§ 6. Das gegliederte Puzzle. 259
Kapitel XX. Das Dominospiel 261
§ 1 Einleitung. Das Spiel mit 28 Steinen 261
§ 2 Zusammenhängende Dominoketten 264
§ 3. Ketten von 6 und von 15 Steinen 266
§ 4 Methode von G. Tarry 268
§ 5. Ketten von 28 Steinen. 272
Kapitel XXI Zeit und Kalender 277
§ 1. Gemeine und Schaltjahre . . . 277
§ 2. Immerwährender Kalender 278
§ 3 Berechnung des Osterdatums. . 285
§ 4 Früheste und späteste Ostertermine 288
Kapitel XXII Geometrische Konstruktionen durch Falten von Papier 291
Kapitel XXIII. Seltsame Verwandtschaften . 298
Nachträge und Berichtigungen zu Bd. I . . 315
Nachträge zu Bd II 361
G. Pólya· Über die „doppelt-periodischen“ Lösungen des n-Damen-Problems 364
Literarischer Index . . 375
Namenregister 432
Sachregister. 448
Berichtigungen . 455

Kapitel XII.

Magische Quadrate.

.. je ne sais guère rien de plus beau en l'Arithmétique que ces nombres que quelques uns appellent planetarios et les autres magicos

FERMAT AN MERSENNE.
1 April 1640.
Siehe „Oeuvres de Fermat", t. 2 (Paris 1894), p. 194

Frenicle s'est aussi occupé des carrés magiques. Ces problèmes, aussi difficiles qu'inutiles jusqu'ici, sont à peine aujourd'hui connus des géomètres Dans le temps où toutes les parties des mathématiques n'étaient également que des spéculations sans usage, ces questions n'avaient rien de ridicule; mais depuis que Newton nous a appris à soumettre au calcul les plus grands phénomènes de la nature, on rirait d'un géomètre qui s'occuperait laborieusement à arronger des nombres dans les cases d'un carré

CONDORCET
Siehe „Oeuvres", t. 2 (1847), p. 14/15

It is, perhaps, a mark of the good sense of our English mathematicians, that they would not spend their time in things that were merely difficiles nugae incapable of any useful application. — In my younger days, having once some leisure, which I still think I might have employed more usefully, I had amused myself in making these kind of magic squares.

BENJAMIN FRANKLIN.
"Experiments and observations on electricity"
(London 1769), p 350

Wer Hang zum Nachdenken und Forschen, und Sinn fur wissenschaftliche Untersuchungen hat, findet den Stoff hierzu ofters, dem Anscheine nach, in den allerunbedeutendsten Gegenständen Verschiedene gelehrte Männer, deren Namen man nicht anders als mit Achtung und Verehrung nennt, haben sich nicht geschämt, ihre Geisteskrafte auf Untersuchungen zu lenken, welche im Grunde mehr Übungen für den Verstand, als sonst von unmittelbarem Nutzen waren; ja von vielen derselben waren die Veranlassungen ofters nichts mehr, als bloße Tändeleyen und Spielwerke. Wollte man solche achtungswürdige Männer deswegen tadelen, daß sie ihre kostbare Zeit auf die Ergrundung solcher Dinge, welche dem Layen nugae difficiles scheinen, verwendet haben, so wurde dies nicht so sehr die Ungerechtigkeit, als die Unwissenheit eines solchen Splitter-Richters beweisen

Newton bließ Seifenkugeln, Leibnitz spielte mit dem Grillenspiel, Wallis beschäftigte sich mit dem Nurnberger Tand, Franklin tandelte mit den magischen Quadraten, das thun zwar große und kleine Kinder auch, aber wie viele Menschenkinder haben seit Erschaffung der Welt Seifenkugeln geblasen, Grillen- und Ringelspiele gespielt, wie vielen sind Äpfel oder Birn auf die Kopfe gefallen und sie erfanden doch keine Farben-Theorie, keine geometriam situs, kein Attractions-System!

ERNST II LUDWIG, HERZOG VON SACHSEN-GOTHA
Kaiserlich privilegirter Reichs-Anzeiger
(Gotha), 1797, Nr 216, 18 Sept, col 2319

Ce qui a commencé par être une vaine pratique de Faiseurs de Talismans ou de Devins, est devenu dans la suite le sujet d'une recherche serieuse pour les Mathematiciens, non qu'ils ayent crû qu'elle les pût mener à rien d'utile ni de solide, les Quarrés Magiques se sentent toûjours de leur origine sur ce point, ils ne peuvent être d'aucun usage, ce n'est qu'un jeu dont la difficulté fait le merite, et qui peut seulement faire naître sur les Nombres quelques veües nouvelles, dont les Mathematiciens ne veulent pas perdre l'occasion

FONTENELLE.
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, pour 1705
(Paris 1706), p 70

If dealing with trifles like magic squares is worthy of an Euler or a Cayley, if in short it is legitimate, it is because amusement has value

E Mc CLINTOCK
Amer Journ. of Mathem. 19, 1897, p. 100.

§ 1. Einleitung. Die einfachsten Formen magischer Quadrate.

Auf dem „Melencolia“ genannten Kupferstich Albrecht Dürers vom Jahre 1514 findet sich neben zahlreichen allegorischen Gegenständen auch ein 16-zelliges Quadrat (s. Fig. 1), ausgefüllt mit den Zahlen 1—16, die darin so angeordnet sind, daß die Zahlen jeder „Zeile“ (Horizontalreihe), wie jeder „Spalte“ (Vertikalreihe), sowie auch jeder der beiden Diagonalen eine konstante Summe, nämlich 34, ergeben. Ein Zahlenquadrat von solchen Eigenschaften bezeichnen wir heute als ein „magisches.“[1]) Auf dem Werk Dürers, das die allegorische Figur der mathematisch-technischen Forschung, umgeben von stereometrischen Körpern, allerlei Werkzeugen zum Messen, Zeichnen, Wägen usw., in einer augenblicklichen Anwandlung dumpfen, melancholischen Hinbrütens und Grübelns darstellt, dient das Zahlenquadrat zur Versinnbildlichung der Arithmetik, ebenso wie Kugel und Polyeder deren geometrische Schwester verkörpern.[2])

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	**15**	**14**	1

Fig. 1.

Das magische Quadrat Dürers ist das älteste Zahlengebilde dieser Art, das wir aus dem christlichen Abendlande nachzuweisen

1) Die beiden Mittelzahlen der untersten Zeile geben wir in Fig. 1 in Fettdruck, weil sie beide zusammen zugleich das Jahr nennen, dem das Werk Dürers entstammt. Diese Zahlenspielerei mag für Dürer die Veranlassung gewesen sein, gerade diese besondere Form des magischen Quadrats zu wählen.

2) Auf die Frage, wie das Werk Dürers zu verstehen und wie das magische Quadrat auf ihm gedacht ist, kann hier nicht weiter eingegangen werden. Für meine Auffassung erlaube ich mir, auf einen Aufsatz in der Zeitschr. f. bildende Kunst, 50. Jahrg. (= N. F. Bd. XXVI), 1914/15, p. 291—301, zu verweisen; die dortigen historischen Ausführungen habe ich freilich nach wertvollen Hinweisen von anderer Seite in einem nicht unwichtigen Punkte berichtigen müssen (s. die in Anm. 3 der folgenden Seite genannte Abh. aus „Islam“ VII, p. 199. 200, s. dazu jedoch wieder, so weit es sich um al-Būnī handelt, die zweite ebendort zitierte Arbeit aus Bd. IX), ohne daß dies jedoch meine frühere Gesamtauffassung wesentlich zu beeinträchtigen vermöchte. Ich hoffe, einmal in einer besonderen Schrift diese vielumstrittene Frage ausführlicher erörtern zu können.

vermögen. Auf die Geschichte der magischen Quadrate[1]) soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden[2]), und wir beschränken uns in dieser Beziehung auf die Angabe, daß, abgesehen von einem angeblich uralten, jedoch durchaus sagenhaften chinesischen Vorkommnis, die ältesten magischen Quadrate arabischen Ursprungs zu sein scheinen.[3]) Die Araber insbesondere sind es anscheinend auch gewesen, die von diesen Zahlengebilden zuerst den Gebrauch machten, der den Quadraten ihren heutigen Namen, den der „magischen“, eingetragen hat: den Gebrauch für Zwecke der Magie und überhaupt des Aberglaubens. In der Folge nahm auch das christliche Abendland diesen Aberglauben an, und das 16., mehr noch das 17. Jahrhundert, hat von unseren Zahlenquadraten für astrologische Amulette einen überreichlichen Gebrauch gemacht.[4]) Es hat nichts Auffallendes, daß Gebilde von so merkwürdiger Zahlenharmonie mit einem mystisch-magischen Nimbus umkleidet werden: Die schönen und oft überraschenden Beziehungen und Gesetze des Zahlenreiches, die den Forscher der modernen Zeit mit freudiger Begeisterung erfüllen und ihn zu Ausrufen der Bewunderung hinreißen, erweckten und nährten in dem Gelehrten der alten Zeiten den Glauben an übersinnliche Mächte und Kräfte

Das Dürersche Quadrat der 16 Zellen stellt noch nicht den einfachsten Typus magischer Quadrate dar, vielmehr ist das einfachste magische Quadrat eins von 9 Zellen Bei diesem wird es sich darum handeln, die Zahlen 1, 2, . . 9 so in die 3 · 3 Zellen eines Quadrats einzuordnen, daß jede Zeile und jede Spalte, wie auch jede der beiden Diagonalen die gleiche Zahlensumme auf-

1) Siehe insbesondere die monographische Abhandlung von Siegmund Günther in dessen Werk „Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften“ (Leipzig 1876) Kap IV (p. 188—270) „Historische Studien uber die magischen Quadrate “

2) Vgl das Vorwort.

3) Über „die magischen Quadrate der Araber“ siehe meinen Aufsatz in der Zeitschrift „Islam“, Bd. VII, 1916, p 186—250, und über das fur unseren Gegenstand wichtigste Werk der arabischen Literatur, den šams al-maʿārif al-Būnī's, eine zweite Arbeit ebda., Bd. IX, 1918.

4) Siehe hierüber insbesondere meine im literar. Index sub 746 aufgeführten Aufsätze, sowie auch Nr. 745 u. die (hier oben bereits zitierte) Nr. 747

weist. Dabei sei denn sogleich die Bemerkung gestattet, daß ein noch einfacheres magisches Quadrat, also eine entsprechende Anordnung der Zahlen 1 bis 4, offenbar nicht möglich ist. Sollen nun die neun ersten Zahlen der Zahlenreihe so in die 9 Zellen eines Quadrats eingeordnet werden, daß zunächst nur alle Zeilen dieselbe konstante Summe ergeben, so muß, da die Summe aller 9 Zahlen 45 beträgt, diese konstante Summe jeder Zeile 15 sein. Dieselbe Summe soll dann auch jede Spalte und jede der beiden Diagonalreihen ergeben; erst dann sprechen wir von einem „magischen Quadrat" und nennen die übereinstimmend in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder der beiden Diagonalen sich ergebende Zahlensumme die „Konstante" oder auch die „magische Konstante" des Zahlenquadrats.

In 8 verschiedenen Reihen — 3 Zeilen, 3 Spalten, 2 Diagonalen — soll also das magische Quadrat der 9 Zellen, das zu konstruieren wir uns jetzt anschicken, die „Konstante" 15 ergeben. Man überzeugt sich nun leicht, daß es für die Bildung der Summe 15 aus je 3 der Zahlen 1—9 folgende 8 Möglichkeiten, und auch nur diese 8, gibt:

1, 5, 9; 1, 6, 8; 2, 4, 9; 2, 5, 8; 2, 6, 7; 3, 4, 8; 3, 5, 7; 4, 5, 6

In diesen 8 Tripeln kommt nun die Zahl 5 häufiger als irgendeine andere Zahl, nämlich viermal, vor, und daraus folgt sofort, daß die Zahl 5 notwendig das Mittelfeld des zu bildenden magischen Quadrats einnehmen muß; denn das Mittelfeld gehört nicht weniger als 4 Reihen — es sind die in Fig. 2 markierten — von denen, die die Konstante 15 ergeben sollen, an Da nun ferner unsere aufgeführten 8 Tripel die geraden Zahlen 2, 4, 6, 8 je dreimal, die ungeraden 1, 3, 7, 9 dagegen nur je zweimal aufweisen, so müssen die 4 Eckfelder des magischen Quadrats, da sie drei Reihen von der Konstanten 15 — einer Zeile, einer Spalte und einer Diagonale — angehören sollen, mit den 4 geraden Zahlen besetzt werden, während die übrigen 4 Felder, die Mittelrandfelder, von den ungeraden Zahlen 1, 3, 7, 9 eingenommen werden Denkt

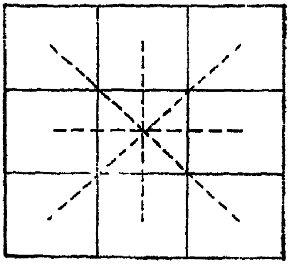


Fig 2

man sich nun etwa das Eckfeld oben links mit der Zahl 2 besetzt, so muß in dem Eckfeld unten rechts, damit die betreffende Diagonale die Konstante 15 ergibt, die Zahl 8 stehen. Für die beiden anderen Eckfelder bleiben dann die Zahlen 4 und 6. Legt man diese fest, besetzt man also etwa das Eckfeld oben rechts mit 4, so sind damit offenbar auch die Zahlen der Mittelrandfelder bestimmt, und man bekommt so das magische Quadrat der Fig. 3. — Man erkennt so leicht, daß unsere Aufgabe 8 Lösungen besitzt: Jede der 4 Zahlen 2, 4, 6, 8 kann das Eckfeld oben links einnehmen, womit auch zugleich die Zahl für das Eckfeld unten rechts festgelegt ist, während für die Ecke oben rechts dann jedesmal noch zwei Möglichkeiten bestehen. Im Grunde stellen diese 8 Quadrate jedoch nur eine Lösung unserer Aufgabe dar; denn aus jedem dieser 8 Quadrate gehen die übrigen 7 durch Drehungen und Spiegelungen hervor, und eine solche Gruppe von 8 zusammengehörigen Lösungen sind wir gewohnt, als eine einzige Lösung anzusehen (vgl in Bd I: S 217 ff). In diesem Sinne gibt es also nur ein magisches Quadrat von 9 Zellen

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Fig. 3

Von 16-zelligen magischen Quadraten, d. h von solchen Anordnungen der Zahlen 1—16 in 4 4 Zellen, daß alle Zeilen und Spalten, wie jede der beiden Diagonalen die „Konstante“ 34 ergeben, gibt es bereits eine große Mannigfaltigkeit, nämlich nicht weniger als 880 wesentlich verschiedene, d. h nicht durch Drehungen oder Spiegelungen ineinander überführbare Quadrate. Der französische Mathematiker Frénicle de Bessy († 1675) hat in einer hinterlassenen, 18 Jahre nach seinem Tode von Lahire herausgegebenen Abhandlung die Riesentabelle dieser 880 Quadrate angegeben.[1])

1) Frenicle de Bessy, „Des carrés magiques,“ publ par Ph. de la Hire Divers ouvrages de mathém. et de phys Par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences (Paris) 1693, p 423—507; die Riesentabelle: p 484—503. Über weitere Abdrucke der Abh. s den literar Index (Nr. 50). — Das nackte Resultat, daß es 880 verschiedene 16-zellige magische Quadrate gibt, aber ohne Angabe dieser Quadrate selbst, findet sich bereits in den

Von diesen 9- und 16-zelligen magischen Quadraten als den Gebilden erster und zweiter Stufe wenden wir uns zu dem allgemeinen magischen Quadrat von $n \cdot n$ Zellen, also einem Zahlenquadrat, das in seinen $n \cdot n$ Zellen die Zahlen 1 bis n^2 in solcher Anordnung aufweist, daß jede Zeile, jede Spalte und jede der beiden Diagonalen dieselbe Zahlensumme ergibt. Diese Zahlensumme, die „Konstante" des magischen Quadrats also, muß, wie eine sehr einfache Rechnung zeigt, den Wert $\frac{n(n^2+1)}{2}$ haben.

Das eigentliche Problem der magischen Quadrate besteht hiernach darin, eine möglichst einfache Methode anzugeben, die für irgendeinen Wert von n die Reihe sämtlicher magischen Quadrate, die für diese Stufe möglich sind, liefert, und kein geringerer als der große Fermat hat einmal behauptet, eine solche Methode zu besitzen.[1]) In Wirklichkeit scheiterte Fermat jedoch schon an dem Spezialfalle $n = 8$, für den er nach seiner Methode die Gesamtzahl der magischen Quadrate bestimmt haben wollte,[2]) und gab dann selbst zu, daß sein Verfahren nicht erschöpfend sei.[3]) Auch heute ist man von einer solchen erschöpfenden und praktisch anwendbaren Methode weit entfernt, vielmehr handelt

---

„Novae observationes physico-mathematicae" (III, Paris 1647, p 211) von Mersenne, der die Kenntnis dieser Zahl gewiß seinem Freunde Frénicle verdankte Noch Antoine Arnauld meint (1667) im Anhang seiner „Nouveaux Elémens de Géométrie" (Ausg.: La Haye 1690, p 475), daß es nur 16 wesentlich verschiedene Varietäten gebe; s. a. die im literar Index (Nr. 38) aufgeführte Schrift von K Bopp, l. c p. 332 u 313 — Bemerkt sei noch, daß die Richtigkeit der Frénicleschen Zahl und Tabelle mehrfach angezweifelt worden ist — auch verschiedene Leser dieses Buches haben sich und mich in dieser Beziehung bemühen zu sollen geglaubt —, doch haben alle diese Beanstandungen sich bei näherer Prüfung als unbegründet erwiesen.

1) Siehe Briefe Fermats an Mersenne vom Jahre 1640 in. Oeuvres de Fermat, publ. par Paul Tannery et Charles Henry, t. 2 (Paris 1894), p. 192 u 194; s. a. ibidem p. 190.

2) L. c. p. 194/195. Die Zahl, die Fermat dort angibt, ist viel zu klein

3) L. c. p. 196. Diese ganze Auseinandersetzung ist für den großen Mathematiker in wissenschaftlicher wie in menschlicher Beziehung nicht gerade rühmlich.

es sich hier um ein Problem von so großer Sprödigkeit, daß man in Bestimmung der Anzahl aller überhaupt möglichen magischen Quadrate für ein spezielles n noch nicht wesentlich über den Fall $n = 4$, also den Fall Frénicles, hinausgekommen ist und jedenfalls den Fall $n = 5$ noch nicht erledigt hat.[1] Für eine Methode vollends, die für jedes n in angemessener Zeit diese Anzahl resp. die magischen Quadrate selbst lieferte, besteht nicht die geringste Aussicht, und schwerlich wird eine solche auch je mit den bisher angewandten oder auch selbst mit allen heute zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln gewonnen werden.

Bei diesem Stande des Problems wird man, da eine allumfassende Methode doch nicht existiert, den Wert der verschiedenen Verfahren, die für die Bildung magischer Quadrate angegeben sind, in erster Linie nicht nach der mehr oder weniger großen Zahl von Quadraten, die sie zu liefern vermögen, bemessen dürfen. Vielmehr verdienen unter diesen Umständen Spezialmethoden, die auf eine möglichst bequeme und elegante Art für irgendwelche Weite von n ein magisches Quadrat liefern, den Vorzug, und die Vorführung der wichtigsten dieser Methoden wird daher hier unsere Hauptaufgabe sein.

§ 2. Methode der Einer und n-er.

Jedem, der nur die einfachsten zahlentheoretischen Kenntnisse besitzt, bietet sich für die Konstruktion magischer Quadrate, insbesondere derjenigen von ungerader Zellenzahl, heute gewissermaßen von selbst eine Methode dar, deren erste Anfänge wir in einer Abhandlung von Poignard (1704) zu erblicken haben und die dann insbesondere durch Lahire (1705), sowie durch Sauveur (1710) ausgebildet ist.[2] Nachdem im vorigen § bereits magische

---

1) Einen Literaturbericht über die bisherigen Untersuchungen zur Frage der Anzahlbestimmung der magischen Quadrate habe ich in der Zeitschr. für mathem. u. naturw. Unterr., 45. Jahrg., 1914, p. 527—529, gegeben.

2) Siehe die Titel dieser Arbeiten im literar. Index; in der Schrift Poignards s. besonders p. 41/42 und vgl. über ihn zudem hier: Kap. XIII,

Quadrate von 9 und 16 Zellen angegeben sind, wollen wir hier, um die Gedanken zu fixieren, den Fall nächster Stufe, also das Quadrat von 25 Zellen, zugrunde legen. Wir beginnen damit, die Zahlen von 1—25 als Zahlen eines Systems von der Grundzahl 5 darzustellen, und zwar soll dies in folgender Weise geschehen:

$1 = 0 + 1$	$6 = 5 + 1$	$11 = 10 + 1$	$16 = 15 + 1$	$21 = 20 + 1$
$2 = 0 + 2$	$7 = 5 + 2$	$12 = 10 + 2$	$17 = 15 + 2$	$22 = 20 + 2$
$3 = 0 + 3$	$8 = 5 + 3$	$13 = 10 + 3$	$18 = 15 + 3$	$23 = 20 + 3$
$4 = 0 + 4$	$9 = 5 + 4$	$14 = 10 + 4$	$19 = 15 + 4$	$24 = 20 + 4$
$5 = 0 + 5$	$10 = 5 + 5$	$15 = 10 + 5$	$20 = 15 + 5$	$25 = 20 + 5$

Jede der 25 Zahlen stellt sich hierbei durch 2 Zahlen dar, einen „Einer“ und einen „Fünfer“, von denen die ersteren 1, 2, 3, 4, 5, die letzteren 0, 5, 10, 15, 20 sind. Die für das zu bildende magische Quadrat charakteristische „Konstante“ ist nun offenbar nichts anderes als die Summe aller verschiedenen Fünfer und Einer ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 0 + 5 + 10 + 15 + 20$), und diese „Konstante“ wird jedenfalls dann in allen Zeilen und Spalten auftreten, wenn wir die Zahlen so in die 25 Zellen einordnen, daß wir im Sinne der obigen Schreibweise in jeder Zeile wie Spalte lauter verschiedene Einer und lauter verschiedene Fünfer haben. Hiernach teilt sich unsere Aufgabe von selbst in 2 Teile: eine passende Anordnung der Einer und eine hierzu passende der Fünfer, aus denen beiden wir dann das verlangte Quadrat komponieren.

Um das passende Quadrat der Einer zu erhalten, schreiben wir in die 5 Zellen der obersten Zeile die 5 Einer, wobei wir — aus einem weiter unten ersichtlichen Grunde — mit der mittleren Zahl 3 beginnen, und füllen dann die nächste Zeile aus, indem wir die fünf Zahlen der obersten Zeile um eine Stelle nach rechts hin zyklisch verschieben (s. Fig. 4a; vgl. event a S. 57). In dieser Weise fährt man fort, und in dem so erhaltenen Quadrat (Fig. 4a) stehen offenbar nicht nur in jeder Zeile, sondern auch in jeder Spalte die 5 Einer; die Summe der Zahlen ist

S. 63 nebst Anm. 2 dort Im Grunde ist hier, als Vorlaufer Poignards, auch Laloubère schon zu nennen; s dessen Werk „Du royaume de Siam“, t II, Amsterdam 1691, p. 246; Ausg. Paris 1691 (t. II), p. 308

also in allen Zeilen und Spalten dieses Quadrats dieselbe. Die eine Diagonale weist stets die mittlere Zahl 3 auf, so daß ihre Zahlensumme offenbar dieselbe ist, wie die einer Zeile oder Spalte Die Zahlen der anderen Diagonale erhält man, indem man in der obersten Zeile, von der letzten Zahl 5 ausgehend, nach links zyklisch um je 2 Stellen vorrückt; man bekommt so, da die Zellenzahl einer Reihe ungerade ist, offenbar sukzessive alle 5 Zahlen, nämlich 5, 2, 3, 4, 1, so daß also die Zahlen auch dieser Diagonale dieselbe Summe ergeben wie die der anderen und wie die der Zeilen und Spalten.

3	1	2	4	5
5	3	1	2	4
4	5	3	1	2
2	4	5	3	1
1	2	4	5	3

Fig 4a

0	5	15	20	10
5	15	20	10	0
15	20	10	0	5
20	10	0	5	15
10	0	5	15	20

Fig 4b.

In entsprechender Weise bilden wir nun ein zweites Quadrat aus den Fünfern 0, 5, 10, 15, 20; nur setzen wir jetzt die mittlere Zahl (10) an das Ende der obersten Zeile und führen die verschiedenen zyklischen Verschiebungen, statt, wie zuvor, nach rechts, nach links aus Wir erhalten so die Anordnung der Fig. 4b, in der wieder alle Zeilen und Spalten, sowie eine der Diagonalen die 5 verschiedenen Fünfer aufweisen, mithin sämtlich die gleiche Summe ergeben, während die Zellen der anderen Diagonale alle von der mittleren Zahl 10 besetzt sind, so daß auch hier die Summe dieselbe wie in den vorgenannten Reihen ist.

Komponieren wir nun unsere beiden Hilfsquadrate, indem wir die Zahlen entsprechender Zellen des einen und des anderen addieren (s. Fig. 5), so erhalten wir offenbar ein Quadrat, in dem jede Zeile, Spalte und Diagonale dieselbe Summe ergibt, und zwar ist dies die für das magische Quadrat vorgeschriebene. Es fragt sich nur, ob bei dieser Komposition auch wirklich alle Zahlen 1—25

3	6	17	24	15
10	18	21	12	4
19	25	13	1	7
22	14	5	8	16
11	2	9	20	23

Fig 5

auftreten und nicht etwa die eine gar nicht, eine andere mehrere Male, mit anderen Worten: ob jeder Einer mit jedem Fünfer gerade einmal kombiniert wird. Um dies einzusehen, schreiben wir die Einer der obersten Zeile von Fig. 4a auf die Peripherie eines Kreises (Fig. 6) und entsprechend die Fünfer der obersten Zeile von Fig. 4b auf die Peripherie eines dazu konzentrischen Kreises, so zwar, daß 2 Zahlen entsprechender Zellen übereinander stehen.

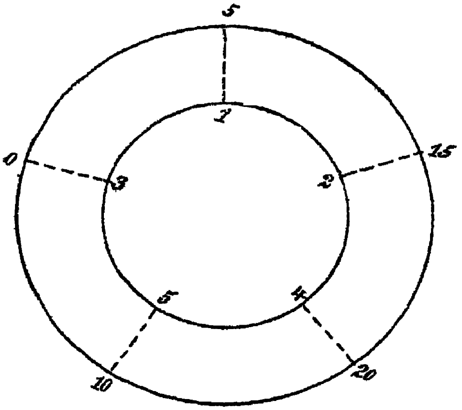


Fig. 6.

Die oberste Zeile der Fig. 5 ergibt sich dann durch Addition der übereinanderstehenden Zahlen der beiden Kreise $(0 + 3, 5 + 1$ usw.). Um die nächste Zeile von Fig. 5 zu erhalten, müssen wir erst die Zahlen des inneren Kreises um einen Platz im Uhrzeigersinne und die des äußeren gleichfalls um einen Platz, aber im umgekehrten Uhrzeigersinne, drehen und dann wieder die übereinanderstehenden Zahlen addieren.[1]) Anstatt nun die Zahlen jedes der beiden Kreise um je einen Platz und zwar im entgegengesetzten Drehungssinne zu verschieben, können wir auch ebensogut die Zahlen des einen Kreises, etwa des äußeren, festhalten und die des inneren um je zwei Plätze verschieben, also 3 an die Stelle von 2 rücken usw Dann kommt aber, wie man sieht, eine bestimmte Zahl der Einer der Reihe nach mit jedem Fünfer zusammen, da eben der Kreis in eine ungerade Anzahl von Teilen geteilt ist.

Damit ist aber die Richtigkeit unserer Methode endgültig dargetan, und man sieht leicht, daß dieselbe allgemein für un-

1) Der verschiedene Drehungssinn ist natürlich bedingt durch die verschiedene Art der vorher angewandten zyklischen Verschiebungen, die das eine Mal nach rechts, das andere Mal nach links hin erfolgten. Bei gleicher Drehung der Kreise würden selbstredend stets dieselben Zahlen übereinander stehen.

gerade Zellenzahl anwendbar ist, da von den Eigenschaften der Zahl 5 bei der Beweisführung nur die eine wesentlich war, nicht durch 2 teilbar zu sein.

Wenn dies Verfahren in der angegebenen Form auch nur anwendbar ist, so lange n, die Felderzahl der Quadratseite, ungerade ist, so erstreckt sich die Tragweite des Prinzips, das dem Verfahren zugrunde liegt, doch weiter auch auf die Fälle eines geraden n, und unsere Methode läßt sich unschwer auch diesen Fällen anpassen, wie gleichfalls an konkreten Beispielen gezeigt werde.[1]) Wir haben hier — bei geradem n — zwei Unterfälle zu unterscheiden, nämlich den, daß n nicht nur durch 2, sondern auch durch 4 teilbar, also, wie man sagt, „gerad-gerade“ ist, und den, daß n nicht durch 4, sondern nur durch 2 teilbar, also „ungerad-gerade“ ist. Als Beispiel des ersten Falles wählen wir $n = 8$, als das des zweiten: $n = 10$

0	1	2	3	4	5	6	7
	1					6	
		2			5		
			3	4			
			3	4			
		2			5		
	1					6	
0,							7

Fig 7

Um — für $n = 8$ — zunächst das eine Hilfsquadrat zu bilden, schreibt man die Zahlen 0 bis 7 in irgendwelcher Reihenfolge, also etwa der Größe nach, in die oberste Zeile; darauf füllt man auch die beiden Diagonalreihen mit denselben Zahlen, diese auch wieder in derselben Reihenfolge geschrieben, aus (s. Fig 7) Sodann werden die noch leeren Felder der linken Quadrathälfte besetzt und zwar so, daß jede Spalte nur zwei verschiedene Zahlen und zwar zwei „Komplementärzahlen“, nämlich zwei sich zu 7 ergänzende Zahlen, erhält: die erste Spalte die Komplementärzahlen 0

1) Wir werden hierfür — abgesehen von einer unbedeutenden Modifikation (S 15, Anm. 1) — die Fassung wählen, die J. Lecornu der Methode Lahires für gerades n gegeben hat (s. Lecornus Publikation von 1901, Nr. 601 des literar Index).

und 7, die zweite 1 und 6, die dritte 2 und 5, die vierte 3 und 4. Dabei soll jede der beiden Komplementärzahlen gleich oft, also viermal, in ihrer Spalte vorkommen, und zwar sollen je zwei zu der horizontalen Mittelachse symmetrisch gelegene Felder stets dieselbe Zahl erhalten. Dies bedeutet z. B., daß das unterste Feld der zweiten Spalte (Fig. 7) mit 1 und die alsdann noch leeren 4 Felder dieser Spalte sämtlich mit 6 ausgefüllt werden

0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	5	4	3	2	6	7
7	6	2	4	3	5	1	0
7	6	5	3	4	2	1	0
7	6	5	3	4	2	1	0
7	6	2	4	3	5	1	0
0	1	5	4	3	2	6	7
0	1	2	3	4	5	6	7

Fig. 8

0	0	7	7	7	7	0	0
1	1	6	6	6	6	1	1
2	5	2	5	5	2	5	2
3	4	4	3	3	4	4	3
4	3	3	4	4	3	3	4
5	2	5	2	2	5	2	5
6	6	1	1	1	1	6	6
7	7	0	0	0	0	7	7

Fig. 9

müssen. Nachdem man in dieser Weise die ersten 4 Spalten hergestellt hat (s Fig. 8), werden die letzten 4 Spalten so ausgefüllt, daß jedes Feld dieser rechten Quadrathälfte die Komplementärzahl derjenigen Zahl erhält, mit der das ihm symmetrisch entsprechende Feld der linken Quadrathälfte besetzt ist So ergibt sich das Quadrat der Fig. 8 Dieses Quadrat Fig. 8 dreht man nun um 90° und erhält so das Quadrat Fig 9. Diese beiden Quadrate (Fig 8 und 9) sind ihrer Entstehungsweise nach gleichsummig in allen Zeilen und Spalten, wie auch den beiden Diagonalen Nun kombiniert man die beiden Quadrate, indem man die Zahlen der Fig. 8 alle um 1 vergrößert, die der Fig. 9 alle mit 8 multipliziert und darauf die entsprechenden Zahlen beider Quadrate addiert. So entsteht das Quadrat Fig. 10. Daß dieses in allen Zeilen und Spalten, wie auch in den beiden Diagonalen gleichsummig ist, bedarf keiner Begründung mehr. Man erkennt

1	2	59	60	61	62	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
24	47	19	45	44	22	42	17
32	39	38	28	29	35	34	25
40	31	30	36	37	27	26	33
48	23	43	21	20	46	18	41
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	3	4	5	6	63	64

Fig. 10.

ferner auch leicht, daß die Zahlen des neuen Quadrats alle untereinander verschieden und daß es dann nur die Zahlen 1 bis 64 sein können. Man beachte z. B., daß die erste und die letzte Zeile von Fig. 8 die Zahlen 0 bis 7 resp., nach der Vergrößerung, die Zahlen 1 bis 8, und zwar in natürlicher Reihenfolge, enthalten; zu diesen Zahlen tritt aus Fig. 9 nun entweder $0 \cdot 8$ oder $7 \cdot 8$ hinzu, und zwar wird eine bestimmte Zahl aus diesen beiden Zeilen der Fig. 8, z. B. die dritte (2 resp. nach der Vergrößerung 3), die in der obersten Zeile mit $7 \cdot 8$ (aus Fig. 9) kombiniert wird, in der untersten Zeile mit $0 \cdot 8$ kombiniert, weil ja die oberste und unterste Zeile von Fig. 9 in entsprechenden Feldern Komplementärzahlen aufweisen Man erkennt so, daß die 16 Zahlen der obersten und untersten Zeile von Fig. 10 alle unter sich verschieden sind und daß, weil sie ihrer Entstehung nach alle dem Zahlengebiet von 1 bis 8 und von 57 bis 64 angehören, sie dieses Zahlengebiet von zusammen 16 Zahlen vollständig erschöpfen Für die übrigen Paare symmetrisch gelegener Zeilen gilt ganz das Entsprechende, und man sieht so, daß unser Quadrat allen Anforderungen, die wir an ein magisches Quadrat stellen, genügt.

Wenden wir uns nun zu dem Fall eines ungerad-geraden n, also zu $n = 10$, und formen wir die oberste Zeile und die Diagonalreihen des ersten Teilquadrats ganz analog wie zuvor in Fig. 7, so ergibt sich alsbald, bei entsprechender Ausfüllung der weiteren Felder, eine Schwierigkeit: Wollen wir beispielsweise die zweite Spalte wieder ausschließlich mit zwei Komplementärzahlen, jetzt 1 und 8, besetzen, und zwar so, daß beide gleich oft, also je 5-mal, vorkommen, so läßt es sich natürlich nicht, wie bei gerad-geradem n, einrichten, daß stets zwei in bezug auf

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	7	6	5	4	3	2	8	9
0	1	2	6	5	4	3	7	8	9
9	8	2	3	4	5	6	7	1	0
9	8	7	3	4	5	6	2	1	0
9	8	7	6	4	5	3	2	1	0
9	8	7	3	4	5	6	2	1	0
0	8	2	6	5	4	3	7	1	9
9	1	7	6	5	4	3	2	8	0
0	1	2	3	5	4	6	7	8	9

Fig 11

1	92	3	94	95	96	97	8	9	10
11	12	88	87	86	85	84	13	19	20
21	72	23	77	76	75	24	28	79	30
40	69	63	34	65	36	37	68	62	31
60	59	58	44	45	46	47	53	52	41
50	49	48	57	55	56	54	43	42	51
70	39	38	64	35	66	67	33	32	61
71	29	73	27	26	25	74	78	22	80
90	82	18	17	16	15	14	83	89	81
91	2	93	4	6	5	7	98	99	100

Fig 12

die horizontale Mittelachse symmetrisch gelegene Felder dieser Spalte mit derselben Zahl besetzt werden, vielmehr muß einmal eine Ausnahme gemacht und das betreffende Felderpaar mit Komplementärzahlen besetzt werden Wählen wir zu diesem „anomalen Felderpaar“, wie wir kurz sagen wollen, in der ersten Spalte diejenigen beiden symmetrisch zur horizontalen Mittelachse gelegenen Felder, die nächst den bereits besetzten Feldern von der Mitte am weitesten entfernt sind, sodann in der zweiten Spalte das hieran nach der Mitte hin anschließende Felderpaar usw, schließlich in der fünften Spalte die beiden äußersten Felder, so erhalten wir das Hilfsquadrat der Fig. 11. Dreht man dieses Quadrat dann um 90°, multipliziert alle Zahlen dieses gedrehten Quadrats mit 10,

vergrößert die der Fig. 11 alle um 1 und setzt darauf die beiden so hergerichteten Quadrate in der Weise zusammen, daß wieder die Zahlen entsprechender Felder addiert werden, so erhält man das magische Quadrat der Fig. 12. Daß das Verfahren[1]) in der Tat magische Quadrate liefern muß, läßt sich im wesentlichen ebenso wie für gerad-gerades n beweisen; nur bedarf jener Beweis jetzt einer kleinen Abänderung bzw eines Zusatzes, doch

---

1) Es war übrigens nicht notwendig, die Vorschrift über die Wahl der „anomalen Felderpaare“ gerade so zu fassen, wie hier geschehen ist. Andererseits darf diese Wahl aber auch wieder nicht willkürlich in den einzelnen Spalten getroffen werden. Diese insgesamt n Felderpaare, von denen wir uns immer je zwei zur vertikalen Mittelachse symmetrisch gelegene zu einem „Felderquadrupel“ zusammengefaßt denken wollen, dürfen nämlich nicht so gewählt werden, daß eins dieser $\frac{n}{2}$ Quadrupel bei Drehung des Quadrats um 90° die Plätze eines anderen dieser Quadrupel einnehmen würde. Eine solche Lagebeziehung würde nämlich, wie leicht zu sehen, zur Folge haben, daß in dem endgültigen Quadrat gleiche Zahlen auftreten, während dafür ebensoviele andere Zahlen aus der Reihe 1 bis n^2 fehlen würden; das Quadrat würde also, obschon gleichsummig in allen Zeilen, Spalten und den beiden Diagonalen, nicht den Ansprüchen genügen, die wir an ein „magisches“ stellen. — Für $n = 6$ läßt sich nun die Lagebeziehung, die wir soeben als unzulässig bezeichneten, nicht vermeiden, wofern wir an unseren sonstigen Vorschriften festhalten, und wir würden somit nach unserer Methode in diesem Falle ein Quadrat erhalten, das zwar in den vorgeschriebenen Reihen (Zeilen, Spalten, Diagonalen) die magische Konstante 111 ergibt, das aber 4 Zahlen doppelt aufweist und dem dafür 4 andere Zahlen der Reihe 1 bis 36 fehlen Die Rücksicht auf diesen Fall $n = 6$ war es offenbar, die Lecornu veranlaßte, seine Methode, und zwar der Einheitlichkeit halber nun für jedes geradzahlige n, so zu fassen, daß in dem Lehrgerüst der Hilfsquadrate, wie wir unsere Fig 7 etwa nennen konnten, in jeder der beiden Diagonalen die beiden Mittelzahlen, in unserem Falle also 3 und 4, vertauscht werden Durch diese Abänderung erreicht man, daß die Methode auch für $n = 6$ brauchbar wird Andererseits beeinträchtigt diese Änderung jedenfalls die Durchsichtigkeit der Methode, und es schien mir richtiger, den Sonderfall $n = 6$ auszuschließen, als allein seinetwegen dem ganzen Verfahren eine Vorschrift aufzuzwingen, die in allen anderen Fällen entbehrlich ist. Wer also die hier gegebene Methode auf den Fall $n = 6$ anwenden will, hat nur die genannte kleine Änderung an dem Verfahren vorzunehmen

darf diese durch das Auftreten der anomalen Felderpaare bedingte Ausgestaltung des Beweises — insbesondere nach dem soeben bereits in der Anm. Gesagten — gewiß dem Leser überlassen bleiben.

Der Unterschied, der sich uns in diesem § zwischen den Fällen eines geraden und eines ungeraden n aufdrängte, ist kein zufälliger, sondern ist bis zu einem gewissen Grade durch die Art des Problems bedingt, wie mehr noch die weiteren Ausführungen, insbesondere auch der einleitende Abschnitt von § 3, zeigen werden. Wir werden daher unsere weiteren Ausführungen (§§ 3—5) auch vorzugsweise nach den Merkmalen eines ungeraden und eines geraden n orientieren müssen

Zum Schlusse dieses § sodann noch eine Bemerkung: Es braucht kaum gesagt zu werden, daß keineswegs alle überhaupt möglichen magischen Quadrate diesem hier besprochenen Bildungsgesetz der Einer und n-er folgen; vielmehr gibt es zahllose vollkommen magische Quadrate, die diesem Gesetz durchaus nicht unterworfen sind. So würde z. B., um bei unserem Ausgangsfalle $n = 5$ zu bleiben, das magische Quadrat

7	6	5	24	23
22	12	11	16	4
25	17	13	9	1
8	10	15	14	18
3	20	21	2	19

bei der Darstellung seiner Zahlen durch Einer und Fünfer auf das Einerquadrat

2	1	5	4	3
2	2	1	1	4
5	2	3	4	1
3	5	5	4	3
3	5	1	2	4

führen, das keineswegs den Regeln der obigen Methode entspricht, vielmehr beispielsweise in der ersten Spalte links nur 3 verschiedene Einer aufweist. — Für Betrachtungen über die innere Struktur magischer Quadrate liefert dieser Gesichtspunkt,

ob das betreffende Quadrat unserem Bildungsgesetz der Einer und n-er folgt oder nicht, gewiß eins der ersten und wichtigsten Klassifikationsprinzipien.

Auch das magische Quadrat der Fig. 13, um noch ein zweites Beispiel zu geben, weist eine von dem Gesetz der Einer und n-er abweichende Struktur auf. Kommen wir doch bei Zerlegung der Zahlen in Fünfer und Einer auf die beiden Quadrate Fig. 14a und 14b, die durchaus nicht unseren Vorschriften entsprechen: Die einzelnen Zeilen und Spalten weisen keineswegs alle ver-

1	18	21	22	3
20	14	9	16	6
19	15	13	11	7
2	10	17	12	24
23	8	5	4	25

Fig. 13.

1	3	1	2	3
5	4	4	1	1
4	5	3	1	2
2	5	2	2	4
3	3	5	4	5

Fig. 14a

0	15	20	20	0
15	10	5	15	5
15	10	10	10	5
0	5	15	10	20
20	5	0	0	20

Fig. 14b

schiedenen Einer resp. alle verschiedenen Fünfer auf, sondern nur vereinzelte von ihnen haben ausnahmsweise diese Besonderheit, auch sind die Zeilen und Spalten der beiden Quadrate weit entfernt, unter sich gleiche Zahlensummen zu ergeben. Dennoch ist das durch Komposition beider Teilquadrate entstehende Quadrat, also das Quadrat der Fig. 13, durchaus magisch, ja es zeigt sogar eine besonders kunstvolle Anordnung der Zahlen. Betrachtet man nämlich das in dem 25-zelligen Quadrat stehende Kernquadrat von 9 Zellen — unsere Figur hebt es durch stärkere Randlinien hervor —, so sieht man, daß in diesem 9-zelligen Quadrat alle Zeilen, Spalten und Diagonalen dieselbe Zahlensumme, nämlich 39, ergeben. Wir haben also in dem 25-zelligen magischen Quadrat sozusagen noch ein 9-zelliges „magisches“ Quadrat. Denken wir umgekehrt dieses Kernquadrat uns als das primäre, so entsteht also durch Herumlegen eines Randes um dieses wieder ein magisches Quadrat, und zwar wird dies offenbar dadurch ermöglicht, daß von den Zahlen dieses

Randes stets zwei solche, die zusammen einer Zeile, einer Spalte oder einer Diagonale angehören, wie z. B. 1 und 25 (Diagonale) oder 18 und 8 (Spalte) oder 19 und 7 (Zeile), dieselbe Summe, nämlich 26, ergeben, so daß also durch Herumlegen des Randes um das Kernquadrat zu der Reihensumme dieses letzteren — es war dies ja 39 — stets derselbe Zuwachs (26) hinzutritt: Beides zusammen: 39 + 26, ergibt dann die magische Konstante 65 des ganzen Quadrats.[1])

§ 3. Andere Methoden für ungerade Zellenzahl.

Ordnet man die Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge in die Zellen eines Quadrats ein, wie dies die Figuren 15 und 16 zeigen, so weisen in dieser natürlichen Ordnung bereits die beiden Diagonalen die magische Konstante auf: $1 + 6 + 11 + 16 = 4 + 7 + 10 + 13 = 34$ und $1 + 7 + 13 + 19 + 25 = 5 + 9 + 13 + 17 + 21 = 65$. Wir betrachten nun in den Quadraten die zu den Diagonalen parallelen Felderreihen: entsprechend den beiden Diagonalen haben wir zwei Systeme solcher Felderreihen, und zwar können wir in jedem dieser beiden Systeme die Felderreihen paarweise so zusammenfassen, daß jedes Paar n Felder, d. h. ebensoviele

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Fig. 15

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Fig. 16

1) Man nennt solche magischen Quadrate, bei denen immer ein magisches Quadrat in ein anderes eingeschachtelt ist, wohl „Stifelsche Quadrate“ nach Michael Stifel, der in seiner „Arithmetica integra“ (1544, fol. 24v—29v) zuerst die Bildung solcher Quadrate lehrte. Andere Namen, die für diese Quadrate gebraucht werden, sind: „geränderte“ oder „eingerahmte magische Quadrate“ („carrés magiques à bordure“, „à enceinte“, „carrés encadrés“, „paneled magic squares“), „doppelt-magische Quadrate“ („carrés doublement magiques“ oder „magiquement magiques“); diese letztere Bezeichnung halte ich aus mehreren Gründen für recht unzweckmäßig.

wie eine Diagonale, umfaßt So bildet die Reihe 3 + 9 + 15 (Fig. 16) zusammen mit 16 + 22 ein solches Paar des einen Systems, 3 + 7 + 11 mit 20 + 24 ein Paar des anderen Systems. In gleicher Weise ergänzen sich beispielsweise 4 + 8 + 12 + 16 und 25 (Fig. 16) oder in Fig. 15: 2 + 5 und 12 + 15. Zwei solche einander zu je n Feldern ergänzenden schrägen Felderreihen wollen wir eine „gebrochene Diagonale"[1]) nennen und wollen im Gegensatz dazu dort, wo wir einer Unterscheidung bedürfen, die gewöhnlichen Diagonalen als „Hauptdiagonalen" bezeichnen. Betrachtet man nun in unseren Figuren diese gebrochenen Diagonalen arithmetisch etwas näher, so erkennt man, daß auch sie alle bereits die magische Konstante, in Fig. 15 also 34, in Fig. 16 dagegen 65 als Zahlensumme ergeben.[2])

Außer den Haupt- und den gebrochenen Diagonalen weisen nun in Fig. 16 die magische Konstante noch zwei weitere Reihen auf: die mittlere Zeile (11 + 12 + 13 + 14 + 15) und die mittlere Spalte (3 + 8 + 13 + 18 + 23), und hierin liegt eine Besonderheit der ungeradzelligen Quadrate, die den geradzelligen (Fig. 15) natürlich abgeht und die den wesentlichen Unterschied zwischen diesen beiden Hauptfällen — n ungerade oder n gerade — begründet, einen Unterschied, der uns daher denn auch sogleich im vorigen § entgegentrat.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir für ungerades n noch einige Methoden angeben, denen in der Geschichte der magischen Quadrate eine besonders wichtige Rolle zukommt, wenn sie auch im Grunde alle auf dem uns bereits aus dem vorigen § bekannten Prinzip der Einer und n-er beruhen

1) Hellerung in seiner im literar Index (Nr 141) aufgeführten Abh. von 1823 (l c p 43) nennt die in diagonaler Richtung verlaufenden Reihen „Sparren" und demzufolge eine gebrochene Diagonale eine „Sparrenkoppel"

2) Einen allgemeinen Beweis für diese Eigenschaften der Zahlenquadrate von der Art unserer Figuren 15 und 16 zu geben, darf dem Leser überlassen bleiben, zumal die Tatsachen hier nur heuristisch, nämlich zur Erlangung einer Bildungsmethode für magische Quadrate, verwertet werden sollen und die Richtigkeit der so gewonnenen Methode dann natürlich durch einen eigenen Beweis dargetan werden wird

I. Die erste Methode des Moschopulos und die Methode der Inder.

Die soeben gemachten Vorbemerkungen gestatten uns, ein ungeradzelliges Quadrat mit der natürlichen Reihenfolge der Zahlen, wie z. B. das der Fig. 17, mit leichter Mühe in ein magisches Quadrat zu verwandeln. Haben wir doch in diesem Quadrate zwei Systeme von je 7 Reihen (je 1 Hauptdiagonale und 6 gebrochene Diagonalen), die die magische Konstante bereits ergeben, und außerdem noch zwei Reihen (Mittelzeile und Mittel-

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Fig 17

22						4
	23				11	
	+	24		18		
			25			
		32		26		
	39				27	
46						28

Fig 18

spalte) von derselben Eigenschaft, und zwar weisen alle diese genannten Reihen je 7 Zahlen auf. Hiernach ergibt sich sogleich ein modus procedendi: Wir werden versuchen, das eine System von Diagonalen in Zeilen, das andere in Spalten umzuwandeln, dagegen die beiden Mittelreihen der Fig. 17 (Zeile und Spalte) zu Diagonalen zu machen. Wir wollen mit diesem letzteren Teil der Aufgabe beginnen und tragen demgemäß in die eine Diagonalreihe der Fig. 18 die Zahlenreihe 22—28, in die andere Diagonalreihe die Zahlen 4, 11, 18, 25, 32, 39, 46 ein[1]). Hiernach

1) Dabei haben wir die Reihenfolge der Zahlen untereinander beibehalten, ohne daß dies jedoch notwendig gewesen wäre. Gewisse Vertauschungen der Zahlen jeder der beiden Reihen untereinander würden vielmehr durchaus zulässig sein, freilich nicht jede beliebige Vertauschung. Wir glauben, auf diese Frage nicht näher eingehen zu sollen, und wollen

ergeben sich für die übrigen Zahlen unschwer die ihnen gebührenden Plätze: Die Zahl 6, um ein konkretes Beispiel herauszugreifen, gehört in Fig. 17 zu einer gebrochenen Diagonale, die mit den Mittelreihen (Zeile und Spalte) die Zahlen 24 und 18 gemein hat; somit wird 6 auch in Fig. 18 in eine Reihe (Zeile) mit den Zahlen 24 und 18 gesetzt werden müssen. Andererseits gehört die Zahl 6 in Fig. 17 aber auch zu einer gebrochenen Diagonale (6, 14; 15, 23, 31, 39, 47), die mit den Mittelreihen die Zahlen 23 und 39 gemein hat, und kommt daher in Fig. 18 in dieselbe Spalte wie 23 und 39. Damit ist in Fig. 18 der Platz von 6 eindeutig bestimmt: es ist das durch ein Kreuz bezeichnete Feld. Wollte man, um ein zweites Beispiel zu nennen, fragen: Welche Zahl wird den Platz unterhalb 25 in Fig. 18 einnehmen?, so ergibt sich die Antwort sehr leicht: Die gesuchte Zahl muß nach Fig. 18 in dem einen Diagonalsystem der Fig. 17 mit 25 in einer Reihe liegen, in dem anderen mit 32 und 26; das ist aber in Fig. 17 die Zahl 1, die mit 25 auf einer Hauptdiagonale liegt, mit 32 und 26 aber zu derselben gebrochenen Diagonale gehört.

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Fig. 19

In dieser Weise bestimmen sich nun leicht und eindeutig die Plätze aller Zahlen, und wir erhalten so das Quadrat Fig 19, das in der Tat magisch ist. Dies Quadrat hat nun dieselbe Struktur wie Quadrate, die sich in einem griechischen Traktat aus dem Anfange des 14. Jahrhunderts, der ersten Abhandlung über unseren

nur zwei Beschränkungen, die sich sofort aufdrängen, hervorheben 1) Die der Mittelzeile und Mittelspalte in Fig 17 gemeinsame Zahl 25 muß natürlich in Fig 18 auch wieder das Mittelfeld, das den beiden Diagonalen gemein ist, einnehmen; 2) werden die Zahlen der einen Reihe untereinander vertauscht, so muß mit denen der anderen Reihe dieselbe Vertauschung vorgenommen werden Diese Bedingungen sind aber, wie gesagt, nur notwendig, nicht hinreichend.

Gegenstand, die man als eine wissenschaftliche bezeichnen darf, finden. Manuel Moschopulos gilt als der Verfasser dieser Abhandlung[1]), und die erste unter den beiden Methoden, die er für Bildung ungeradzelliger Quadrate gibt, ist es, die Quadrate von unserer Struktur liefert. Diese Vorschrift des Moschopulos lautet nun folgendermaßen: *Man setze die 1 in das Feld gerade unterhalb des Mittelfeldes und gehe von da ab in diagonaler Richtung nach rechts unten weiter, wobei man die betreffenden Felder mit 2, 3 usw. ausfüllt, bis man an den Rand des Quadrates gelangt; darauf fährt man in der rechts hieran anschließenden Spalte oben fort usw. Jedesmal, wenn man den unteren Rand erreicht hat, fährt man in der rechts benachbarten Spalte oben, und jedesmal, wenn man den rechten Rand erreicht hat, fährt man in der ersten Spalte links und zwar dort in der nächsttieferen Zeile fort. Stößt man auf ein schon besetztes Feld, so setzt man die neue Zahl zwei Felder tiefer als das zuletzt ausgefüllte Feld.*

Diese Methode des Moschopulos ist nun nahe verwandt einer anderen, deren sich nach dem schon zitierten indischen

1) Über Manuel Moschopulos, der um 1300 lebte und vorwiegend Grammatiker und Lexikograph war, s Karl Krumbacher, „Geschichte der byzantinischen Litteratur von Justinian bis zum Ende des oströmischen Reiches" (= Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft, 9 Bd., 1 Abt), 2. Aufl., München 1897, p. 546—548 Der Traktat des Moschopulos ist zum ersten Male herausgegeben von Siegmund Gunther, l c („Vermischte Untersuchungen"), p 195--203 nebst Fig. 1—14, s. a. p 194/5; kritische Noten p 267f, mathematische Diskussion p. 203—212. „Eigentlich philologischen Anspruchen" will diese Textwiedergabe begreiflicherweise nicht genugen (Gunther, p 195), und so nahm denn A Eberhard, „Zu Moschopulos' Tractat uber die magischen Quadrate", Hermes, Bd. 11, 1876, p 434—442, eine kritisch-philologische Revision des Guntherschen Textes vor Eine neue Ausgabe des Textes nebst franzosischer Übersetzung gab Paul Tannery „Le traité de Manuel Moschopoulos sur les carrés magiques", Annuaire de l'association pour l'encouragement des études grecques en France, 20, 1886, p 88—118; s. a P Tannery, „Manuel Moschopoulos et Nicolas Rhabdas", Bull des sc. mathém et astronom (2) 8, 1884 (p 263—277), p. 263—267

Reisewerk des französischen Regierungsbevollmächtigten S. de Laloubère[1]) die Inder bedienten. Diese indische Vorschrift lautet folgendermaßen: *Man schreibe die 1 in die Mitte der obersten Zeile, dann 2 als unterste Zahl der rechts von der Mitte befindlichen Spalte und hierauf in diagonaler Richtung / nach oben fortschreitend 3, 4 . . ., so zwar, daß, wenn man den rechten Rand erreicht, man am linken in der darüber befindlichen Zeile fortfährt und, wenn man den oberen Rand erreicht, man am unteren in der rechts davon befindlichen Spalte fortfährt. Kommt man auf ein schon besetztes Feld, so setzt man die neue Zahl auf das Feld direkt unter dem zuletzt ausgefüllten.*[2])

Die Anwendung dieser Vorschrift liefert z. B. das 49-zellige Quadrat der Fig 20.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Fig. 20

Der Beweis, den wir nun für die Richtigkeit dieser Methode, also dafür, daß sie wirklich ein magisches Quadrat liefert, geben wollen, findet im wesentlichen auch zugleich auf die zuvor beschriebene Methode des Moschopulos Anwendung, und wir beschränken uns deshalb darauf, dort, wo der Beweisgang des Moschopulosschen Verfahrens Abweichungen von dem unseren erfordert, dies in Fußnoten anzumerken[3])

1) Siehe Laloubère, l c, Ausg Amsterdam, t II, p. 237 ff; Ausg Paris, t. II, p 298 ff. Übrigens lernte der französische Diplomat die Methode nicht während seines kurzen Aufenthalts in Indien, sondern auf der Rückreise von dort, und zwar durch einen Europäer, kennen

2) Diese Regel gilt auch nur für ungerade Zellenzahl. Nach Laloubère sollen die Inder zwar auch ein Verfahren für gerade Zellenzahl besessen haben, doch wußte sein Gewährsmann (s. die vorige Anm.) ihm dasselbe nicht anzugeben, so daß er hierüber nur Vermutungen ausspricht (l. c. p. 273)

3) Wir haben die beiden Vorschriften, die des Moschopulos und die der Inder, genau in der historisch überlieferten Fassung beibehalten,

Der Beweis für das Verfahren der Inder kann nun so geführt werden: Die Anzahl der Felder einer Reihe des Quadrats sei $n = 2m + 1$ (ungerade). Wir denken uns die einzuordnenden Zahlen $1, 2 \ldots n^2$ wieder, wie in § 2, durch n-er und Einer dargestellt, also folgendermaßen:

$$\begin{array}{ccc}
0+1, & 0+2 \cdots & 0+n \\
n+1, & n+2 \cdots & n+n \\
2n+1, & 2n+2 \cdots & 2n+n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
(n-1)n+1, & (n-1)n+2 \cdots & (n-1)\,n+n
\end{array}$$

und bezeichnen die hier in je einer Zeile geschriebenen Zahlen kurz als eine „n-ade“ Bei der indischen Methode sind nun diejenigen Linien des Quadrats ausgezeichnet, die parallel zu der von unten links nach oben rechts (/) gehenden Diagonale verlaufen[1]); wir wollen diese Diagonale hier, wie auch weiterhin, die „rechte“ Diagonale nennen und demzufolge die andere Diagonale die „linke“, indem wir uns jede Diagonale von unten nach oben verlaufend denken und sie nach ihrem Zielpunkt benennen Unser Verfahren involviert nun offenbar, daß die Zahlen einer n-ade gerade in die n Zellen einer solchen gebrochenen Diagonale / kommen, und, da von diesen n Zellen nie 2 derselben Zeile oder Spalte angehören, so gelangt jeder n-er offenbar je einmal in jede Zeile und in jede Spalte Die n-er der verschiedenen Zeilen gehen also dadurch auseinander hervor, daß die der obersten Zeile um eine Stelle nach links[2]) zyklisch verschoben werden, um so die der nächsten zu ergeben (s. Fig. 20). Auf ein bereits besetztes Feld stößt man bei Befolgung der Vorschrift offenbar immer dann und nur dann, wenn gerade eine n-ade untergebracht ist; denn so lange finden die Zahlen eben

haben also auf einen Versuch, beide Verfahren einander zu adaptieren, von vornherein verzichtet.

1) Bei dem Verfahren des Moschopulos sind es die diagonal verlaufenden Linien der anderen Richtung.

2) „Nach rechts“ bei dem anderen Verfahren; s Fig. 19

auf den Zellen einer gebrochenen Diagonale Platz. Die letzte Zahl einer n-ade grenzt in ihrer diagonalen Linie wieder an die erste Zahl ihrer n-ade, und unter jene[1]) kommt nun die erste Zahl der nächsten n-ade, so daß die Anfangszahlen zweier benachbarter n-aden zu einander stehen, wie a und b in Fig. 21, wobei a die Anfangszahl der früheren der beiden n-aden ist (falls der Raum nicht mehr gestattet, von a zu einem b durch einen solchen „Springerzug“ (s. Bd. I, S. 325) zu gehen, ist natürlich an die unterste Zeile die oberste wieder anschließend zu denken und ebenso an die äußerste Spalte links die letzte rechts).[2]) Die ersten Zahlen der verschiedenen n-aden sind nun dadurch charakterisiert, daß ihr Einer stets 1 ist. Man sieht also aus Fig. 21, daß der Einer 1 von einer n-ade zur nächsten um eine Spalte nach links rückt, mithin jede Spalte gerade eine 1 erhält. Andererseits erhält aber auch jede Zeile gerade eine 1, weil die 1 immer um zwei Zeilen[3]) nach unten rückt und dieser Zyklus wegen der ungeraden Anzahl der Zeilen sich nicht eher schließt, als bis jede Zeile gerade einmal vorgekommen ist. Da nun mit der ersten Zahl einer n-ade auch die übrigen entsprechend festgelegt sind, so findet zwischen irgend zwei „entsprechenden“ Zahlen zweier benachbarter n-aden auch gerade die Lagenbeziehung der Fig 21 statt[4]), und wir folgern daraus, daß jeder Einer in jeder Zeile wie Spalte gerade einmal vorkommt. Damit ist aber das Auftreten der magischen Konstanten für alle Zeilen und Spalten erwiesen.

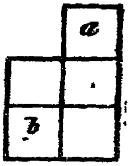


Fig 21.

Aber auch für die rechte Diagonale ergibt sich ohne weiteres, daß ihre Zahlensumme die magische Konstante ist; ist diese Hauptdiagonale doch nur ein Spezialfall einer gebrochenen Diagonale ╱. Nach unserem Verfahren umfaßt sie daher eine volle n-ade und zwar gerade die mittlere, die $(m+1)$-te n-ade Wegen

1) „Zwei Felder unter jene“ bei dem anderen Verfahren.

2) Für das andere Verfahren ist die Lage von a und b die der nebenstehenden Fig 22

3) „Um eine Zeile“ bei dem anderen Verfahren.

4) „Fig 22“ für das andere Verfahren.

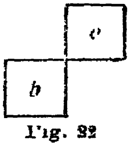


Fig. 22

des besonderen Platzes (Mittelfeld der obersten Zeile), den unsere Vorschrift der Zahl 1 anwies, gelangt man nämlich, wenn man gemäß Fig. 21 von der Zahl 1 sukzessive zu den Einern der folgenden n-aden fortschreitet, in m solchen Springerzügen gerade auf das Eckfeld unten links, so daß also dort die $(m+1)$-te n-ade ihren Anfang nehmen muß, um dann die ganze rechte Diagonale auszufüllen. Da diese mittlere n-ade als Zahlensumme die magische Konstante ergibt, so ist nunmehr erwiesen, daß die rechte Diagonale jedenfalls unserer Forderung genügt.[1])

Hiernach haben wir nur noch die andere („linke")[2]) Diagonale zu betrachten: Von ihr stellen wir zunächst fest, daß die n-er ihrer Zellen, von oben nach unten gerechnet, der Reihe nach dieselben sind, die in der obersten Zeile in deren 1., 3, 5., 7. . . ., 2., 4., 6. . . . Zelle vorkommen. Diese Reihe schließt sich aber, da n ungerade, nicht, bevor alle n Zahlen erschöpft sind, und es folgt so, daß alle n-er in der linken Diagonale vorkommen, da sie ja alle in der obersten Zeile vertreten sind. Um auch über die Einer unserer Diagonale Aufschluß zu erhalten, rekurrieren wir einen Augenblick auf Fig. 21 und bemerken, daß in die Zelle unter a die Zahl $b+1$ und dann rechts von a die Zahl $b+2$ kommen würde, wobei wir uns jetzt unter a und b irgend zwei „entsprechende", d h in den Einern übereinstimmende Zahlen benachbarter n-aden vorstellen dürfen. Da der Einer von $b+1$ nun um 1, der von $b+2$ um 2 größer als der von a ist, so erkennt man, daß die Einer in jeder Spalte von oben nach unten um je 1 und in jeder Zeile von links nach rechts um je 2 wachsen, wobei natürlich stets, wenn hierbei der Wert n überschritten wird, der Rest nach n zu nehmen ist. Dann wachsen aber in der linken Diagonale, die sozusagen die Resultierende der beiden vorigen Fortschreitungsrichtungen darstellt, die Einer von oben nach unten um je 3 Ist nun n nicht durch 3 teilbar, so enthält also auch diese Diagonale alle Einer, und der verlangte Beweis

1) Auch dieser Absatz überträgt sich mutatis mutandis auf das andere Verfahren; natürlich handelt es sich dort nicht um die rechte, sondern um die linke Diagonale.

2) Für das andere Verfahren natürlich: die rechte Diagonale

ist erbracht. — Ist aber n durch 3 teilbar, so enthält die Diagonale offenbar nur $\frac{n}{3}$. verschiedene Einer, jeden 3-mal. Hierfür ist nun wesentlich, daß, bei der Mittelstellung der Zahl 1 in der obersten Zeile und bei der Zunahme der Einer um je 2 von links nach rechts, in der Ecke oben rechts (m Zellen von 1 entfernt) sich eine Zahl mit dem Einer $1 + 2m = n$ befinden muß. Wenn aber das Eckfeld oben rechts den Einer n hat, so hat die Ecke oben links, die doch als rechte Nachbarin von jener anzusehen ist, eine Zahl mit dem Einer 2. Die in unserer linken Diagonale je dreimal vorkommenden Einer sind also $2, 5, \ldots n-1$, und diese geben, dreimal genommen, offenbar dieselbe Summe wie alle Einer, je einmal genommen. Damit ist auch für ein durch 3 teilbares n der Beweis erbracht.[1])

II. Bachets Terrassenmethode.

Bachet de Méziriac hat in seinen „Problèmes plaisants et délectables" eine Methode zur Bildung ungeradzelliger Quadrate angegeben[2]), die er an den Fällen $n = 3$ und $n = 5$ demonstriert. Er schreibt dabei die in Frage kommenden Zahlen zunächst in ihrer natürlichen Reihenfolge hin und zwar unter Benutzung eines Feldernetzes, das unsere Fig. 23 (nebst den bereits eingetragenen Zahlen) für den zweiten jener Fälle ($n = 5$) zur Anschauung bringt. Nennt man mit Siegmund Günther, der diese Methode Bachets mit dem anschaulichen Namen

1) Auf das Verfahren des Moschopulos finden die Ausführungen dieses Absatzes keine Anwendung, vielmehr liegt die Sache dort so, daß in das Eckfeld oben rechts infolge der Vorschrift über die Stellung von 1 die Zahl $m + 1$, die mittlere Zahl der ersten n-ade, gelangt. Alsdann wird aber die mittlere Zahl der zweiten n-ade gerade das anschließende Feld der rechten Diagonale einnehmen (vgl. Fig. 22), und so geht dies fort. Die rechte Diagonale wird also ganz mit den Mittelzahlen der verschiedenen n-aden ausgefüllt, und deren Summe ist offenbar die magische Konstante (vgl. a. Fig. 4a und 5 linke Diagonale).

2) Bachet, 2. Aufl. 1624, Probl. XXI, p. 161—169; 4. Ausg. (A. Labosne), 1879, p. 88ff.

„Terrassenmethode" bezeichnet hat[1]), die Teile der Figur, die außerhalb des (in unserer Fig. 23 durch stärkere Randlinien gekennzeichneten) 25-zelligen Quadrats liegen, „Terrassen", so läßt sich die Vorschrift Bachets mit folgenden Worten aussprechen: *Man verschiebt die Terrassen parallel mit sich, bis ihre Basis (die Quadratseite, auf der sie stehen) mit der gegenüberliegenden Quadratseite zusammenfällt.* Hierdurch gelangen die außerhalb des Quadrats stehenden Zahlen in die noch leeren Zellen des Quadrats, und es entsteht ein magisches Quadrat (Fig. 24).

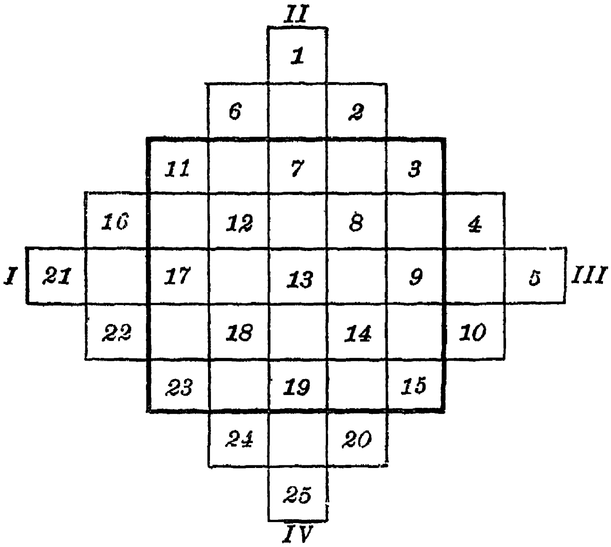


Fig 23

Genau dasselbe Quadrat nun würde uns die oben (S. 22) angegebene Methode des Moschopulos geliefert haben. Das Verdienst Bachets besteht also nicht darin, magische Quadrate von neuer Struktur gefunden zu haben, sondern nur darin, diese besondere, im Gebrauch bequeme Fassung der Bildungsvorschrift gegeben zu haben.[2])

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Fig 24

Will man für das Verfahren Bachets, ohne auf seine Identität mit der ersten Methode des Moschopulos zurückzu-

1) Siehe S. Günther, „Vermischte Untersuchungen" . ., p. 204 u. 231.

2) Wie A. Labosne in seiner Bachet-Ausgabe (1879), p. 92, Anm., angibt, findet sich in einem Werke des Diego Palomino, das 1599 in Madrid erschienen ist, bereits „die Figur Bachets und die Konstruktion magischer Quadrate bis zu $n = 16$" Mir war dies Werk trotz An-

greifen, einen Beweis geben, so läßt sich dieser leicht folgendermaßen führen: Nehmen wir allgemein ein Quadrat von n^2 Zellen an, so kommen in die Zellen der „linken" Diagonale offenbar gerade die Zahlen der mittleren n-ade; diese Diagonale genügt also jedenfalls der gestellten Bedingung. Die andere Diagonale bekommt dagegen offenbar aus jeder n-ade gerade die mittlere Zahl und genügt daher auch unserer Forderung (vgl. S. 27, Anm. 1). Wir wollen nun die 4 Terrassen, wie in Fig. 23 angegeben, durch I, II, III, IV unterscheiden und wollen weiter die Spalten des n^2-zelligen Quadrats von links nach rechts mit $1, 2, \ldots n$ bezeichnen, wobei wir die Zellen der Terrassen II und IV in die betreffenden Spalten miteinrechnen; ferner mögen die Spalten der Terrasse I von links nach rechts mit $-(m-1), -(m-2), \cdots -1, 0$ bezeichnet werden, wenn $n = 2m + 1$ ist, und die der Terrasse III mit $n+1, n+2, \cdots n+m$. Alsdann stellen sich die Spalten der Zahlen irgendeiner n-ade offenbar durch n aufeinanderfolgende Zahlen dar, so z. B in Fig 23 die der vierten n-ade durch 0, 1, 2, 3, 4; und diejenigen Zahlen, deren Spaltennummer zwischen 1 und n einschließlich der Grenzen liegt, behalten dieselbe auch bei ihrem etwaigen späteren Einrücken in eins der n^2 Felder, während die Spaltennummern jenseits dieser Grenzen sich bei dieser Verschiebung um n vergrößern oder verkleinern, so zwar, daß die neuen Spaltennummern stets innerhalb der Grenzen 1 und n (mit Einschluß dieser) liegen. Dann müssen aber die neuen Spaltennummern für die Zahlen einer n-ade offenbar stets die Zahlen $1, 2, \ldots n$ sein, wenn auch in zyklischer Vertauschung, oder mit anderen Worten: von den Zahlen einer n-ade gehören auch nach der Terrassenverschiebung nie zwei derselben Spalte an Entsprechend können wir offenbar zeigen, daß zwei Zahlen derselben n-ade auch nach der Terrassenverschiebung nie derselben Zeile angehören, und weiter, wenn wir die Zahlen nicht zu n-aden zusammenfassen, sondern immer diejenigen, in denen die-

rufung des Auskunftsbureaus der Deutschen Bibliotheken bisher unzugänglich, und ich muß daher auf jede weitere Erörterung der Frage, ob dort wirklich die Methode Bachets gegeben ist und dieser von dem Werk Palomino's abhangig sein kann oder wird, verzichten

selben „Einer“ vorkommen, d. h. die Zahlen der zu der „rechten“ Diagonale parallelen Reihen, zusammennehmen, ergibt sich, daß nie zwei Zahlen mit gleichen Einern derselben Zeile oder Spalte angehören. Damit ist dann gezeigt, daß in jeder Zeile und Spalte jeder Einer, wie jeder n-er gerade einmal vorkommt, womit unsere Bedingungen alle erfüllt sind.

Man erkennt unschwer, daß man die Zahlen jeder n-ade auch in irgendeiner anderen Reihenfolge in die schrägen Linien unseres Feldernetzes (Fig. 23) einordnen darf mit Ausnahme der mittleren Zahl, die in ihrer n-ade stets den mittleren Platz behalten muß; nur müssen die Vertauschungen für alle n-aden gleichmäßig gemacht werden.

				19				
			4		16			
		14		1		18		
	24		11		3		20	
9		21		13		5		17
	6		23		15		2	
		8		25		12		
			10		22			
				7				

Fig. 25

14	10	1	22	18
20	11	7	3	24
21	17	13	9	5
2	23	19	15	6
8	4	25	16	12

Fig. 26

Ebenso dürfen die verschiedenen n-aden — mit Ausnahme der mittleren — beliebig miteinander vertauscht werden.[1]) Unsere Fig. 25 gibt ein Beispiel einer solchen Anordnung mit gleichmäßiger Vertauschung der Einer in allen n-aden und Vertauschung der n-aden untereinander, wobei jedoch gebotenermaßen die mittleren Einer wie die mittlere n-ade von den Vertauschungen unberuhrt geblieben sind. Das daraus hervorgehende magische Quadrat (Fig. 26) besitzt die

1) Diese Modifikation der Bachetschen Methode lehrten Frénicle de Bessy († 1675), l. c. (1693), p. 427 ff. und Laloubère, l. c. t. II (1691), Ausg. Paris, p. 314 f.

in unserer Figur durch gestrichelte Linien hervorgehobene Besonderheit, daß die ungeraden Zahlen für sich ein Quadrat in dem ganzen Quadrat bilden[1]), eine Eigenschaft, die für $n = 5$ wohl nur dieses eine Quadrat aufweist.

III. Moschopulos' Springer-Methode.

Der schon oben erwähnte Traktat des Moschopulos gibt außer der besprochenen noch eine zweite Methode für ungerades n, die folgende nämlich:

Man setze die Zahl 1 in die Mittelzelle der obersten Zeile des Quadrats und gehe sodann von hier um eine Spalte nach rechts und in dieser um 2 Zeilen nach unten, setze in die betreffende Zelle die Zahl 2 und fahre darauf beständig in gleicher Weise fort. Kommt man dabei an eine schon besetzte Zelle, so gehe man von der zuletzt ausgefüllten in derselben Spalte um 4 Felder weiter nach unten und besetze die so erhaltene Zelle mit der fälligen Zahl.

Dabei ist für alle diese Züge die Vorstellung zugrundezulegen, daß an die unterste Zeile sich wieder die oberste und an die Randspalte rechts sich wieder die linke Randspalte anschließt

Für ein 49-zelliges Quadrat beispielsweise erhält man so die Anordnung der Fig. 27, die sich in der Abhandlung des Moschopulos als dessen 8 Figur findet[2])

38	14	32	1	26	44	20
5	23	48	17	42	11	29
21	39	8	33	2	27	45
30	6	24	49	18	36	12
46	15	40	9	34	3	28
13	31	7	25	43	19	37
22	47	16	41	10	35	4

Fig 27

Daß dies Verfahren in der Tat ein magisches Quadrat liefert, erkennt man leicht folgendermaßen: Den Zug, vermöge

1) Mit der allgemeinen Herstellung solcher Quadrate („Magic squares with the odd numbers in sequential series“) nach verschiedenen Methoden beschäftigt sich Harry A Sayles in The Monist 21, 1911, p. 155—158.

2) Siehe S. Günther, l c. Fig. 8. Die drittletzte Zahl der vorletzten Zeile dort ist in $\mu\gamma$ (= 43) zu verbessern

dessen man von einem Felde zum anderen fortschreitet, wollen wir kurz „Springerzug"[1]), den bei Auftreffen auf ein schon besetztes Feld zur Anwendung gelangenden Zug dagegen „Hilfszug" nennen. Die Spalten des Quadrats mögen von links nach rechts durch 1, 2, ... n und die Zeilen, von oben nach unten gerechnet, ebenso unterschieden werden; hiernach wollen wir ein einzelnes Feld in der Form a, b charakterisieren, wobei a die Spalten- und b die Zeilennummer bedeuten soll. Besetzt man nun eine beliebige Zelle a, b des im übrigen noch als ganz leer gedachten Quadrats mit der ersten Zahl irgendeiner n-ade, also mit der Zahl $pn + 1$, und setzt darauf die nachfolgenden Zahlen derselben n-ade unserer Vorschrift gemäß, d. h vermöge „Springerzuges", in die ihnen gebührenden Zellen, so kommt die Zahl $pn + 2$ in die Zelle $a + 1, b + 2$, die Zahl $pn + 3$ in die Zelle $a + 2, b + 4$ usw. Offenbar verteilen sich so die n Zahlen unserer n-ade über n verschiedene, d. h. über alle Spalten: $a, a + 1, a + 2, \cdots n, 1, 2, \cdots a - 1$, und, da n und 2 relativ prim sind, auch über alle n Zeilen: $b, b + 2, b + 4, \cdots b - 4, b - 2$. Der nächste, also der n-te, Springerzug dagegen würde offenbar sowohl für die Spalten, wie für die Zeilen den Zyklus schließen, und die Zahl $pn + n + 1$ somit auf das Feld a, b kommen, wenn dieses nicht schon durch $pn + 1$ besetzt wäre. Von dem Feld der letzten Zahl $(pn + n)$ der n-ade kann man also durch den „Springerzug" zu dem Feld der ersten Zahl $(pn + 1)$ der n-ade gelangen, so daß die gegenseitige Lage die in Fig. 28 angegebene ist und $pn + n + 1$, die erste Zahl der folgenden n-ade, vermöge des „Hilfszuges" in der durch Fig. 28 dargestellten Weise gesetzt werden muß. Daraus ersieht man denn zugleich, daß auch $pn + n + 1$, die erste Zahl der neuen n-ade, noch mit Sicherheit ein freies Feld vorfindet: Um ihren

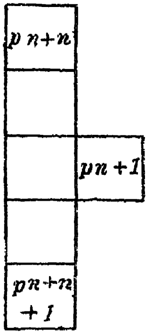


Fig 28

1) Dabei wollen wir denn in diesem Abschnitt unter „Springerzug" nicht etwa einen beliebigen Zug des Springers, sondern stets nur unseren besonderen Springerzug: „eine Spalte nach rechts, zwei Zeilen nach unten", verstehen

Platz zu bestimmen, mußte man von $pn + n$ um 4 Felder nach unten innerhalb derselben Spalte fortschreiten, und dieser Zug führt, da n ungerade ist, keinesfalls zu $pn + n$ zurück; andererseits ist aber $pn + n$ die einzige Zahl ihrer n-ade in dieser Spalte

Fassen wir die so gewonnenen Ergebnisse zusammen, so dürfen wir sagen: Jede n-ade, die nach der Vorschrift des Moschopulos in die Quadratzellen gesetzt wird, bildet einen Zyklus, der sich dann und erst dann schließt, wenn die letzte Zahl der n-ade gesetzt ist. Dabei empfängt jede Zeile wie auch jede Spalte des Quadrats gerade eine und auch nur eine Zahl der n-ade. Auch die erste Zahl der folgenden n-ade findet das ihr nach der Vorschrift des Moschopulos zustehende Feld noch unbesetzt vor. — Bei alledem setzten wir freilich voraus, daß das ganze Quadrat noch leer sein sollte, wenn mit dem Setzen der Zahlen unserer n-ade begonnen wird, und diese Voraussetzung ist in Wirklichkeit, wenn wir nämlich die Regel des Moschopulos praktisch für Bildung eines magischen Quadrats anwenden wollen, nur für die erste n-ade erfüllt, während für die weiteren n-aden aus unseren vorstehenden Betrachtungen sich zunächst nur folgendes ergibt: Eine Zahl irgendeiner n-ade stößt bei fortgesetzter Anwendung des „Springerzuges" sicherlich nicht auf ein Feld, das bereits mit einer Zahl derselben n-ade besetzt ist. Dagegen bedarf die Frage, ob eine Zahl der zweiten oder einer späteren n-ade nicht möglicherweise auf ein mit einer Zahl einer früheren n-ade bereits besetztes Feld stoßen kann, noch einer kurzen Betrachtung, die wir jetzt anstellen wollen.

Da wir mit Sicherheit wissen, daß jedenfalls die ganze erste n-ade und die erste Zahl der zweiten der Vorschrift gemäß gesetzt werden können, ohne daß man auf ein bereits besetztes Feld stößt, so dürfen wir von der Voraussetzung ausgehen, daß p n-aden ($p \geqq 1$) und außerdem die erste Zahl der folgenden n-ade vorschriftsgemäß untergebracht sind. Dann finden aber, so behaupten wir, auch die anderen Zahlen dieser nächstfolgenden n-ade bei Anwendung des „Springerzuges" leere Zellen vor Würde uns nämlich der „Springerzug" auf ein bereits besetztes Feld, und zwar zum ersten Male innerhalb unserer n-ade

etwa nach Verlassen des Feldes von $pn + l$, führen und wäre dieses neue Feld etwa mit der Zahl r besetzt, so müßte diese Zahl r, da der Zyklus unserer $(p + 1)$-ten n-ade sich, wie wir wissen, erst nach Erschöpfung der n-ade schließt, notwendig einer früheren n-ade angehören. Dieses Feld r ist nun vermöge „Springerzuges" von $r - 1$ aus besetzt worden oder, falls r etwa das erste Feld einer n-ade sein sollte, so ist dies Feld r jedenfalls vermöge desselben „Springerzuges" von $r + n - 1$, dem letzten Felde der n-ade, aus erreichbar. Wenn nun der „Springerzug" von $pn + l$ zu r führt, so führt mithin der umgekehrte Springerzug von r zu $pn + l$; dieser inverse Springerzug führt aber auch, wie wir soeben festgestellt haben, von r zu $r - 1$ resp. in dem besonderen Falle zu $r + n - 1$. Daraus folgt, daß das Feld $pn + l$ mit Feld r resp. Feld $r + n - 1$, also jedenfalls mit einem anderen Felde, identisch ist, also auch die Zahl $pn + l$ entgegen unserer Voraussetzung bereits auf ein besetztes Feld gestoßen war. Die Annahme, daß wir beim Verlassen des Feldes $pn + l$ auf ein bereits besetztes Feld geführt werden könnten, führt uns mithin zu einem Widerspruch mit unseren Voraussetzungen, und wir sehen daraus, daß, wenn die erste Zahl der $(p + 1)$-ten n-ade noch untergebracht werden konnte, dies auch bei allen folgenden Zahlen derselben n-ade noch möglich ist

Läßt sich so die ganze $(p + 1)$-te n-ade unterbringen, so auch die erste Zahl der folgenden, also $(p + 2)$-ten n-ade Denn das dieser ersten Zahl der $(p + 2)$-ten n-ade, d. h. der Zahl $pn + n + 1$, gebührende Feld liegt zu dem Feld der ersten Zahl der $(p + 1)$-ten n-ade, also zu $pn + 1$, so, wie unsere Fig. 28 zeigt. Überhaupt kennzeichnet die Lage dieser beiden Felder unserer Figur offenbar die Lage von irgendzwei einander entsprechenden Zahlen zweier aufeinanderfolgender n-aden, wobei wir unter „entsprechenden" Zahlen wieder solche von demselben Einer verstehen Wenn nun das Feld $pn + n + 1$ bereits mit einer anderen Zahl, etwa k, besetzt wäre, so müßte diese Zahl k, da in ihrer Spalte aus der $(p + 1)$-ten n-ade nur die Zahl $pn + n$ vorkommt, der p-ten oder einer früheren, also etwa der q-ten n-ade $(q \leqq p)$, angehören. Wenn aber das Feld $pn + n + 1$ mit

einer Zahl der q-ten n-ade besetzt wäre, so müßte die „entsprechende“ Zahl der $(q-1)$-ten n-ade das Feld $pn+1$ einnehmen, d. h. dieses wäre entgegen unserer Voraussetzung doppelt besetzt (q war $\leqq p$, also $q-1$ jedenfalls $< p+1$). So kommen wir zu der Schlußfolgerung, daß auch $pn+n+1$ ein leeres Feld vorfindet. Nicht mehr stringent freilich ist dieser Schluß für den Fall, daß $q=1$, d. h. $q-1=0$ ist, also das Feld $pn+n+1$ mit einer Zahl der ersten n-ade besetzt wäre. Nun sieht man aber leicht, daß die Anfangszahlen der verschiedenen n-aden nie mit einer Zahl der ersten n-ade zusammengeraten können: die Plätze der ersteren ergeben sich aus dem Platz der Zahl 1, den wir in unserer Feldernotation mit a, b bezeichnen wollen, zufolge Fig. 28 als: $a-i,\ b+2i$ $(i=0,1,\cdots n-1)$, während die Plätze der Zahlen der ersten n-ade $a+k$, $b+2k$ $(k=0,\ 1,\cdots n-1)$ sind. Die Bedingungen des Zusammenfallens für einen der ersteren mit einem der letzteren wären dann:

$$k \equiv -i \bmod n$$

$$2k \equiv 2i \bmod n,$$

woraus folgt:

$$4k \equiv 0 \bmod n,$$

also, da n ungerade:

$$k = 0.$$

Es kommt somit nur der Fall $k=0$, also das Feld der Zahl 1 selbst, in Betracht; für $k=0$ ist aber auch $i=0$ oder, wenn wir wollen: $i=n$, d. h. erst nach n vollen n-aden, also nach Unterbringung aller Zahlen, tritt der Fall ein, daß die erste Zahl einer n-ade mit einer Zahl der ersten, nämlich 1, zusammentrifft; dies bedeutet, daß nach Ausfüllung des ganzen Quadrats sich der Zyklus schließt, man also von dem Felde n^2 durch den „Hilfszug“ wieder zu 1 gelangen würde.

Damit ist gezeigt, daß bei dem angegebenen Verfahren sich für alle Zahlen stets leere Plätze ergeben. Ferner sahen wir, daß zwei Zahlen derselben n-ade nie derselben Zeile oder Spalte angehören. Dies können wir offenbar ganz analog von irgend 2 „entsprechenden“ Zahlen verschiedener n-aden beweisen, da ja die Reihen von je n „entsprechenden“ Zahlen durch fortgesetzte

Anwendung des Zuges, der in Fig. 28 von $pn+1$ zu $pn+n+1$ führt, auseinander hervorgehen, und für diesen Zug mutatis mutandis offenbar dasselbe gilt wie für unseren bisherigen „Springerzug". Somit können wir jetzt sagen: Jede Zeile, wie Spalte enthält lauter verschiedene n-er, wie Einer und genügt damit der gestellten Bedingung.

Dasselbe gilt nun auch von den Diagonalen, und zwar, wenn n nicht durch 3 teilbar ist, auch von allen gebrochenen Diagonalen. Steht nämlich die Anfangszahl einer n-ade auf dem Platz a, b, so stehen, wie schon mehrfach bemerkt wurde, die anderen Zahlen der betreffenden n-ade auf den Plätzen $a+k$, $b+2k$ $(k=0, 1, 2, \cdots n-1)$; sollen nun zwei dieser Zahlen auf derselben Diagonale (Haupt- oder gebrochenen Diagonale) liegen, so müßte, wenn $a+k$, $b+2k$ und $a+k'$, $b+2k'$ ihre Plätze sind, offenbar $k-k' \equiv \pm(2k-2k') \bmod n$ sein, was jedoch bei zwei verschiedenen Zahlen k und k' nur möglich ist, wenn n durch 3 teilbar ist. Ganz analog folgt dies für 2 „entsprechende" Zahlen verschiedener n-aden, d. h. für zwei Zahlen von gleichen Einern, und wir können daher sagen: die Hauptdiagonalen, sowie jede gebrochene Diagonale enthalten — abgesehen von dem angegebenen Ausnahmefall: n durch 3 teilbar — jeden Einer, wie jeden n-er gerade einmal (vgl hierzu Kap. XIII, S. 66—67). Ein solches Quadrat, das unserer Bedingung nicht nur in den Zeilen, Spalten und Hauptdiagonalen, sondern auch in allen gebrochenen Diagonalen genügt, wollen wir ein pandiagonales[1]) magisches Quadrat nennen.[2])

1) Dieser Ausdruck findet sich wohl zuerst bei E. Mc Clintock, „On the most perfect forms of magic squares", Amer J of Mathem XIX, 1897, p. 99 Über andere konkurrierende Bezeichnungen s S 40/41, Anm 2

2) In dem Falle „n nicht durch 3 teilbar" hätte man übrigens bei Herstellung des Zahlenquadrats fur die Zahl 1 ein ganz beliebiges Feld wählen dürfen und hatte doch ein magisches Quadrat erhalten. In der Tat haben wir hier bei dem Beweise, daß das Quadrat magisch bzw pandiagonal-magisch ist, von der Tatsache, daß 1 im Mittelfelde der obersten Zeile steht, keinerlei Gebrauch gemacht Vielmehr wird diese besondere Lage der Zahl 1 erst jetzt weiter unten — in dem Ausnahmefalle eines durch 3 teilbaren n, und zwar dort hinsichtlich der Diago-

Ist n dagegen durch 3 teilbar, so sind bezüglich der Diagonalen noch einige weitere Ausführungen erforderlich. Zunächst wollen wir die n Diagonalen jeder der beiden Richtungen als $1, 2, \cdots n$ unterscheiden und zwar in dem System $\diagup$, je nachdem ihnen die Felder $1, 2, \cdots n$ der obersten Zeile, und in dem System $\diagdown$, je nachdem ihnen die Felder $1, 2, \cdots n$ der ersten Spalte angehören, beide Male nach der hier gebrauchten Feldernotation gerechnet. In dem System $\diagup$ hat die Hauptdiagonale also die Nummer n und die zu ihrer Linken liegende diagonale Linie die Nummer $n - 1$, während sich zu ihrer Rechten an sie diagonale Linien anschließen, die sukzessive zu den Diagonalen $1, 2, \cdots$ gehören; es folgt also, was zu beachten ist, auf n wieder 1. In dem anderen System ist es analog. — Durch bloße Betrachtung der Figur 27 sieht man nun sofort, daß die Diagonalen $\diagup$, denen zwei aufeinanderfolgende Zahlen derselben n-ade angehören, sich bei unserer Numerierung um 3 unterscheiden. Gehört also, wie wir ja für diesen Fall ausdrücklich festsetzten, die Zahl 1 der Diagonale $m + 1$ an ($n = 2m + 1$), so die Zahl 2 der Diagonale $m + 4$, die Zahl 3 der Diagonale $m + 7$ usw. Wegen der Teilbarkeit von n durch 3 schließt sich aber diese Reihe bereits nach der Zahl $\frac{n}{3}$, und die Zahlen einer n-ade verteilen sich daher nicht auf alle n Diagonalen $\diagup$, sondern nur auf $\frac{n}{3}$ derselben, indem in jede dieser $\frac{n}{3}$ Diagonalen 3 Zahlen der betreffenden n-ade gelangen. Jede Diagonale $\diagup$ weist also nur $\frac{n}{3}$ verschiedene n-er auf, jeden derselben dreimal,

nalen, — sich als wesentlich erweisen. Aus Gründen historischer Treue haben wir hier jedoch die Vorschrift genau in der Form des **Moschopulos**schen Traktats beibehalten; diese Form besitzt ja jedenfalls den Vorzug, allgemein für jedes ungerade n, also auch für ein durch 3 teilbares, gültig zu sein. Will man andererseits aber die Vorschrift von etwas im allgemeinen offenbar Überflüssigem befreien, so würde sie, wie gesagt, so lauten müssen, daß bei einem durch 3 nicht teilbaren n die Zahl 1 in ein beliebiges Feld gesetzt wird und nur bei einem durch 3 teilbaren n in ein besonderes, etwa das von **Moschopulos** vorgeschriebene.

und zwar, wie man leicht erkennt, so, daß, wenn $i \,.\, n$ der kleinste dieser n-er ist, die übrigen $(i + 3)n$, $(i + 6)n$ usw. sind. Die Figuren 27 und 28 zeigen uns weiter, daß je 2 „entsprechende“ Zahlen aufeinanderfolgender n-aden solchen Diagonalen ╱ angehören, die in unserer Numerierung sich nur um 1 unterscheiden. Daraus folgt aber, daß ein System von n „entsprechenden“ Zahlen aller n-aden sich auf n verschiedene Diagonalen ╱ verteilt, daß also die Zahlen jeder einzelnen dieser Diagonalen alle n verschiedenen Einer aufweisen. Ferner ist aus Fig. 28 in Verbindung mit Fig. 27 ersichtlich, daß infolge der besonderen Unterbringung der Zahl 1 die Zahl $m \cdot n + 1$ in das Eckfeld unten links gelangt Wenn aber die „rechte“ Hauptdiagonale den n-ner $m \,.\, n$ besitzt, so ist nach Obigem die Reihe ihrer n-er: $\cdots (m - 6)n$, $(m - 3)n$, $m \cdot n$, $(m + 3)n$, $(m + 6)n \cdots$, von denen jeder dreimal vorkommt. Da nun n durch 3 teilbar ist, also m eine Zahl von der Form $3p + 1$ sein muß, so ist der kleinste n-er dieser Reihe $1 \,.\, n$ und der größte $(n - 2)n$. Die Reihe dieser n-er, jeder dreimal genommen, gibt aber dieselbe Summe wie die Reihe aller n-ner, jeder einmal genommen; z B. ist $3\,(1 \cdot 9 + 4 \cdot 9 + 7 \cdot 9) = 0 \cdot 9 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdots + 8 \cdot 9$ Nimmt man hierzu, daß, wie schon gesagt, die rechte Hauptdiagonale alle n Einer aufweist, so sieht man, daß sie der an sie gestellten Bedingung genügt, zugleich aber auch, daß nicht alle Diagonalen ╱, sondern nur der dritte Teil derselben diese Bedingung erfüllen Daß auch die linke Hauptdiagonale die magische Konstante, wie verlangt, aufweist, ergibt sich ganz analog, wenn man überall die Begriffe Einer und n-er vertauscht.

Die hier soeben behandelte „zweite“ Methode des Moschopulos ist ebenso, wie die anderen in diesem § besprochenen Methoden zur Bildung magischer Quadrate, sehr spezieller Natur: Vergleichen wir etwa diese Methode des Moschopulos mit derjenigen der Inder, so besteht, bei Übereinstimmung in dem Anfangsfelde (1), der Unterschied zwischen beiden im wesentlichen darin, daß Moschopulos nach dem „Springerzuge“, das indische

Verfahren nach der Läufergangart und zwar einem Läuferzuge kleinster Spannweite[1]), fortschreitet. Es liegt nun nahe, zu fragen, ob man nicht ebenso nach anderen Gangarten fortschreiten dürfe, ob man also beispielsweise nicht auch dann ein magisches Quadrat erhält, wenn man, statt mit Moschopulos um eine Spalte nach rechts und zwei Zeilen nach unten, immer um zwei Spalten nach rechts und drei Zeilen nach unten springt. Die Frage ist prinzipiell zu bejahen, und Voraussetzung ist dabei nur, daß zu dem „Hauptzuge" ein passender „Hilfszug"[2]) gewählt wird. Unter diesen allgemeineren Gesichtspunkten, unter Anwendung eines allgemeingehaltenen Haupt- oder „direkten" Zuges („direct step") und eines Hilfs- oder „Kreuzzuges" („cross step"), für die die näheren Bedingungen entwickelt werden, behandelt insbesondere die schon (S. 36, Anm. 1) zitierte Abhandlung von E. M^c Clintock (1897) das Problem der Bildung magischer Quadrate. Aber auch schon frühere Schriften, unter denen wir namentlich diejenigen von Hugel (1859 und 1876) und Barnard (1888), wie insbesondere eine Abhandlung von F Herrmann (1891), hervorheben, zeigen ähnliche Tendenzen einer Behandlung des Gegenstandes nach einfachen und allgemeinen Prinzipien.[3])

§ 4. Pandiagonale magische Quadrate.

Die pandiagonalen magischen Quadrate, von denen wir schon im letzten Abschnitt des vorigen § (S 36) sprachen, haben, wie leicht zu sehen, die besondere Eigenschaft, daß man ihre Zeilen und ebenso auch ihre Spalten in zyklischer Folge beliebig unter sich vertauschen darf, ohne daß das Quadrat aufhört,

1) Auch der „ersten" Methode des Moschopulos liegt ja dieser Fortschreitungsmodus zugrunde

2) Rekapitulierend bemerken wir, daß dieser „Hilfszug" bei den hier besprochenen Methoden in folgenden Formen vorkam· Methode der Inder: ein Feld nach unten; „erste" Methode des Moschopulos: zwei Felder nach unten; „zweite" Methode des Moschopulos: vier Felder nach unten

3) Siehe diese verschiedenen Arbeiten im literar. Index unter Nr. 239 u. 335 (Hugel), 462 (Barnard), 494 (Herrmann)

magisch (pandiagonal-magisch) zu sein. Man darf also, um dasselbe mit anderen Worten nochmals zu sagen, die äußerste Spalte rechts nach links vorn hinübersetzen und ebenso die umgekehrte Transposition vornehmen, und zwar ist jede dieser beiden Umstellungen auch in beliebiger Wiederholung zulässig, und Entsprechendes gilt auch für die Zeilen. Jede solche zyklische Vertauschung der Zeilen und Spalten verwandelt nämlich, während jede Zeile und jede Spalte als Ganzes natürlich unberührt bleibt, gebrochene Diagonalen in Hauptdiagonalen und umgekehrt, und aus diesem Grunde gestatten eben gewöhnliche magische Quadrate in der Regel solche Vertauschungen nicht.[1])

Im Grunde sind überhaupt erst diese pandiagonalen Quadrate die wirklich magischen Quadrate[2]); denn die übliche Art,

1) Ein gewöhnliches magisches Quadrat würde sich in der Regel bei einer solchen zyklischen Vertauschung in ein Quadrat verwandeln, das zwar natürlich noch in den Zeilen und Spalten, nicht aber in den beiden Hauptdiagonalen, die magische Konstante aufweist. Man nennt solche Quadrate, da sie nicht die vollen Bedingungen eines magischen Quadrats erfüllen, „semimagisch“ resp. „halbmagisch“. Solche semimagischen Quadrate sind uns bereits in Bd. I, Kap. XI, § 13, in den dort besprochenen „magischen Rösselsprüngen“, entgegengetreten (s. dort besonders S. 379). Ein semimagisches Quadrat geht übrigens, wie keiner Begründung bedarf, bei jeder ganz beliebigen Vertauschung der Zeilen oder der Spalten untereinander in ein Quadrat über, das mindestens wieder semimagisch, eventuell aber vollmagisch ist. Durch solche beliebigen Zeilen- und Spaltenvertauschungen ergeben sich somit aus jedem semimagischen Quadrat $(n!)^2 - 1$ andere semi- oder vollmagische Quadrate, während aus jedem pandiagonalen magischen Quadrat durch zyklische Zeilen- und Spaltenvertauschungen $n^2 - 1$ andere Quadrate derselben Kategorie hervorgehen.

2) Man hat daher diese Quadrate auch „vollständig“ (Hellerung, l. c. p. 44) oder „vollkommen“ („perfect“ bei Barnard in der schon zitierten Arbeit von 1888, p. 209; im Gegensatz dazu die gewöhnlichen mag. Quadr. „ordinary“) genannt. Der Name „pandiagonal“ (s. S. 36 nebst Anm. 1) oder auch „panmagisch“, wie G. Tarry (s. die unten: S. 42, Anm. 2, zitierte Arbeit, l. c. t. II, p. 130) sagt, scheint mir jedoch, da er bezeichnender ist, den Vorzug zu verdienen. Außer diesen Bezeichnungen findet man noch verschiedene andere: v. Pessl (literar. Index, Nr. 300), p. 4, sagt „gleichzeilig“; B. Portier in einer Schrift von 1902 (literar. Index, Nr. 512), p. 9, gibt verschiedene Namen an, unter denen

allein die Hauptdiagonalen zu berücksichtigen und damit die Gleichberechtigung der n^2 Felder des Quadrats aufzuheben, läßt sich kaum aus sachlichen, sondern, wie wir sogleich sehen werden, vorwiegend nur aus praktischen Gründen motivieren. Man braucht sich ja auch nur den oberen und den unteren Rand des Quadrats aneinandergeheftet, dieses also zu einem Zylindermantel umgewandelt[1]) zu denken[2]), um zwischen den vorher gebrochenen

der eines „zylindrischen" Quadrates durch den folgenden Satz unseres Textes verständlich wird; E. Lucas (s. „Récr. mathém.", I, 1882, Introduction, p. XVII) hat die Bezeichnung „diabolisch" eingeführt, ein Name, der zwar viel gebraucht wird, aber dennoch recht schlecht ist Überhaupt kann diese zumal von französischen Autoren für die Gebilde dieses Gebietes eingeführte Art von Terminologie nicht gerade glücklich genannt werden: neben den „carrés diaboliques" resp. den „teuflischen" oder „Teufelsquadraten", wie der französische Name wohl in der deutschen Literatur wiedergegeben wird, und den „semidiabolischen" oder „halbteuflischen" (sic!) Quadraten figuriert eine andere Unterart als „satanische" Quadrate und wieder eine andere als „kabbalistische" Quadrate. Dabei mag man den Namen „diabolisch" und „satanisch" noch zugute halten, daß jedermann sie wenigstens sogleich als das nimmt, was sie sind · als willkürlich und nichtssagend, während die Bezeichnung „kabbalistisch", wenn sie wirklich genommen wird, irreführend ist, gebührt dieser Name doch im Grunde den magischen Quadraten schlechtweg nach der astrologisch-kabbalistischen Theorie, die der Okkultismus um sie herumgewoben hatte (s hierüber die schon S 3, Anm. 4 zitierten Aufsatze des Verfassers), und jedenfalls nicht gerade jener besonderen Unterart von ihnen Was nun die Bedeutung dieser verschiedenen Termini betrifft, so werden als „semidiabolisch" solche magischen Quadrate bezeichnet, die nur zyklische Vertauschungen der Zeilen oder aber nur solche der Spalten gestatten „Satanisch" sodann heißen solche Quadrate, die in den Zeilen, Spalten und Hauptdiagonalen nicht nur dieselbe Zahlensumme, sondern in diesen Reihen auch dieselbe Summe der ins Quadrat erhobenen Zahlen ergeben, Gebilde, die sonst und zwar besser als „bimagisch" resp „magisch zu den beiden ersten Graden" bezeichnet werden Ist ein Quadrat „diabolisch" (pandiagonal) und „satanisch" (bimagisch) zugleich, ergibt es also in Zeilen, Spalten und allen Diagonalen dieselbe Zahlensumme und in den Zeilen, Spalten und Hauptdiagonalen dieselbe Summe der Zahlenquadrate, so heißt es „kabbalistisch".

1) Vgl auch Bd. I, S. 351.

2) Man kann natürlich mit F. Hermann (l. c. p. 119/120), um die Sonderstellung aller Randfelder zu beseitigen, auch zugleich die beiden

Diagonalen[1]) und den Hauptdiagonalen auch äußerlich volle Gleichberechtigung herzustellen.

So würde vielleicht das pandiagonale magische Quadrat schon in der früheren geschichtlichen Entwicklung, zum mindesten aber in neuester Zeit, sich als das eigentliche magische Quadrat Geltung verschafft und damit das gewöhnliche magische Quadrat zu einer unvollkommenen Abart von sich degradiert haben, wenn dem nicht eine Tatsache entgegenstände: Als das sozusagen normale Gebilde dieses Gebietes wird man zweckmäßigerweise eins wählen, das auf allen Stufen vertreten ist, und das gilt, wie wir sogleich sehen werden, für die pandiagonalen Quadrate nicht, während es magische Quadrate der gewöhnlichen Art für jedes $n \geqq 3$ gibt. Über die Möglichkeit, pandiagonale magische Quadrate zu konstruieren, ist nämlich zunächst zu bemerken, daß diese Möglichkeit für jedes ungerad-gerade n ausgeschlossen ist, für gerad-gerades n aber besteht. Was sodann die Fälle eines ungeraden n betrifft, so lieferte ja die Springer-Methode des Moschopulos, wie wir sahen, nur dann pandiagonale Quadrate, wenn n nicht durch 3 teilbar ist. Aus dem Versagen der Methode folgt nun natürlich nicht die Unmöglichkeit der Existenz solcher Quadrate; daß andererseits pandiagonale Quadrate aber jedenfalls nicht für jedes durch 3 teilbare n existieren, beweist der Fall $n = 3$: Für diesen gibt es, wie wir wissen, nur ein magisches Quadrat: das unserer Fig. 3 (mit den Nebenformen), und dieses ist nicht pandiagonal. Wie G. Tarry gezeigt hat[2]), sind pandiagonale Quadrate möglich für $n = 3p$, wenn das als ungerade[3])

---

anderen Ränder, den rechten und den linken des Quadrats, sich aneinandergeheftet denken, mit dem Resultat, daß man nun statt des Zylindermantels einen „Kreiswulst" hat, der durch n Meridian- und n Parallellinien in n^2 Zellen geteilt ist.

1) C. Planck verwirft auch den Namen „broken diagonals" (The Monist 20, 1910, p. 620)

2) Siehe G. Tarry, „Carrés panmagiques de base $3n$", Assoc. franç. 32, Congrès d'Angers 1903, II (Paris 1904), p. 130 ff., sowie Revue scientifique (4) 20, 40e année, 2me semestre, Paris 1903, p. 373

3) Der Fall eines geraden p erledigt sich nach dem hier zuvor Gesagten, je nachdem p gerad- oder ungerad-gerade ist.

vorausgesetzte $p > 1$ und nicht durch 3 teilbar, d. h. von der Form $6q \pm 1$ ($q \geqq 1$), ist. Aber auch für $n = 9$ ist ein pandiagonales Quadrat angegeben.[1])

Was die innere Struktur der pandiagonalen magischen Quadrate betrifft, so sind auch unter ihnen die beiden oben (S. 16/17) aufgestellten Hauptklassen vertreten: solche, die dem „Bildungsgesetz der Einer und n-er", wie wir kurz sagten, folgen und solche, die dies nicht tun. Während wir oben (§ 2) die Methode der Einer und n-er ohne alle Rücksicht auf Pandiagonalität, nur mit dem einen Ziele, überhaupt magische Quadrate zu erhalten, entwickelten[2]), mag diese Methode hier jetzt in eine Form gebracht werden, die für ungerades n, allerdings begreiflicherweise nur für ein durch 3 nicht teilbares n — denn bei Teilbarkeit durch 3 hört ja die unbeschränkte Möglichkeit, pandiagonale Quadrate zu bilden, auf —, Quadrate der gewünschten Art liefert. Das Verfahren ist in einer Formulierung, die H. Scheffler[3]) gibt, das folgende: *Man wähle 4 positive oder negative ganze Zahlen a, b, a', b' aus von der Beschaffenheit, daß jede von ihnen, sowie jede der Zahlen $ab' - a'b$, $a + a'$, $b + b'$, $a - a'$, $b - b'$ relativ prim zu n (event. vom absoluten Werte 1, jedoch nicht $= 0$) ist. Man erhalt alsdann ein magisches Quadrat, indem man die nachstehend angegebenen Zahlenreihen in die n^2 Felder des Quadrats so einsetzt, wie sie in dem Schema gestellt sind:*

1) Ich verweise hierfür auf die schon (S 40, Anm 2) zitierte Schrift von B Portier, in deren Ausgabe von 1902 sich ein pandiagonales Quadrat von 9^2 Zellen findet (l c. p 12). Vielleicht weisen aber bereits die früheren mir nicht zugänglichen Ausgaben dieser Schrift (1893 u 1895) das Quadrat auf, und es scheint, daß der Verfasser es an anderem Orte schon i J 1888 veröffentlichte (s. die Schrift von 1902, p 9)

2) Die in § 2 nach jener Methode hergeleiteten magischen Quadrate (Fig 5, 10, 12) sind denn auch sämtlich nicht pandiagonal.

3) Siehe H Scheffler, „Die magischen Figuren" Leipzig 1882, p 2ff.; s a. die altere Arbeit von J. Horner: „On the algebra of magic squares" Quart. Journ of Mathem. XI, 1870, p 57—65; 123—132; 213—224

$1+0\ +0\cdot n$	$1+a+bn$	$1+2a+2bn$	$\ldots$
$1+a'\ +b'n$	$1+(a+a')\ +(b+b')n$	$1+(2a+a')\ +(2b+b')n$	$\ldots$
$1+2a'+2b'n$	$1+(a+2a')+(b+2b')n$	$1+(2a+2a')+(2b+2b')n$	$\ldots$
$1+3a'+3b'n$	$1+(a+3a')+(b+3b')n$	$1+(2a+3a')+(2b+3b')n$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Dabei sind in jeder Zahl, die ja ein Trinom von der Form $1+c+dn$ ist, statt c und d deren kleinste Reste nach n (einschließlich 0 und ausschließlich n) zu nehmen.

So erhält man z. B. für $n=5$, wenn man, wie zulässig, $a=2$, $a'=1$, $b=1$, $b'=2$ wählt, folgendes Schema:

$1+0+0\cdot5$	$1+2+1\cdot5$	$1+4+2\cdot5$	$1+1+3\cdot5$	$1+3+4\cdot5$
$1+1+2\cdot5$	$1+3+3\cdot5$	$1+0+4\cdot5$	$1+2+0\cdot5$	$1+4+1\cdot5$
$1+2+4\cdot5$	$1+4+0\cdot5$	$1+1+1\cdot5$	$1+3+2\cdot5$	$1+0+3\cdot5$
$1+3+1\cdot5$	$1+0+2\cdot5$	$1+2+3\cdot5$	$1+4+4\cdot5$	$1+1+0\cdot5$
$1+4+3\cdot5$	$1+1+4\cdot5$	$1+3+0\cdot5$	$1+0+1\cdot5$	$1+2+2\cdot5$

und hieraus das magische Quadrat Fig. 29.

Bei den so gebildeten Quadraten nimmt 1 stets das obere linke Eckfeld ein, doch ist dies keineswegs an sich notwendig, vielmehr kann in dies Feld ebenso gut jede andere Zahl gesetzt werden: man braucht zu dem Ende die gewünschte Zahl nur in der Form $1+p+q\cdot n$ darzustellen (p und $q<n$) und hat dann natürlich in dem obigen Schema, statt von $1+0+0\cdot n$, von $1+p+q\cdot n$ auszugehen.

1	8	15	17	24
12	19	21	3	10
23	5	7	14	16
9	11	18	25	2
20	22	4	6	13

Fig. 29

Daß nun die nach dieser Methode erhaltenen Quadrate wirklich die geforderten Eigenschaften besitzen, erkennt man leicht: Die „Einer“ derselben Zeile gehen auseinander durch sukzessive Addition von a hervor, und die kleinsten Reste nach n sind somit in jeder Zeile sämtlich verschieden, weil a ja nach Voraussetzung zu n relativ prim ist; entsprechend ist es mit den n-ern jeder Zeile, die durch Addition von je $b\cdot n$ auseinander hervorgehen

und alle unter sich verschieden sein müssen, weil b ja gleichfalls zu n relativ prim ist. Ebenso wie für die Zeilen ergibt sich dies für die Spalten und zwar sowohl bezüglich der Einer, wie bezüglich der n-er. In den Feldern der „linken" Diagonale gehen die Einer durch Addition von je $a + a'$ und die n-er durch Addition von je $(b + b')n$ auseinander hervor, und hier müssen daher die Einer und n-er auch alle verschieden sein, weil $a + a'$ und $b + b'$ ja gleichfalls relativ prim zu n sein sollten. In der rechten Diagonale unterscheiden sich die Einer um $a - a'$ und die n-er um $(b - b')n$, so daß also bei unseren obigen Voraussetzungen auch hier Einer und n-er sämtlich verschieden sind. Zudem gilt offenbar alles, was soeben von der linken oder rechten Hauptdiagonale gesagt wurde, genau ebenso für die zu ihnen parallelen gebrochenen Diagonalen, so daß also die so erhaltenen Quadrate in der Tat, wie beabsichtigt, pandiagonal sind. — Es erübrigt daher jetzt nur noch der Nachweis, daß in unserem Schema keine Zahl zweimal vorkommt: Irgend zwei Zahlen des Schemas sind $1 + (k\ a + k'a') + (kb + k'b')\cdot n$ und $1 + (l\cdot a + l'a') + (lb + l'b')\cdot n$; sollen beide zu derselben Zahl führen, indem man von den betreffenden Faktoren vorschriftsgemäß die Reste nach n nimmt, so müßte

$$ka + k'a' \equiv la + l'a' \bmod n \quad \text{und}$$
$$kb + k'b' \equiv lb + l'b' \bmod n$$

oder, was dasselbe:

$$(k - l)a + (k' - l')a' \equiv 0 \bmod n$$
$$(k - l)b + (k' - l')b' \equiv 0 \bmod n$$

sein Diese Kongruenzen bedingen aber, da k, k', l, l' ihrer Definition nach $< n$ sind und die Determinante $ab' - a'b$ unserer Voraussetzung gemäß zu n teilerfremd ist $k = l$, $k' = l'$ Da ferner von $ka + k'a'$ und $kb + k'b'$ unserer Vorschrift gemäß deren kleinste Reste nach n zu nehmen sind, so kann keine der erhaltenen Zahlen $> n^2$ werden, und das Quadrat weist somit gerade alle Zahlen 1 bis n^2 auf, jede einmal. Damit ist nun restlos gezeigt, daß die nach diesem Verfahren gebildeten Quadrate allen an sie gestellten Forderungen genügen.

Nach diesem Beweisgange könnte es scheinen, als wäre damit — über unsere Behauptung hinaus! — die unbeschränkte Möglichkeit, pandiagonale magische Quadrate für jedes n zu bilden, dargetan. Wurden doch in dem Beweise dem n scheinbar nirgends irgendwelche Beschränkungen auferlegt. Und doch bestehen solche. Denn die Anwendbarkeit der Methode hängt natürlich in jedem einzelnen Falle davon ab, ob sich zu dem betreffenden n solche Zahlen a, a', b, b' finden lassen, die allen obigen Bedingungen genügen. Das ist nun aber erstens nicht möglich, wenn n durch 3 teilbar ist (vgl. dazu event. Kap. XIII, S. 66/67). Denn, da a und a' beide zu n relativ prim sein sollen, so dürften sie bei einem durch 3 teilbaren n jedenfalls nicht den Teiler 3 besitzen, sondern müßten, durch 3 geteilt, entweder beide denselben, von 0 verschiedenen Rest geben, oder aber a müßte, durch 3 geteilt, etwa den Rest 1 und a' den Rest 2 lassen; auf jeden Fall wäre dann aber entweder $a - a'$ oder $a + a'$ durch 3 teilbar, hätte also — entgegen unseren Bedingungen — mit n den Teiler 3 gemeinsam. Ebenso ergibt sich, daß jedes durch 2 teilbare n unsere Methode ausschließt. Ist n dagegen ungerade und nicht durch 3 teilbar, also von der Form $6\nu \pm 1$, so genügen $a = 2\nu$, $a' = \nu$, $b = 3\nu$, $b' = \nu$ allen unseren Bedingungen Für ein weder durch 2 noch durch 3 teilbares n ist die Methode somit unbeschränkt anwendbar.

Will man auf Pandiagonalität verzichten und sich auf gewöhnliche magische Quadrate beschränken, so darf man von den Bedingungen, daß $a + a'$, $b + b'$, $a - a'$, $b - b'$ zu n relativ prim seien, absehen, wofern man es nur so einrichtet, daß die mittlere Zahl $\frac{1}{2}(n^2 + 1) = 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} \cdot n$ in das Mittelfeld kommt. Es stehen dann also in der linken Hauptdiagonale gleichweit vom Mittelfeld, nach beiden Seiten hin gerechnet, die Zahlen

$$1 + \left(\frac{n-1}{2} + l(a + a')\right) + \left(\frac{n-1}{2} + l(b + b')\right)n \quad \text{und}$$

$$1 + \left(\frac{n-1}{2} - l(a + a')\right) + \left(\frac{n-1}{2} - l(b + b')\right)n,$$

und man sieht, daß deren Summe konstant, ganz unabhängig von dem Werte von l, nämlich gleich dem Doppelten der Mittel-

zahl, ist. Dann ergibt aber die Summe der ganzen Diagonale das n-fache der Mittelzahl, und das ist die magische Konstante. Für die rechte Hauptdiagonale ist es ganz entsprechend, und man erkennt, daß man bei der hier vorgeschriebenen Besetzung der Mittelzelle derjenigen Bedingungen, denen oben mit Rücksicht auf die Diagonalen die Zahlen a, a', b, b' unterworfen werden mußten, entraten kann und doch ein magisches Quadrat erhält. Natürlich ist dies Verfahren nur dort anwendbar, wo überhaupt ein Mittelfeld vorhanden ist, d. h. bei ungeradem n, dort aber auch stets In der Tat braucht man bei ungeradem $n = 2m + 1$ die Zahlen a, b, a', b' nur so zu wählen: $a = 2m$, $b = 2$, $a' = 1$, $b' = 2$, um allen Anforderungen zu genügen (diese vier Zahlen selbst sind relativ prim zu n und auch die Determinante $ab' - a'b = 2\,(2m - 1)$ ist es).

§ 5. Magische Quadrate von gerader Zellenzahl.

Die bisher angegebenen Methoden waren überwiegend für die Bildung von Quadraten ungerader Zellenzahl bestimmt. Wir geben daher in diesem § Methoden, die sich für Herstellung von Quadraten gerader Zellenzahl besonders eignen.

Denkt[1]) man sich die Zahlen 1 bis n^2 in natürlicher Reihenfolge in die n^2 Zellen des Quadrats von links nach rechts und von oben nach unten geschrieben, so genügen, wie bereits in § 3, S. 18, hervorgehoben wurde, die beiden Diagonalen ohne weiteres der gestellten Bedingung, dagegen gilt dies von den Zeilen und Spalten natürlich nicht. Vielmehr ist, wenn wir die „Konstante" $\frac{n(n^2+1)}{2}$ des zu bildenden magischen Quadrats kurz mit M bezeichnen, die Summe der Zahlen der x-ten Zeile von oben $\left(x \leqq \frac{n}{2}\right)$:

$$(1 + 2 + \cdots + n) + (x - 1)n^2 = M - \frac{n^2}{2}(n + 1 - 2x)$$

1) Siehe für diese einleitenden Ausführungen, sowie für die erste Methode ad I und die erste ad II die auf Anregung von C. H. Harrison entstandene Arbeit von W. W. Rouse Ball. „Even magic squares", Messenger of Mathematics XXIII, 1893/94, p. 65—69.

und die der „entsprechenden“ (x-ten) Zeile von unten:

$$M + \frac{n^2}{2}(n + 1 - 2x).$$

Die eine Zahlensumme ist mithin zu groß, die andere zu klein, und zwar hat, was die eine Zeile zu viel hat, die andere zu wenig. Entsprechend ist es mit den Spalten: Ergibt doch die y-te Spalte von links $\left(y \leqq \frac{n}{2}\right)$ als Summe:

$$ny + n \cdot \frac{n(n-1)}{2} = M - \frac{1}{2}n(n + 1 - 2y)$$

und die y-te Spalte von rechts: $M + \frac{1}{2}n(n + 1 - 2y)$. Da nun in zwei beliebig herausgegriffenen Zeilen zwei entsprechende (übereinanderstehende) Zahlen überall den gleichen Unterschied haben, so können wir den Unterschied zweier „entsprechender“ Zeilen dadurch ausgleichen, daß wir $\frac{n}{2}$ Zahlen der einen Zeile mit den entsprechenden der anderen vertauschen Dabei ist freilich zu bedenken, daß, wenn auch jede Zahl hierbei in ihrer Spalte bleibt, sich in zwei entsprechenden Spalten im allgemeinen nachher nicht mehr dieselben Zahlen gegenüberstehen wie zuvor, wofern nicht bei den Vertauschungen zwischen den Zeilen hierauf ausdrücklich Rücksicht genommen wurde Außerdem können diese Vertauschungen natürlich auch für die Diagonalen eine Änderung der Zahlensumme verursachen Der Ausgleich zwischen den Spalten hätte selbstverständlich in ganz entsprechender Weise erreicht werden konnen. Man erkennt nun leicht, in welcher Art sich diese zwiefachen Umsetzungen — für Zeilen und Spalten — miteinander verknüpfen lassen, und es ergeben sich hiernach folgende Vorschriften für die Umwandlung eines ursprünglichen, d. h. in natürlicher Zahlenfolge ausgefüllten Quadrats in ein magisches.

I. n ist gerade-gerade, $= 4m$.

Man teile das ganze Quadrat der $16m^2$ Felder in 16 Teile von je m^2 Feldern, wie Fig 30 dies angibt, und vertausche darauf entweder innerhalb des mit a bezeichneten Gebietskomplexes oder innerhalb des Komplexes b jede Zahl mit der ihr in dem ganzen

Quadrat gerade gegenüberliegenden, wobei wir unter zwei einander „gegenüberliegenden“ Zahlen zwei solche verstehen, von denen Zeile und Spalte der einen denen der anderen „entsprechen“. Man sieht, daß bei diesen Vertauschungen jede Zahl des Komplexes a innerhalb dieses Komplexes bleibt und daß gleiches für b gilt, und ferner, daß bei jeder der beiden zur Wahl stehenden Vertauschungen (a oder b) gleichzeitig jede Zeile und jede Spalte unseres Quadrats die Hälfte ihrer Zahlen mit der „entsprechenden“ Zeile resp. Spalte austauscht und daß bei dieser Vertauschung die Diagonalen stets ihre Zahlen behalten. Nach Ausführung der Vertauschung werden somit Zeilen, Spalten und Hauptdiagonalen sämtlich die magische Konstante aufweisen.

a	b	b	a
b	a	a	b
b	a	a	b
a	b	b	a

Fig 30

Anstatt, wie vorstehend, das Quadrat ($16\,m^2$ Felder) in 16 unter sich gleich große Quadrate von je m^2 Feldern zu teilen, kann man es auch in m^2 Quadrate von je 16 Feldern zerlegen und in jedem dieser Teilquadrate die Diagonalen ziehen, wie Fig. 31 dies für den Fall $n = 8$ anzeigt, und darauf die Zahl jedes nicht von einer Diagonale durchquerten Feldes mit der ihr in dem ganzen Quadrat „gegenüberliegenden“ Zahl vertauschen Offenbar gibt hierbei die erste Zeile $2m = \frac{n}{2}$ Zahlen an die letzte Zeile ab und empfängt dafür von dieser die „entsprechenden“ Zahlen, und dasselbe gilt für alle anderen Paare entsprechender Zeilen, wie auch Spalten, während die Diagonalen völlig ungeändert bleiben[1]) Das so

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Fig. 31

1) Man konnte die Regel naturlich auch umgekehrt so fassen, daß die Zahlen der von den schrägen Linien durchquerten Felder mit den

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Fig. 32

entstehende Quadrat — für unseren Fall $n = 8$ ist es das der Fig. 32 — ist mithin magisch.[1])

II n ist ungerad-gerade, $= 2(2m + 1)$.

Man teile das Quadrat, das zunächst wieder mit den

---

gegenüberliegenden vertauscht werden und die anderen Zahlen ihre Plätze behalten. Jede der beiden Diagonalen des ganzen Quadrats bliebe, als ein Ganzes betrachtet, auch hierbei erhalten

1) Diese Herstellungsmethode ist nichts anderes als das erste der beiden Verfahren, die Moschopulos für gerad-gerades n gibt; nur hat die Regel bei ihm eine etwas andere Fassung: Die Felder des Quadrats bleiben zunächst ganz frei von Zahlen; Moschopulos versieht nun die von uns durchquerten Felder (Fig. 31) mit Punkten und zählt sodann, in dem Eckfeld oben links mit 1 beginnend, in der Reihenfolge der Zahlen unserer Fig 31 alle Felder durch und setzt hierbei in alle mit einem Punkt versehenen Felder die betreffenden Zahlen ein, also 1, 4, 5, 8, 10, 11 .. (s. Fig. 31 u 32), während die nicht punktierten Felder noch leer bleiben. Darauf erfolgt eine zweite Abzählung, die bei dem Eckfelde unten rechts als mit 1 beginnt und demgemäß in gerade entgegengesetzter Richtung wie die erste verläuft; hierbei erhalten nun alle bisher noch unausgefüllten, also nicht mit Punkten gezeichneten Felder die Zahl, die bei der Abzahlung auf sie entfällt, also von unten rechts an 2, 3, 6, 7, 9, 12 .. (s. Fig 32); s P. Tannery, l. c. („Annuaire"), p 102—107 nebst den Figuren 10—12; bei Günther, l c., die 11 Figur des Moschopulos unrichtig. — Es braucht nicht gesagt zu werden, daß auch dies Verfahren eine Umkehrung im Sinne unserer vorigen Anmerkung gestattet. — Bemerkt sei noch, daß die Methode in unserer Fassung sich in einem japanischen Werke von 1840 findet. Ampon Gokai, Sampō semmon-scho; s. Yoshio Mikami, „The development of mathematics in China and Japan" = Abh zur Gesch. der mathem. Wissensch., 30. Heft (Lpz 1913), p. 292/3. Übrigens lehrt dieser japanische Autor fur ungerad-gerades n ein Verfahren, das demjenigen, das wir im folgenden Abschnitt II zunächst (S 50—52) geben werden, ganz ähnlich ist; s. Mikami, l. c p 293

n^2 Zahlen in deren natürlicher Reihenfolge besetzt wird, in 4 Quadranten (s. die stärkeren Linien der Fig. 33), von denen jeder also $(2m+1)^2$ Zellen besitzt. Dann wähle man in dem ersten Quadranten (oben links) in jeder Zeile m Zahlen aus, etwa die der Zellen $1, 2, \cdots m$ in der obersten Zeile, die der Zellen $2, 3, \cdots m+1$ in der zweiten, $\cdots$, die der Zellen $m+1$,

1*	2*	3	4	5	6	7	8	9*	10*
11	12*	13*	14	15	16	17	18*	19*	20
21	22	23*	24*	25	26	27*	28*	29	30
31	32	33	34*	35*	36*	37*	38	39	40
41*	42	43	44	45*	46*	47	48	49	50*
51*	52	53	54	55*	56*	57	58	59	60*
61	62	63	64*	65*	66*	67*	68	69	70
71	72	73*	74*	75	76	77*	78*	79	80
81	82*	83*	84	85	86	87	88*	89*	90
91*	92*	93	94	95	96	97	98	99*	100*

Fig. 33.

$m+2, \cdots 2m$ in der $(m+1)$-ten, die der Zellen $m+2, m+3, \cdots 2m+1$ in der $(m+2)$-ten, die der Zellen $m+3, m+4, \cdots 2m+1$ und 1 in der $(m+3)$-ten und schließlich die der Zellen $2m+1$, $1, \cdots m-1$ in der $(2m+1)$-ten Zeile, und in den anderen drei Quadranten diejenigen Zahlen, die diesen vorgenannten nach den Spalten oder nach den Zeilen oder nach beiden entsprechen, d. h. zu einer Zahl des ersten Quadranten, die auf dem Feld a, b — in der oben (S. 32) gebrauchten Feldernotation — steht, nehme man die Zahlen der 3 Felder $n+1-a, b$; $a, n+1-b$; $n+1-a, n+1-b$ hinzu. Dann vertausche man von diesen so auserwählten Zahlen immer je zwei „gegenüberliegende"; dadurch tauscht jede Zeile mit der ihr entsprechenden $2m$ Zahlen aus und ebenso jede Spalte. Nun soll aber jede Zeile bzw. Spalte $2m+1$ Zahlen mit der entsprechenden austauschen; es bleibt also noch übrig, je eine Vertauschung in zwei entsprechenden Zeilen und Spalten vorzunehmen. Zu dem Zweck brauchen wir nur von dem ersten Quadranten die $(2m+1)$-te Zahl der obersten Zeile, die erste der zweiten Zeile, die zweite der dritten, ..., die $2m$-te Zahl der $(2m+1)$-ten Zeile auszuwählen und diese Zahlen gegen die entsprechenden Zahlen der

100	99	3	7	95	6	4	8	92	91
81	89	88	14	16	15	17	83	82	20
30	72	78	77	25	26	74	73	29	21
31	39	63	67	66	65	64	38	32	40
60	42	48	54	56	65	47	43	49	51
50	52	53	44	46	45	57	58	59	41
61	62	33	37	36	35	34	68	69	70
71	22	28	27	75	76	24	23	79	80
11	19	18	84	85	86	87	13	12	90
10	9	93	94	5	96	97	98	2	1

Fig 34

entsprechenden Zeilen in dem ganzen Quadrat auszutauschen und weiter, um auch bezüglich der Spalten unser Ziel zu erreichen, nur in dem ersten Quadranten die $2m$-te Zahl der obersten Zeile, die $(2m+1)$-te der zweiten Zeile, die erste der dritten, ..., die $(2m-1)$-te der $(2m+1)$-ten Zeile auszuwählen und diese Zahlen mit den entsprechenden Zahlen der entsprechenden Spalten des ganzen Quadrats zu vertauschen Bei allen diesen Umstellungen behalten die beiden Hauptdiagonalen, was wesentlich ist, alle ihre ursprünglichen Zahlen. Unsere Fig. 33 gibt als Beispiel für den Fall $n = 10$ zunächst die ursprüngliche Ordnung und kennzeichnet dabei eine mit der gegenüberliegenden Zahl zu vertauschende Zahl durch einen * und eine mit der entsprechenden Zahl der entsprechenden Zeile bzw Spalte zu vertauschende durch einen horizontalen bzw. vertikalen Strich. Fig. 34 gibt alsdann das hieraus hervorgehende magische Quadrat.

Außer diesem Herstellungsverfahren mag für ungerad-gerades $n = 2(2m+1)$ noch eine andere Methode angegeben werden, die freilich nicht auf dem in diesem § vorangestellten Prinzip der wechselseitigen Zeilen- und Spaltenausgleichung beruht, die aber wohl gerade wegen ihres wesentlich anderen Charakters hier ein gewisses Interesse verdient Das Verfahren besteht darin, zunächst für die nächst kleinere gerad gerade Zahl, also für $n' = 4m$, ein magisches Quadrat nach einer beliebigen, etwa einer der oben gegebenen Methoden, zu bilden und dieses Quadrat alsdann mit einem passenden Rande von Einfelderbreite zu umgeben. Das Verfahren, das zuerst von Ons-en-Bray

(1750) gelehrt ist[1]), mag an dem konkreten Falle $n = 10$ erläutert werden: Das zu bildende magische Quadrat soll 100 Zellen umfassen, das zunächst herzustellende gerad-gerade Kernquadrat also deren 64; auf den Rand entfallen demnach 100 — 64 = 36 Zellen. Diese 36 Zellen sollen mit den 18

1	98	93	91	90	89	5	16	18	4
99	19							26	2
95									6
86									15
84									17
7									94
9									92
13									88
14	75							82	87
97	3	8	10	11	12	96	85	83	100

Fig 35

kleinsten und den 18 größten der zur Verfügung stehenden Zahlen besetzt werden, so daß sich also zunächst folgende Disposition für die Unterbringung der Zahlen (1 bis 100) ergibt:

Rand		Kernquadrat	
1, 2 ···	18	19, 20 ··· ··	50
100, 99 ·	83	82, 81 ···	51

Soll das 64-zellige Kernquadrat die Zahlen 19 bis 82 enthalten, so werden wir, um ein solches Quadrat zu bekommen, die Zahlen 1 bis 64 eines gewöhnlichen 64-zelligen magischen Quadrats, etwa desjenigen unserer Fig. 32, sämtlich um 18 vergrößern, das so entstehende Quadrat ist natürlich in allen Zeilen und Spalten, wie auch in den beiden Diagonalen gleichsummig, nur ist seine Konstante natürlich um 18 · 8 größer als die des ursprünglichen Quadrats der Fig. 32. Wir deuten in unserer Fig. 35 dieses 64-zellige Kernquadrat, über das es hiernach keiner weiteren Erörterung mehr bedarf, nur durch seine 4 Eckzahlen (19, 26, 75, 82) an. — Soll nun auch das ganze 100-zellige

1) Siehe die im literar. Index als Nr. 87 aufgeführte Abh., l. c. p 253—271

Quadrat gleichsummig werden, so müssen die Zahlen des Randes so verteilt werden, daß das 64-zellige Kernquadrat durch das Herumlegen des Randes in jeder Zeile, Spalte und Diagonale den gleichen Zuwachs erfährt. Dieser Zuwachs kann bei den zur Verfügung stehenden Zahlen nur 101 sein: $1 + 100$; $2 + 99$; $\ldots$; $18 + 83$. Hiernach muß also, wenn z. B. 1 in die Ecke oben links gesetzt wird, die Ecke unten rechts mit 100 ausgefüllt werden, da sonst die „linke“ Diagonale nicht den vorgeschriebenen Zuwachs erhielte Setzt man in ein Feld des oberen Randes, das nicht Eckfeld ist, etwa die Zahl 5, so muß das gerade darunterstehende Feld der unteren Randzeile mit 96 ausgefüllt werden, damit die Summe 101 herauskommt, usw. Da das Quadrat Fig. 32 die magische Konstante 260 hat, der durch gleichmäßige Vergrößerung aller seiner Zahlen herbeigeführte Zuwachs $8 \cdot 18$ und der durch Herumlegen des Randes erzielte 101 beträgt, so werden also alle Zeilen, Spalten und die beiden Diagonalen des neuen Quadrats die Summe $260 + 144 + 101 = 505$ aufweisen, und das ist natürlich nichts anderes als die Konstante eines magischen Quadrats der Zahlen 1 bis 100. Bei dem allen ist natürlich die Anordnung der Randzahlen so zu treffen, daß auch die beiden Randzeilen und Randspalten diese Konstante 505 ergeben, was leicht zu erreichen ist. Fig. 35 gibt eine solche geeignete Besetzung des Randes an. — Wären wir, zur Herleitung des Kernquadrats, statt von Fig. 32, von einem magischen Quadrat von der Art ausgegangen, daß in dem Innern des 64-zelligen Quadrats wieder ein magisches Quadrat von 36 Zellen und in dessen Innern wieder ein magisches Quadrat von 16 Zellen steht, so hätten wir also ein magisches Quadrat von 10^2 Zellen bekommen, das in seinem Innern konzentrische magische Quadrate von bezw. 4^2, 6^2, 8^2 Zellen einschließt. Auf diese „Stifelschen Quadrate“, deren wir bereits oben (S. 17/18) beiläufig gedachten, näher einzugehen, müssen wir uns jedoch hier versagen.

Kapitel XIII.

Eulersche Quadrate.

Je laisse aux géomètres à voir s'il y a des moyens pour achever l'énumération de tous les cas possibles, ce qui paraît fournir un vaste champ pour des recherches nouvelles et intéressantes

L. Euler
Comm. arithm coll. II, p 361.

§ 1. Das Problem der 36 Offiziere.

Die Abhandlung Leonhard Eulers[1]), an deren Ende die vorstehenden Worte sich finden, behandelt ein Problem, das nach Eulers Zeugnis lange den Scharfsinn vieler Menschen beschäftigt hat: 36 Offiziere gehören 6 verschiedenen Regimentern und 6 verschiedenen Chargen an, und zwar in der Weise, daß jedes Regiment durch jede der 6 Chargen einmal vertreten ist. Die 36 Offiziere sollen nun in Reihen von je 6 so aufgestellt werden, daß Offiziere gleicher Charge oder gleichen Regiments weder in derselben Horizontalreihe („Zeile") noch in derselben Vertikalreihe („Spalte") vorkommen. Euler erklärt dies Problem für unlösbar, „so schwer es auch sei, einen strengen Beweis hierfür zu geben". Nehmen wir jedoch statt der 36 nur 16 Offiziere von 4 verschiedenen Regimentern und 4 verschiedenen Chargen an, wobei jedes Regiment wieder durch jede der verschiedenen Chargen einmal vertreten sein soll, und bezeichnen wir jeden Offizier durch 2 Ziffern, von denen die erste die Nummer des Regiments, die zweite die Charge bedeuten mag, so erhalten wir leicht folgende Lösung:

---

1) „Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques" [1779]. Verhandelingen uitgegeven door het Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen 1782, IX, p. 85—239 = Leonh Euleri Comment. arithm coll. Bd II, 1849, p 302—361

1, 1	2, 2	3, 3	4, 4
4, 3	3, 4	2, 1	1, 2
3, 2	4, 1	1, 4	2, 3
2, 4	1, 3	4, 2	3, 1.

Die hiermit gelöste Aufgabe kann auch in der folgenden Form ausgesprochen werden[1]): **Die Asse, Könige, Damen und Buben eines Kartenspiels sollen so in 4 Reihen zu je 4 angeordnet werden, daß in derselben Zeile oder Spalte weder zwei Karten desselben Ranges noch derselben „Farbe" liegen.**

Von diesem besonderen Falle der 16 Offiziere wollen wir uns zur Erörterung des allgemeineren Problems von n^2 Offizieren wenden, jedoch sei vorher noch eine kurze Zusatzbemerkung zu dem soeben betrachteten Sonderfall erlaubt. Dieser Fall der 16 Offiziere bzw. 16 Spielkarten gestattet nämlich eine Weiterentwicklung der Problemstellung in gleicher Richtung: Nehmen wir an, daß unsere 16 Karten, d. h. Trèfle-, Pique-, Coeur- und Carreau-Ass, -König, -Dame und -Bube, von 4 verschiedenen und verschieden aussehenden Kartenspielen genommen sind und zwar in der Weise, daß jedes der 4 Kartenspiele ein Ass, einen König, eine Dame, einen Buben, und zwar je eine Trèfle-, eine Pique-, eine Coeur-, eine Carreau-Karte, beigesteuert hat, so läßt sich die Anordnung der 16 Karten zu 4×4 so gestalten, daß jede Zeile und jede Spalte nicht nur den früheren Anforderungen genügt, sondern auch der weiteren, daß jedes der 4 Kartenspiele in jeder Zeile und jeder Spalte gerade einmal vertreten ist.[2]) Bezeichnet man nämlich, wie zuvor, den Rang einer Karte (Ass, König, Dame, Bube) durch die erste und die Farbe durch die zweite Ziffer und nun noch die Zugehörigkeit zu den 4 ver-

---

1) So z B. bei A. Labosne in der von ihm besorgten Ausgabe von Bachets „Problèmes plaisants et délectables", 4ième éd., 1879, p. 200.

2) Auf diese Weiterentwicklung des Problems hat P Wernicke („Das Problem der 36 Offiziere", Deutsche Mathem.-Vereinig., 19 Bd, 1910, p. 267) hingewiesen (Offiziere von verschiedenen Chargen, Regimentern und Orden)

schiedenen Kartenspielen durch einen dritten Index, so erhält man leicht folgende, unseren Forderungen genügende Anordnung:

$$\begin{array}{cccc} 1,1,1 & 2,2,2 & 3,3,3 & 4,4,4 \\ 4,3,2 & 3,4,1 & 2,1,4 & 1,2,3 \\ 3,2,4 & 4,1,3 & 1,4,2 & 2,3,1 \\ 2,4,3 & 1,3,4 & 4,2,1 & 3,1,2. \end{array}$$

Nach dieser Zwischenbemerkung wenden wir uns wieder zu dem ursprünglichen Problem der 36 Offiziere resp., wie schon angekündigt, zu dem allgemeineren Fall der n^2 Offiziere (von n Regimentern und n Chargen) und werfen nun die Frage auf, für welche Werte von n Anordnungen der verlangten Art möglich sind. Zunächst erkennt man sofort, daß der Fall $n = 2$ eine solche Anordnung nicht gestattet; dagegen haben wir für $n = 4$ ja bereits oben eine Lösung angegeben, und auch für $n = 3$ ergibt sich leicht eine solche, z. B. die folgende:

$$\begin{array}{ccc} 1,1 & 2,2 & 3,3 \\ 2,3 & 3,1 & 1,2 \\ 3,2 & 1,3 & 2,1. \end{array}$$

Allgemein gibt es jedenfalls dann stets eine Lösung, wenn sich zu n zwei Zahlen p und q so bestimmen lassen, daß p, q und $p-q$ zu n relativ prim ($\geqq 1$) sind. Die dann anwendbare Methode wollen wir an dem Beispiel $n = 5$ auseinandersetzen. Wir nehmen an: $q = 1$, und können nun $p = 2, 3, 4$ setzen. Wählen wir etwa $p = 3$ Alsdann schreiben wir die Zahlen 1 bis n in beliebiger, also etwa der natürlichen Ordnung in einer Reihe hin und setzen darunter eine zyklische Permutation dieser Reihe, indem wir alle Zahlen um q, d. h. also hier um *eine* Stelle, nach links rücken und die erste Zahl dann wieder hinten ansetzen; darunter kommt dann — als dritte Reihe — wieder die entsprechende zyklische Verschiebung der zweiten, und so geht dies fort, bis wir n Reihen haben In unserem Falle erhalten wir so:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Diese Ziffern sollen nun im Sinne unserer ursprünglichen Aufgabe die verschiedenen Regimenter angeben, und man sieht, daß in derselben Zeile oder Spalte niemals dieselbe Zahl zweimal vorkommen kann, weil q zu n relativ prim ist und der Zyklus sich daher erst nach n Reihen schließt. — Ebenso schreiben wir eine zweite Reihe von Zahlen 1 bis n, die jetzt die n verschiedenen Chargen bedeuten sollen, hin und nehmen hier nun immer zyklische Verschiebungen um je $p = 3$ Stellen, und zwar auch wieder nach links hin, vor; wir erhalten so:

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2.

Auch hier kommt, weil p zu n relativ prim ist, jede Zahl in jeder Zeile und in jeder Spalte nur einmal vor. Vereinigen wir nun die beiden vorstehenden Zahlenschemata in der Weise, daß wir je zwei entsprechende, d. h. an entsprechenden Stellen der Schemata stehende Zahlen miteinander kombinieren, so erhalten wir schließlich die erstrebte Anordnung:

1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5
2, 4	3, 5	4, 1	5, 2	1, 3
3, 2	4, 3	5, 4	1, 5	2, 1
4, 5	5, 1	1, 2	2, 3	3, 4
5, 3	1, 4	2, 5	3, 1	4, 2

Da nämlich auch $p - q$ relativ prim zu n ist, so ist offenbar jede der 5 Zahlen (1, 2, 3, 4, 5) des ersten Schemas mit jeder der Zahlen des zweiten ein- und auch nur einmal kombiniert, wie es der Forderung unseres Problems nach ja sein muß (vgl. a. Kap XII, S. 8—11).

Nach dieser Methode erledigen sich offenbar alle Fälle eines ungeraden n, da $q = 1$, $p = 2$ hier stets Zahlen von den verlangten Eigenschaften sind[1])

---

1) Vgl a Interméd. des mathém., t 2, 1895, p. 79/80 (Adrien Akar, Antwort auf Question 261 in t 1, 1894, p. 146/7).

Andererseits entscheidet die Anwendbarkeit der vorstehend beschriebenen Methode natürlich nicht über die Lösbarkeit des Problems an sich; vielmehr ist die Bedingung, daß Zahlen p, q von den verlangten Eigenschaften existieren, nur hinreichend, nicht aber notwendig für die Existenz einer Lösung. Dies lehrt insbesondere der Fall $n = 2^m$, für den geeignete Zahlen p, q sich nicht angeben lassen und für den daher unsere Methode versagt, für den aber dennoch Lösungen existieren[1]), wie beispielsweise für $n = 8$ die folgende:

1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5	6, 6	7, 7	8, 8
8, 7	7, 8	6, 5	5, 6	4, 3	3, 4	2, 1	1, 2
7, 5	8, 6	5, 7	6, 8	3, 1	4, 2	1, 3	2, 4
5, 4	6, 3	7, 2	8, 1	1, 8	2, 7	3, 6	4, 5
4, 6	3, 5	2, 8	1, 7	8, 2	7, 1	6, 4	5, 3
6, 2	5, 1	8, 4	7, 3	2, 6	1, 5	4, 8	3, 7
2, 3	1, 4	4, 1	3, 2	6, 7	5, 8	8, 5	7, 6
3, 8	4, 7	1, 6	2, 5	7, 4	8, 3	5, 2	6, 1.

Besitzt man Lösungen für $n = a$ und $n = b$, so kann man aus ihnen, wie G. Tarry[2]) gezeigt hat, leicht Lösungen für $n = a \cdot b$ konstruieren.[3]) Es mag dies an dem Fall $a = 3$, $b = 4$ veranschaulicht werden. Für $n = 3$ haben wir bereits oben die Lösung angegeben:

1, 1	2, 2	3, 3	
2, 3	3, 1	1, 2	(I)
3, 2	1, 3	2, 1.	

Ebenso ist für $n = 4$ schon oben eine Lösung angegeben, doch wollen wir in dem dortigen Schema sämtliche Ziffern um 1 verkleinern und bekommen so das folgende Schema:

1) Voraussetzung ist natürlich $m > 1$; für $m = 1$ ist, wie bereits oben (S 57) bemerkt wurde, unsere Aufgabe unlösbar.

2) Intermédiaire des mathématiciens, t VI, 1899, p. 251—252

3) Es ist dies dieselbe Methode, die W. H Thompson schon vorher auf das entsprechende Problem im Gebiete der magischen Quadrate angewandt hatte (Quart. Journ of Mathem. 10, 1870, p. 186ff.).

0, 0	1, 1	2, 2	3, 3	
3, 2	2, 3	1, 0	0, 1	(II)
2, 1	3, 0	0, 3	1, 2	
1, 3	0, 2	3, 1	2, 0	

An die Stelle jedes Zahlenpaares i, k in II setzen wir nun je ein Quadrat I, jedoch erhöhen wir dabei alle „ersten“, d. h. vor einem Komma stehenden Ziffern von I um $i \cdot 3$ und alle „zweiten“, d. h. hinter einem Komma stehenden Ziffern um $k \cdot 3$; das bedeutet, daß beispielsweise an die Stelle des Elements 2, 3 von II ein 9-gliedriges Quadrat gesetzt wird, das man aus I erhält, indem man in I zu allen ersten Ziffern $2 \cdot 3$ und zu allen zweiten $3 \cdot 3$ addiert. Man bekommt so folgende Lösung für $n = 12$:

1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5	6, 6	7, 7	8, 8	9, 9	10, 10	11, 11	12, 12
2, 3	3, 1	1, 2	5, 6	6, 4	4, 5	8, 9	9, 7	7, 8	11, 12	12, 10	10, 11
3, 2	1, 3	2, 1	6, 5	4, 6	5, 4	9, 8	7, 9	8, 7	12, 11	10, 12	11, 10
10, 7	11, 8	12, 9	7, 10	8, 11	9, 12	4, 1	5, 2	6, 3	1, 4	2, 5	3, 6
11, 9	12, 7	10, 8	8, 12	9, 10	7, 11	5, 3	6, 1	4, 2	2, 6	3, 4	1, 5
12, 8	10, 9	11, 7	9, 11	7, 12	8, 10	6, 2	4, 3	5, 1	3, 5	1, 6	2, 4
7, 4	8, 5	9, 6	10, 1	11, 2	12, 3	1, 10	2, 11	3, 12	4, 7	5, 8	6, 9
8, 6	9, 4	7, 5	11, 3	12, 1	10, 2	2, 12	3, 10	1, 11	5, 9	6, 7	4, 8
9, 5	7, 6	8, 4	12, 2	10, 3	11, 1	3, 11	1, 12	2, 10	6, 8	4, 9	5, 7
4, 10	5, 11	6, 12	1, 7	2, 8	3, 9	10, 4	11, 5	12, 6	7, 1	8, 2	9, 3
5, 12	6, 10	4, 11	2, 9	3, 7	1, 8	11, 6	12, 4	10, 5	8, 3	9, 1	7, 2
6, 11	4, 12	5, 10	3, 8	1, 9	2, 7	12, 5	10, 6	11, 4	9, 2	7,3	8, 1

Man erkennt ohne weiteres, daß in dem so hergeleiteten Quadrat sowohl die ersten, wie auch die zweiten Ziffern derselben Zeile oder Spalte sämtlich verschieden sein müssen, und ferner, daß eine bestimmte erste und eine bestimmte zweite Ziffer immer nur einmal miteinander kombiniert sind. Hätten wir nämlich zweimal dieselbe Kombination, so könnten diese beiden Ziffernpaare, da ihre Ziffern dann ja auch dieselbe Kombination von Resten nach 3 ergeben würden, nur zwei verschiedenen unserer neunfeldrigen Teilquadrate angehören und müßten dort offenbar an korrespondierenden Stellen stehen; je 16 solche kor-

respondierende Kombinationen aus den verschiedenen neunteldrigen Quadraten sind nun aber alle untereinander verschieden, weil es die Kombinationen von II alle sind.

Aus der Anwendbarkeit dieser Bildungsmethode folgt nun mit Rücksicht auf die für jedes ungerade n, sowie für $n = 4$ und 8 oben gegebenen Lösungen, daß es Quadrate der verlangten Art, außer für jedes ungerade, auch für jedes gerad-gerade n gibt.

Zu erörtern bleibt somit nur noch der Fall, daß n ungeradgerade ist, und hiermit insbesondere auch der Spezialfall $n = 6$, von dem wir im Eingang dieses Kapitels ausgingen und der überhaupt erst — infolge der Schwierigkeiten, die er bereitet, — unserem ganzen Problem das Interesse der Mathematiker gewonnen hat. Eulers Versuche, diesen Fall $n = 6$ zu bewältigen, führten zu keinem vollkommenen Erfolge, sondern nur zu einer Anordnung, wie der folgenden[1]):

1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5	6, 6
2, 6	3, 1	4, 5	6, 3	1, 4	5, 2
3, 4	6, 5	1, 2	5, 6	2, 3	4, 1
4, 5	5, 4	2, 6	3, 2	6, 1	1, 3
5, 3	1, 6	6, 4	2, 1	4, 2	3, 5
6, 2	4, 3	5, 1	1, 5	3, 6	2, 4

Diese Anordnung weist zwar, wie verlangt, in jeder Zeile und jeder Spalte vor, wie hinter dem Komma alle 6 Zahlen auf, jedoch ist sie insofern mangelhaft, als die beiden Kombinationen 2, 6 und 4, 5 je zweimal darin vorkommen, während andererseits 2, 5 und 4, 6 ganz fehlen. Wie schon oben bemerkt wurde, gelangte Euler zu der Überzeugung, daß das Problem für 36 Offiziere unlösbar sei, und auch Gauß hat dies anscheinend ausgesprochen.[2]) Einen Beweis hierfür fand, frei-

1) Siehe Euler, l. c. (Comm. arithm.), p. 303; dort gegenüber unserer Anordnung die Zeilen mit den Spalten vertauscht und statt der Ziffern lateinische und griechische Buchstaben.

2) Im Jahre 1817, wenn eine Erinnerung H. C. Schumachers richtig ist; siehe dessen Brief an Gauß vom 10. Aug. 1842 in dem von C. A. F. Peters herausg. „Briefw. zw. Gauß u. Schumacher“, Bd. 4,

lich ohne ihn zu veröffentlichen, Th. Clausen, der auch bereits zu der Vermutung gelangte, daß das Problem für jedes ungeradgerade n unlösbar sei.[1]) Der erste, der einen Beweis für die Unlösbarkeit des Problems für $n = 6$ veröffentlichte, war G. Tarry[2]), und es ist ziemlich wahrscheinlich, daß Clausens Beweis im wesentlichen dasselbe Verfahren wie der Tarrys befolgte.[3]) Unter allgemeineren Gesichtspunkten hat zuerst J. Petersen[4]) das Problem betrachtet: Unter Benutzung des bekannten Eulerschen Polyedersatzes, und zwar in dessen verallgemeinerter Form für mehrfach zusammenhängende Polyeder, gelangt er zu Formeln, die ihm das gewünschte Resultat, nämlich die Anzahl der Lösungen unseres Problems, — für kleine Werte von n sogar verhältnismäßig schnell — liefern, und findet so, daß für $n = 6$ eine Lösung nicht existiert. Die Untersuchung Petersens ist jedoch nicht erschöpfend.[5]) Daß für jedes ungerad-gerade n

---

Altona 1862, p. 81, s. dazu a. Schumachers Brief v 12. März 1842 (p 61) und die Antwort Gauß' vom 2. April 1842 (p. 63).

1) Siehe den soeben zitierten Brief Schumachers vom 10. Aug. 1842 (l c. p. 80/81).

2) Siehe die unter Nr. 594 u 594a des literar. Index aufgeführten Publikationen Tarrys.

3) In dem schon zweimal zitierten Briefe vom 10. Aug 1842 sagt Schumacher (l c p. 81): „Er [Clausen] bringt für 6 alle möglichen Fälle auf 17 Grundformen, deren Discussion die Unmöglichkeit ergiebt .. Der Beweis der vermutheten Unmöglichkeit für 10, so geführt wie er ihn für 6 geführt hat, würde wie er sagt, vielleicht für menschliche Kräfte unausführbar seyn." Dies alles und insbesondere das Auftreten von 17 Typen gilt auch von dem Beweise Tarrys.

4) J Petersen, „Les 36 officiers", Annuaire des mathématiciens 1901—1902, publié par C A. Laisant et Ad. Buhl (Paris 1902), p. 413 bis 427.

5) Siehe G. Tarry, Interméd. des mathém, 12, 1905, p 175. — Auch ein Beweis, den Ed Barbette in seinem autographierten (mir nicht bekannten) Werke „Les carrés magiques du $m^{\text{ième}}$ ordre", 1912, gibt, ist nach A. Aubry (L'enseignement mathém 15, 1913, p. 263/4) nicht streng Siehe übrigens a. Barbettes Notiz im Interméd. des mathém. 20, 1913, p. 59—62; in der dort zitierten früheren Notiz desselben Verf. (ebda, t. 5, 1898, p. 83—85) handelt es sich um einige dem Eulerschen verwandte Anordnungsprobleme.

das Problem unlösbar ist, hat neuerdings P. Wernicke bewiesen.[1])

Wie schon oben (S. 61, Anm. 1) beiläufig bemerkt wurde, bezeichnet Euler die beiden Teilquadrate, durch deren Kombination wir Lösungen unseres Problems herleiteten, also die beiden Quadrate, von denen das eine die Verteilung der Regimenter, das andere die der Chargen angibt (vgl. S. 57/58), zunächst mit Buchstaben und zwar das eine mit lateinischen, das andere mit griechischen. Aus diesem Grunde spricht er denn auch kurz von einem „lateinischen Quadrat", und dieser Name hat sich seither als ständiger Terminus für eine derartige Anordnung eingebürgert, d. h. also für ein Quadrat, das in $n \times n$ Feldern n verschiedene Elemente in solcher Anordnung aufweist, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes der n Elemente ein- und nur einmal vorkommt. Wenn auch der Name „lateinisches Quadrat" zuerst bei Euler auftritt, so finden sich solche Zahlenanordnungen doch schon lange vor ihm; so sind die Hilfsquadrate, deren sich Lahire (1705) für seine im vorigen Kapitel (§ 2, S. 8 ff.) beschriebene Methode zur Bildung magischer Quadrate bedient, ja nichts anderes als „lateinische Quadrate", und auch bei Lahires Vorläufer Poignard (1704) spielen lateinische Quadrate[2]) — wohl die ersten, die in der Literatur vorkommen, — begreiflicherweise eine wichtige Rolle.[3]) — Auch

1) P. Wernicke, l. c p. 264—266

2) Siehe Poignards schon zitierte Schrift von 1704, p 8—11, 18—26, 30—36, 49—55. — Auch das Problem, ein kleines Kabinett mit 12×12 Steinen, unter denen immer je 12 von gleicher Farbe sind, so auszulegen, daß jede „Zeile" und jede „Spalte" des ganzen Quadrats jede der 12 Farben gerade einmal aufweist, ein Problem, das Poignard nach Hist de l'acad roy. des sc, année 1708 (Paris 1709), p. 71, unter gewissen Nebenbedingungen löste, erfordert natürlich zunächst, d. h. wenn man von jenen erschwerenden Nebenbedingungen absieht, nichts weiter als die Bildung eines lateinischen Quadrats

3) Solche Anordnungen von n Elementen kommen übrigens auch bei gruppentheoretischen Untersuchungen vor, nämlich als „Multiplikationstabellen" von Substitutionengruppen; s. beispielsweise bei W Burnside, „Theory of groups of finite order" (Cambridge 1897), p. 20 und 49, solche Tabellen, die lateinische Quadrate von 6 bzw 8 Elementen sind.

im Sinne unseres jetzigen Problems sind die lateinischen Quadrate nur Hilfsquadrate, und im Gegensatz zu ihnen bezeichnen wir die aus zwei (oder eventuell mehr) solchen lateinischen Quadraten komponierten Anordnungen, wie sie das Problem dieses § fordert, als „Eulersche Quadrate.“

§ 2. Diagonale Eulersche Quadrate.

Zu den Forderungen, denen die „Eulerschen Quadrate“ des vorigen § genügen mußten, wollen wir jetzt die weitere Forderung hinzufügen, daß auch die beiden Diagonalen derselben Bedingung genügen wie die Zeilen und Spalten. Erst die so entstehenden Quadrate, die wir im Gegensatz zu denen des vorigen § als „diagonale Eulersche Quadrate“ bezeichnen wollen, bilden ein vollständiges Analogon zu den magischen Quadraten; über ihr Verhältnis zu diesen wird noch weiter unten zu sprechen sein

Versuchen wir nun zunächst, das Eulersche Quadrat niedrigster Stufe, das von $n = 3$, so zu gestalten, daß es auch der „Diagonalen-Forderung“, wie wir hinfort kurz sagen wollen, genügt, so zeigt sich alsbald, daß dies unmöglich ist. Bildet man nämlich ein „lateinisches“ Quadrat für $n = 3$ und nimmt zu dem Ende, wie ohne Beschränkung geschehen darf, als oberste Zeile: 1 2 3 an, so ergeben sich nur folgende zwei Fortsetzungen:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix},$$

Vgl. a. A. Cayley, „On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\vartheta^n = 1$“, Philos. magaz. (4) 7, 1854, p 40—47 = Cayley, Collected mathem papers, vol. 2 (Cambridge 1889), p. 123—130 Einen Versuch, die Theorie der lateinischen und der magischen Quadrate auf die Substitutionentheorie zu basieren, machte E. Maillet (s die im literar. Index unter Nr 527, 528, 540 aufgeführten Arbeiten von 1894 und 1895). — Auch eine Abhandlung von J. Hadamard („La géométrie de situation et son rôle en mathématiques“), die mir freilich nur aus dem Jahrbuch uber die Fortschr. der Mathem. 41, 1910 (1913), p. 542, bekannt ist, ist vielleicht an dieser Stelle, und jedenfalls unter der Literatur dieses Kapitels, zu nennen

von denen keine in beiden Diagonalen die gestellte Forderung erfüllt, womit natürlich die behauptete Unmöglichkeit bereits erwiesen ist[1]).

Dagegen gibt es für $n = 4$ zwei wesentlich verschiedene diagonale Eulersche Quadrate[2]), nämlich die folgenden[3]):

1, 1	2, 2	3, 3	4, 4		1, 1	2, 2	3, 3	4, 4
3, 4	4, 3	1, 2	2, 1	und	4, 3	3, 4	2, 1	1, 2
4, 2	3, 1	2, 4	1, 3		2, 4	1, 3	4, 2	3, 1
2, 3	1, 4	4, 1	3, 2		3, 2	4, 1	1, 4	2, 3.

Wir können leicht eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit unseres jetzigen Problems angeben. Lassen sich nämlich die Zahlen p, q des §1 (S. 57) so wählen, daß sie nicht nur den dortigen Bedingungen genügen, sondern daß auch keine von beiden den Wert 1 oder $n - 1$ besitzt, so erhalten wir sicher

---

1) Vgl. Poignard, l. c. p. 73 und 74. — Es gibt daher an Eulerschen Quadraten für $n = 3$ nur eins: das oben (S. 57) angegebene, wenn man absieht von Vertauschungen jedes der beiden Tripel von Zahlen — einerseits derjenigen vor, andererseits derjenigen hinter dem Komma — unter sich oder, was hier auf dasselbe hinauskommt, von Vertauschungen der Zeilen und Spalten untereinander in jedem der beiden, das Eulersche Quadrat zusammensetzenden lateinischen Quadrate Daß durch solche Zeilen- und Spaltenvertauschungen sich keinenfalls ein diagonales Quadrat erzielen laßt, erkennt man übrigens auch daraus, daß in dem oben angegebenen Eulerschen Quadrat auch sämtliche gebrochenen Diagonalen (wegen dieses Ausdrucks s S. 18/19) — neben den Hauptdiagonalen — versagen

2) Ein im Handel befindliches Spiel „Zahl und Farbe" (Nr. 840/12 des Preisverzeichnisses der Zullchower Anstalten in Züllchow b. Stettin) erfordert die Bildung eines 16-feldrigen diagonalen Eulerschen Quadrats, besitzt also nur zwei wesentlich verschiedene Lösungen

3) Diese beiden Quadrate s bei Euler l c (Comm arithm), p 335 unten; das erste der beiden gibt auch Gauß in dem schon erwähnten Brief an Schumacher vom 2 April 1842 (l c p 63) an (die Gaußschen Zahlen 1, 2, 3, 4 hat man bzw durch 2, 3, 4, 1 und die Buchstaben A, B, C, D durch 1, 2, 3, 4 zu ersetzen, um die Übereinstimmung mit unserer Form herzustellen). — Dehnt man unsere Problemstellung von zwei auf drei Indizes aus, fordert man also eine Aufstellung von 16 Offizieren von vier verschiedenen Regimentern, Chargen und Orden (im Sinne Wernickes, vgl. S 56 nebst Anm 2 dort), die auch die Diagonalen-Bedingung erfüllt, so erkennt man leicht, daß eine solche unmöglich ist.

ein diagonales Eulersches Quadrat. Wir hätten also in dem Beispiel $n = 5$ des § 1 nur $q = 2$, statt 1, zu setzen gehabt und hätten so das diagonale Quadrat

1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5
3, 4	4, 5	5, 1	1, 2	2, 3
5, 2	1, 3	2, 4	3, 5	4, 1
2, 5	3, 1	4, 2	5, 3	1, 4
4, 3	5, 4	1, 5	2, 1	3, 2

erhalten. Die nach dieser Vorschrift hergestellten Quadrate genügen der Diagonalen-Bedingung nicht nur in den beiden Hauptdiagonalen, sondern sogar auch in jeder „gebrochenen Diagonale"; man wird solche Anordnungen passend „pandiagonale Eulersche Quadrate" nennen [1])

Pandiagonale Eulersche Quadrate sind, wie schon Euler bemerkte[2]), für ein durch 2 oder 3 teilbares n unmöglich. — Die beiden pandiagonalen „lateinischen" Quadrate, aus denen sich ein pandiagonales Eulersches Quadrat zusammensetzt, also das System von Zahlen vor dem Komma und ebenso das derjenigen hinter dem Komma repräsentieren offenbar je n Lösungen des in Kap. IX behandelten n-Königinnenproblems: Alle gleichen Zahlen vor dem Komma, also z B. alle Zahlen 2, stellen eine solche Lösung dar und ebenso alle gleichen Zahlen hinter dem Komma. Das soeben für $n = 5$ angegebene pandiagonale Eulersche Quadrat umfaßt mithin 10 Lösungen des 5-Königinnenproblems, d. h. alle für den betreffenden Fall überhaupt existierenden (siehe Bd I, S. 216 f. u 234 f.)[3]) Es ist daher nicht Zufall, daß sich hier wie dort (s S. 239 und 247) ein durch 2

1) Man vgl. hierzu Kap XII, S 36.

2) L c. p. 322 Im Anschluß daran dort (p 323) unser obiges Quadrat für $n = 5$ (in den schon oben — S 61, Anm 1 — angegebenen Formen).

3) Die dortige Fig. 16 (S. 235) entspricht durchaus unserem jetzigen 25-feldrigen pandiagonalen Eulerschen Quadrat und zwar in der Weise, daß unsere jetzigen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 vor dem Komma der Reihe nach den dortigen IX, VIII, VII, VI, X entsprechen und die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 hinter dem Komma den dortigen I, V, IV, III, II — S. 236, Z. 12 v. u. (Anm.) lies übrigens „Eulersches Quadrat" statt „Gaußsches Quadrat"

oder 3 teilbares n als Ausnahmefall herausstellte (vgl. auch Kap. XII und zwar bezüglich der Teilbarkeit durch 2: S. 11, 19, 46, und für die durch 3: S. 26/27, 36—38, 42, 46).

Aus jedem diagonalen Eulerschen Quadrat läßt sich natürlich, wenn man die Zahlen hinter dem Komma als „Einer", die vor dem Komma als „n-er" auffaßt (s. Kap. XII, § 2), ein magisches Quadrat gewinnen und dieses wird, wenn das Eulersche Quadrat pandiagonal war, selbstredend auch pandiagonal. Umgekehrt läßt sich aber aus einem magischen Quadrat keineswegs immer ein Eulersches Quadrat herleiten; so z. B. entsprechen die in Kap. XII, am Ende des § 2 (S. 16f.), mitgeteilten magischen Quadrate keinem Eulerschen Quadrat.[1])

Mit dem Problem, für ein bestimmtes n alle lateinischen Quadrate zu bestimmen, beschäftigen sich Arbeiten von P. A. Mac Mahon[2]).

Am Ende des Kapitels scheint es mir nicht unangebracht, die verschiedenen in dem vorigen und diesem Kapitel betrachteten Zahlengebilde in einer terminologischen Übersicht zusammenzustellen:

---

1) In dem schon mehrfach zitierten Briefe vom 2 April 1842 sagt Gauß· „Ob aber auch das Umgekehrte allgemein gilt, nemlich, daß es keine andere magische Quadrate gibt, als die aus dieser Quelle [der diagonalen Eulerschen Quadrate] abgeleitet werden können, wird wohl etwas schwerer zu entscheiden Wenn ich nicht irre, findet sich in dem von Mollweide besorgten Bande von Klugel's mathem. Worterbuch ein langer Artikel uber magische Quadrate und auch eine besondere Dissertation von Mollweide über diesen Gegenstand Mir fehlt es an Zeit, daruber jetzt Nachforschungen zu machen" (l c. p 63/64) Wie der Schluß zeigt, hat Gauß dieser nur gelegentlich im Briefe erörterten Frage keine sonderliche Beachtung geschenkt; bei naherer Prüfung wurde er natürlich sehr leicht solche magischen Quadrate, die aus jener „Quelle" nicht herleitbar sind, gefunden haben

2) Siehe die im literar Index unter Nr 570 und Nr 593 aufgeführten Arbeiten P A Mac Mahons von 1898 bzw. 1900; vgl. a den Vortrag desselben von 1902, Nr 610 unseres Index (a. a O , p. 449—451) Wegen des entsprechenden Problems der Eulerschen Quadrate s insbesondere eine Note von G Tarry im Interméd des mathém , t. 12, 1905, p 174 f

1. „Magische Quadrate“ im engeren Sinne: Eine solche Anordnung der Zahlen 1 bis n^2 in den n^2 Feldern eines Quadrats, daß jede Zeile und Spalte, wie auch jede der beiden Diagonalen dieselbe konstante Summe ergibt.

2. „Pandiagonale magische Quadrate“: Auch die „gebrochenen Diagonalen“ genügen der Bedingung 1.

3. „Eulersche Quadrate“: n Elemente der einen und n Elemente einer zweiten Art sind so in die n^2 Felder eines Quadrats eingeordnet, daß a) jedes Feld ein und nur ein Element von jeder der beiden Arten enthält, b) jedes Element der einen Art mit jedem Element der anderen Art ein- und nur einmal innerhalb des ganzen Quadrats gepaart ist, c) jede Zeile und jede Spalte des Quadrats alle n Elemente der ersten und alle n Elemente der zweiten Art gerade einmal aufweist.

4. „Diagonale Eulersche Quadrate“: Die Bedingungen 3 werden auch von den beiden Diagonalen erfüllt.

5. „Pandiagonale Eulersche Quadrate“: Die Bedingungen 3 werden auch von jeder „gebrochenen Diagonale“ erfüllt.

6. „Lateinische Quadrate“: Eine Anordnung von n Elementen in den n^2 Feldern eines Quadrats, bei der jedes Element im ganzen n-mal, und zwar in jeder Zeile wie Spalte gerade je einmal, vorkommt.

Kapitel XIV.

Anordnungsprobleme.

Répandre dans le public des choses aussi intéressantes c'est vulgariser les doctrines de l'Arithmétique et de la Théorie des Nombres.

ED. LUCAS (s. Récr. math. t. III, p. 163).

Abschnitt I. Verschiedene Anordnungen.

§ 1. Anordnungen im Kreise.

Aufgabe 1.

Eine Anzahl Kinder tanzen im Kreise herum, wobei sich die benachbarten anfassen; wie sind die verschiedenen Reigen anzuordnen, wenn jedes Kind sich ein- und nur einmal in jedes anderen Nachbarschaft befinden soll?

Da jedes Kind bei jedem Reigen 2 anderen Kindern benachbart ist, so ist unsere Aufgabe offenbar nur dann lösbar, wenn die Zahl der Kinder eine ungerade ist. Walecki gibt hierfür folgende Lösung[1]: Ist die Anzahl der Kinder etwa $2n+1$, so teile man einen Kreis in $2n$ Teile und verbinde die Teilpunkte und einen auf dem Durchmesser gelegenen $(2n+1)$-ten Punkt A in der in Fig. 1 (für das Beispiel $n=6$) angegebenen Weise. Bei der ersten Anordnung mögen, entsprechend der Reihenfolge des Linienzugs, die Kinder in der Ordnung $ABCDEFGHJKLMNA$ im Kreise aufgestellt werden. Nun denke man sich — bei festem Kreise und festen Buchstaben an seinem Umfange — den ganzen Linienzug um den Kreismittelpunkt gedreht, so daß der jetzige Durchmesser BN mit A darauf in die Richtung CM kommt, und notiere dann wieder die Buch-

---

1) Publiziert durch Lucas, „Récréat math.", II (2ième éd., 1896), p. 162.

staben in der Reihenfolge, wie der Linienzug sie angibt. Man erhält so als zweite Anordnung: *ACEBGDJFLHNKMA*, und so geht dies fort, bis der Durchmesser, auf dem *A* liegt, wieder in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, also bis der ganze Linienzug sich halb im Kreise herumgedreht hat.

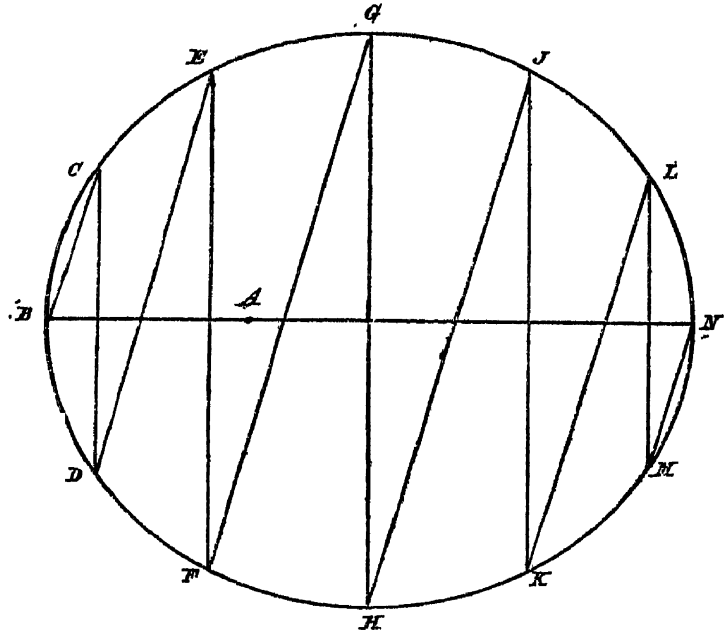


Fig 1

Man erhält so n verschiedene Anordnungen, in denen jeder Buchstabe gerade einmal jedem anderen benachbart ist, wie man leicht folgendermaßen einsieht: Zunächst ist von *A* ohne weiteres ersichtlich, daß es in den n Malen stets anderen Buchstaben benachbart ist, im ganzen also allen $2n$ Buchstaben je einmal. Die übrigen Linien des Linienzuges außer dem Durchmesser von *A* zerfallen in zwei Scharen unter sich paralleler Linien; daß die eine Schar durch Drehungen einmal etwa eine Richtung erhalte, welche die andere vorher oder nachher hat, ist ausgeschlossen, weil die Linien der einen Schar Sehnen sind, deren Bögen aus einer geraden Anzahl von Peripherieteilen bestehen, während die Bögen der Sehnen der anderen Schar eine ungerade Anzahl von

Peripherieteilen messen[1]) (z. B. ist der Bogen von $ED = \frac{3}{12}$, der von $EF = \frac{4}{12}$ der Peripherie). Die Linien einer Schar können nun aber in ihre Richtung erst nach Drehung um 180° zurückkehren, mithin müssen in den n Stellungen Linien von $2n$ verschiedenen Richtungen vorkommen, die Durchmesser mit A nicht gerechnet. Zu jedem der $2n$ Peripheriepunkte geht aber in jeder Stellung aus jeder der beiden Scharen eine Linie, außer wenn der Punkt auf dem Durchmesser von A liegt; in letzterem Falle ist es nur eine Linie der einen Schar. Zu jedem Punkt führen somit in allen Stellungen zusammen — von dem Durchmesser mit A abgesehen — Linien von 11 resp. $2n - 1$ verschiedenen Richtungen; das heißt aber natürlich, daß jeder Punkt mit allen 11 resp. $2n - 1$ anderen Punkten der Peripherie verbunden ist und zwar mit jedem gerade einmal.

Aufgabe 2.

Zwischen Knaben und Mädchen, beiden in gleicher Anzahl, soll in kreisförmiger Aufstellung bunte Reihe gemacht werden; wie sind die Anordnungen zu treffen, wenn jeder Knabe jedem Mädchen gerade einmal benachbart sein soll?[2]).

Da bei jeder Anordnung jeder Knabe 2 Nachbarinnen hat, so kann der gestellten Forderung nur dann entsprochen werden, wenn Knaben wie Mädchen in gerader Zahl vorhanden sind,

---

1) Ist nämlich ein Kreis in eine Anzahl, etwa p (hier $2n$), Teile geteilt und sind zwei Paare dieser Teilpunkte durch Sehnen verbunden und umfassen die zu diesen beiden Sehnen gehörigen Bogen $\frac{i}{p}$ resp. $\frac{k}{p}$ der ganzen Kreisperipherie (i und k also ganze Zahlen; k etwa die größere von ihnen), so umfassen natürlich auch die zwischen diesen Sehnen liegenden beiden Bogenstücke jedes eine ganze Zahl, etwa l und l', Peripherieteile (p-tel). Parallel sind nun die beiden Sehnen bekanntlich dann und nur dann, wenn die zwischen ihnen liegenden Bogenstücke gleich sind, d. h. wenn $l = l'$ ist. Da alsdann die Gleichung $2l = k - i$ besteht, so folgt, daß i und k entweder beide gerade oder beide ungerade sein müssen, w. z. b. w.

2) Siehe Lucas, „Récréat.“, II, p. 168.

sagen wir beispielsweise: zu je 6. Die Mädchen seien durch die Punkte a, b, c, d, e, f des äußeren, die Knaben durch die Punkte A, B, C, D, E, F des inneren Kreises der Fig. 2 dargestellt. Man erhält aus der ersten Stellung $aAbBcCdDeEfFa$ alle weiteren gewünschten Stellungen einfach, indem man sich den inneren Kreis gedreht denkt, so zwar, daß jeder Punkt in die Stellung des übernächsten, also A in die bisherige von C, tritt und beim nächsten Male A in die jetzige Stellung von E. Je 3 Stellungen bilden so zusammen eine Lösung unserer Aufgabe und allgemein, bei $n = 2m$ Knaben resp. Mädchen, je m Stellungen, und zwar ergeben sich aus irgendeiner richtigen Stellung, d. h. aus irgendeiner kreisförmigen Anordnung der Knaben und Mädchen in bunter Reihe, nach unserem Verfahren sogleich zugehörige $m - 1$ weitere Stellungen, die dann mit der ersten zusammen eine vollständige Lösung unserer Aufgabe repräsentieren

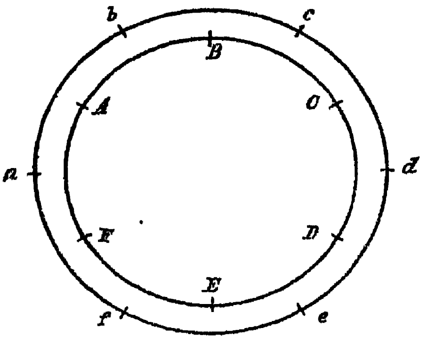


Fig 2.

Es fragt sich nun, wieviel Anordnungen von je n Knaben und n Mädchen im Kreise in bunter Reihe es überhaupt gibt, und man erkennt zunächst, daß, weil die n Elemente des inneren Kreises, die Knaben also, auf $n!$ und die n Elemente des äußeren Kreises, die Mädchen, auf ebensoviele Arten angeordnet werden können, man im ganzen $(n!)^2$ Anordnungen erhält Dabei wird man aber offenbar diejenigen Anordnungen, die nur einer Drehung der ganzen Figur im Kreise entsprechen, nicht als verschieden ansehen; es sind dies immer je n, die dergestalt zusammengehören, und ebenso wird man zwei Anordnungen, von denen die eine nur die Umkehrung der anderen ist, wie beispielsweise $aAbBcCdDeEfFa$ einerseits und $aFfEeDdCcBbAa$ andererseits, für eine zählen. Man erhält so also als verschieden im ganzen $\frac{n!\,n!}{2 \cdot n} = \frac{(n-1)!\,n!}{2}$ Anordnungen von je n Knaben und Mädchen im Kreise in bunter Reihe Von diesen gehören immer je $m = \frac{n}{2}$

zusammen zu einer Lösung unserer Aufgabe, so daß diese also $((n-1)!)^2$ Lösungen besitzt.[1])

Aufgabe 3. Das Problem der Ehepaare („problème des ménages").

Statt der Knaben und Mädchen der vorigen Aufgabe nehmen wir jetzt Ehepaare an, wobei die Männer durch große Buchstaben, die zugehörigen Ehefrauen durch die entsprechenden kleinen bezeichnet sein mögen. Unsere Aufgabe soll dann die folgende sein:

n Ehepaare sollen in bunter Reihe, etwa bei einem Diner, so angeordnet werden, daß niemals ein Mann neben seiner Ehefrau sitzt. Wieviele Anordnungen der verlangten Art sind möglich?

Der Einfachheit halber wollen wir vorläufig annehmen, daß die Plätze der Männer ein- für alle Mal — etwa in alphabetischer Folge auf einem Kreise im Drehungssinne des Uhrzeigers — festgelegt sind. Unter dieser Annahme gibt es, während bei 2 Ehepaaren natürlich überhaupt noch keine Anordnung der verlangten

---

1) Man vgl. auch Educ. Times Reprints, vol. 72, 1900, p. 86/87, wo als Question 14152 die Frage: „Auf wieviele Arten lassen sich die n Konsonanten und p Vokale eines Alphabets ($n > p$) in gerader (nicht geschlossener, also nicht kreisförmiger) Reihe so anordnen, daß jeder Vokal stets zwischen 2 Konsonanten steht?" aufgeworfen und von Allan Cunningham und W. A. Whitworth dahin beantwortet wird, daß natürlich dem ersten Vokal $n-1$ Plätze, dem zweiten $n-2$ usw., dem letzten $n-p$ zur Verfügung stehen, es also im ganzen — bei Berücksichtigung der $n!$ Anordnungsmöglichkeiten für die Konsonanten —

$$n!\,(n-1)\,(n-2)\quad\ldots\quad(n-p) = \frac{n!\,(n-1)!}{(n-p-1)!}$$

Anordnungen der verlangten Art gibt. — Für weitere verwandte Probleme sei eventuell noch verwiesen auf Educ. Times Reprints 40, 1883 (1884), p. 22—24 (W. J. C. Miller, W. J. C. Sharp, D. Biddle, T. P. Kirkman) und ibidem (2), 18, 1910, p. 109—110 (A. M. Nesbitt), sowie auf Auguste Aubry, „Problèmes abstraits et problèmes concrets", Assoc. franç. 40, Congrès de Dijon 1911, Notes et mémoires (Paris 1912), p. 47.

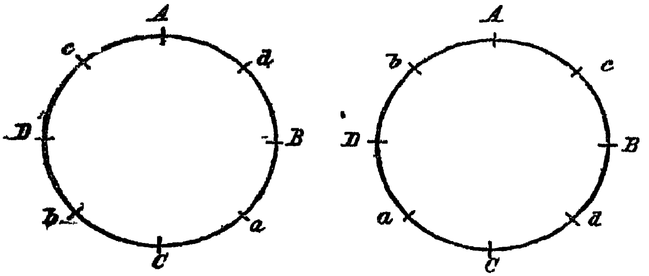


Fig. 3.

Art möglich ist, bei 3 Ehepaaren, wie man sofort sieht, eine, und bei 4 Paaren nebenstehende 2 Anordnungen[1]).

Bei 5 Paaren gibt es unter derselben Festsetzung 13, bei 12 Paaren bereits ca. 60 Millionen Anordnungen usw.

Die Antwort auf die Frage, wieviele Anordnungen der verlangten Art existieren, gibt eine Untersuchung von H. M Taylor[2]), die wir hier, wie folgt, reproduzieren wollen: Auch hier mag zunächst einmal angenommen werden, daß die Plätze der n Männer — etwa nach dem Alphabet — festgelegt sind, und die Anzahl der Möglichkeiten, die n Frauen den Bedingungen unserer Aufgabe gemäß zwischen den n Männern anzuordnen, mit $f(n)$ bezeichnet werden. Die Gesamtzahl aller möglichen Anordnungen der verlangten Art beträgt alsdann

$$\frac{(n-1)!}{2} \cdot f(n).$$

Denn ebensogut, wie von der alphabetischen, hätten wir von irgendeiner anderen Anordnung der n Männer ausgehen können und auch zu ihr offenbar $f(n)$ Anordnungen der Frauen erhalten. Es ist mithin in der ursprünglichen alphabetischen Ordnung die Permutierung der n Männer oder richtiger: die von $n-1$ Männern vorzunehmen; ein Mann ist nämlich festzuhalten, da zwei Anordnungen, die durch eine bloße Drehung der ganzen Figur auseinander hervorgehen, nicht als verschie-

1) Über eine verwandte Anordnung von 4, aus je drei Personen: Mann, Frau und Kind, bestehenden Familien s. die Arbeit von Aubry, l c p. 48

2) H M Taylor, „A problem on arrangements“, The Messenger of Mathematics 32, 1902—1903 (1903), p 60—63 Siehe dazu jedoch hier S. 79, Anm. 1 Siehe auch F Fitting, „Ein Anordnungsproblem“, Progr. Gymn M-Gladbach 1902, wo dasselbe Problem behandelt wird. — Der Fall von n Damen und n Herren, unter ihnen p Ehepaare, mit der Bedingung, daß keine Dame ihren Ehegatten zum Tischherrn hat, d. h. nicht auf einer bestimmten Seite von ihm sitzt, ist behandelt in Educ Times Reprints, New Series, vol. 1, 1902, p 72—74 (Question 6845) von Allan Cunningham und H M. Taylor

den gelten sollen Auch eine vollständige Umkehrung eines Zyklus soll natürlich nicht als wesentlicher Unterschied angesehen werden, und hierdurch rechtfertigt sich die 2 im Nenner unseres Ausdrucks.

Es handelt sich sonach nur um die Bestimmung der Funktion $f(n)$. Eine Anordnung der n Ehepaare, die unserer Bedingung entspricht, wollen wir „vollkommen", eine fehlerhafte und zwar mit einem Verstoß behaftete dagegen „einfach-unvollkommen", eine mit zwei Verstößen „doppelt-unvollkommen" nennen. Wenn nun $AxByCzD \ldots b \ldots$ eine vollkommene Anordnung ist und wir vertauschen b mit der zwischen B und C sitzenden Frau, so verwandelt sich unsere vollkommene Anordnung sicher in eine unvollkommene und zwar in eine einfach- oder eine doppelt-unvollkommene, je nachdem die vorgenommene Vertauschung allein die Ehefrau b an die Seite ihres Ehemanns führt oder auch zugleich die Frau y, die mit b den Platz wechselt. Wenn wir aus der so erhaltenen Anordnung nun Bb herausnehmen, so bekommen wir eine Anordnung von $n-1$ Paaren, die entweder vollkommen oder einfach- oder auch doppelt-unvollkommen ist, letzteres dann, wenn infolge der Fortnahme von Bb eine Frau an die Seite ihres Ehemanns gelangt und die vorhergehende Anordnung der n Paare bereits doppelt-unvollkommen war. — So folgt, daß umgekehrt jede vollkommene Anordnung der n Paare — denn die hier betrachtete war ja eine beliebige vollkommene Anordnung — erhalten werden kann aus einer vollkommenen oder aus einer einfach- oder aus einer doppelt-unvollkommenen Anordnung von $n-1$ Paaren, und zwar dadurch, daß man das $n$te Paar Bb zwischen Ax und C einschiebt und hinterher b mit einer anderen Frau den Platz tauschen laßt Diese verschiedenen Möglichkeiten wollen wir nun einzeln durchgehen, wollen jedoch zuvor noch folgende Bezeichnungen einführen·

$\varphi(n)$ sei die Anzahl der einfach-unvollkommenen Anordnungen, bei denen die Männer in alphabetischer Ordnung sitzen und bei denen der eine „Verstoß" darin besteht, daß eine bestimmte Frau, etwa die Frau a, an einer bestimmten — etwa der rechten — Seite ihres Ehemanns sitzt, und $\psi(n)$ sei die Anzahl der doppelt-unvollkommenen Anordnungen, bei denen die Manner alphabetisch angeordnet sind und wo die zwei „Verstöße" darin bestehen, daß eine bestimmte Frau an einer bestimmten Seite ihres Ehemanns und eine zweite, beliebige Frau an einer beliebigen Seite ihres Ehemannes sitzt [1])

1) Um ein Beispiel anzugeben, ist $\varphi(5) = 3$; man hat nämlich die folgenden 3 Anordnungen:

$$A\ a\ B\ d\ C\ e\ D\ b\ E\ c$$
$$A\ a\ B\ d\ C\ e\ D\ c\ E\ b$$
$$A\ a\ B\ e\ C\ b\ D\ c\ E\ d$$

1) Aus einer vollkommenen Anordnung der $n-1$ Paare, wie $AxC\ldots LcM\ldots$, kann man durch Einschieben von Bb zwischen x und C, d. h. durch Bildung von $AxBbC\ldots LcM\ldots$, eine vollkommene Anordnung der n Paare erhalten, wenn man hinterher b vertauscht mit irgendeiner der anderen $n-1$ Frauen, nur nicht mit x und mit c also auf $n-3$ Arten. Man erhält somit auf diese Weise im ganzen

$(n-3)\cdot f(n-1)$ vollkommene Anordnungen der n Paare.

2a) Aus einer einfach-unvollkommenen Anordnung von $n-1$ Paaren, wie $AcC\ldots$, kann man durch Einschieben von Bb zwischen c und C, also durch Bildung von $AcBbC\ldots$, eine vollkommene Anordnung erhalten, wenn man b vertauscht mit irgendeiner anderen Frau, nur nicht mit c, also auf $n-2$ Arten Man erhält mithin im ganzen auf diese Weise

$(n-2)\cdot\varphi(n-1)$ vollkommene Anordnungen der n Paare

2b) Ist die einfach-unvollkommene Anordnung der $n-1$ Paare von der Art $AaC\ldots$ oder von der Art $AxCc\ldots$, so erhält man durch Einschieben von Bb zunächst $AaBbC$. resp $AxBbCc$ .., jedoch lassen sich aus diesen durch Vertauschung von b mit einer anderen Frau keine vollkommenen Anordnungen erhalten.

2c) Wir haben so — unter 2a) und 2b) — bereits 3 Typen einfach-unvollkommener Anordnungen der $n-1$ Paare erledigt. Es gibt aber, da wir $n-1$ Paare haben und die Stellung jeder Frau zu b e i d e n Seiten ihres Ehemannes zu berücksichtigen ist, offenbar $2(n-1)$ solche Fälle; es bleiben uns somit deren noch $2n-5$, nämlich

$AxCdD\ldots;\ AxCyDd\ \ldots;\ \ldots;\ \ldots;\ AxCy\ldots Zz$ und $AxCy\ \ldots\ Za$

Durch Einschieben von Bb bekommt man.

$$AxBbCdD\ldots;\ AxBbCyDd\ \ldots,\ \ldots;\ \ldots;\ AxBbCy\ldots Zz \text{ und } AxBbCy\ldots Za,$$

und daraus ergibt sich überall eine vollkommene Anordnung, wenn man b mit der anderen Frau, die gleichfalls an der Seite ihres Mannes sitzt,

---

Dagegen ist $\psi(5)=8$, indem folgende 8 Anordnungen möglich sind

$$\begin{matrix}
A & a & B & b & C & e & D & c & E & d\\
A & a & B & c & C & e & D & b & E & d\\
A & a & B & e & C & c & D & b & E & d\\
A & a & B & e & C & d & D & b & E & c\\
A & a & B & e & C & d & D & c & E & b\\
A & a & B & e & C & b & D & d & E & c\\
A & a & B & d & C & b & D & e & E & c\\
A & a & B & d & C & b & D & c & E & e.
\end{matrix}$$

tauschen läßt; wir erhalten so $(2n-5)\cdot\varphi(n-1)$ vollkommene Anordnungen, so daß also schließlich die Gesamtzahl aller vollkommenen Anordnungen der n Paare, die wir aus einfach-unvollkommenen Anordnungen der $n-1$ Paare erhielten, beträgt:

$$(n-2)\cdot\varphi(n-1)+(2n-5)\cdot\varphi(n-1)=(3n-7)\cdot\varphi(n-1).$$

3) Aus einer doppelt-unvollkommenen Anordnung der $n-1$ Paare erhält man durch die angegebenen Operationen eine vollkommene Anordnung der n Paare offenbar nur dann, wenn die doppelt-unvollkommene Anordnung von der Form $AcC\ldots\ LlM\ldots$ ist, wobei aber der zweite „Verstoß", statt in der Form Ll, ebensogut auch in der Reihenfolge lL vorkommen kann. Wir erhalten also dergestalt $\psi(n-1)$ vollkommene Anordnungen der n Paare, und es erhellt hieraus, warum wir oben gerade eine Funktion ψ einführten von der besonderen Art, daß für den einen der beiden „Verstöße" das betreffende Ehepaar und seine relative Stellung bestimmt ist, während für den anderen „Verstoß" dies beliebig ist.

Wir haben so alle überhaupt möglichen vollkommenen Anordnungen der n Paare erhalten und haben dabei auch keine doppelt gezählt; denn umgekehrt ergibt sich durch die oben (S. 75) angegebenen Operationen (Vertauschung von b mit der zwischen B und C sitzenden Frau, darauf Entfernung von Bb) aus jeder vollkommenen Anordnung der n Paare eine und nur eine Anordnung der $n-1$ Paare Damit ist denn das folgende Resultat gewonnen

$$(1)\qquad f(n)=(n-3)\cdot f(n-1)+(3n-7)\ \varphi(n-1)+\psi(n-1)$$

In entsprechender Weise sehen wir, daß einfach-unvollkommene Anordnungen von n Paaren von der Form $AxBbC$ erhalten werden können durch einfaches Einschieben von Bb zwischen x und C aus vollkommenen Anordnungen von $n-1$ Paaren von der Form AxC oder aus einfach-unvollkommenen Anordnungen von $n-1$ Paaren von der Form AcC ., dagegen auf dieselbe Weise aus weiter keiner anderen Anordnung. Es ist somit

$$(2)\qquad \varphi(n)=f(n-1)+\varphi(n-1).$$

Eine doppelt-unvollkommene Anordnung von n Paaren mit der einen Unvollkommenheit Bb und einer zweiten von der Form Ll oder lL wird durch einfaches Einschieben von Bb erhalten entweder aus der doppelt-unvollkommenen Anordnung $AcC\ .\ LlM$. (resp mit dem Passus lL statt Ll) oder aus einer der einfach-unvollkommenen Anordnungen

$$AaC\ \ ;\ AxCc\ \ .;\ AxCdD.\ \ ;\ AxCyDd.\ \ ;\ldots;\cdot\ \ ;$$
$$AxC..\ Zz;\ AxC\ .\ Za$$

Da dies $2n-3$ einfach-unvollkommene Anordnungen sind, so erhalten wir also das Resultat

$$(3) \qquad \psi(n) = (2n-3)\cdot\varphi(n-1) + \psi(n-1).$$

Es ist also

$$\begin{array}{lll}
(1') & f(n+2) & = (n-1)\cdot f(n+1) + (3n-1)\cdot\varphi(n+1) + \psi(n+1). \\
(2') & f(n+1) & = (n-2)\cdot f(n) + (3n-4)\cdot\varphi(n) + \psi(n) \\
(3') & f(n) & = (n-3)\cdot f(n-1) + (3n-7)\cdot\varphi(n-1) + \psi(n-1). \\
(4') & \varphi(n+2) & = f(n+1) + \varphi(n+1) \\
(5') & \varphi(n+1) & = f(n) + \varphi(n) \\
(6') & \varphi(n) & = f(n-1) + \varphi(n-1). \\
(7') & \psi(n+2) & = (2n+1)\cdot\varphi(n+1) + \psi(n+1) \\
(8') & \psi(n+1) & = (2n-1)\cdot\varphi(n) + \psi(n). \\
(9') & \psi(n) & = (2n-3)\cdot\varphi(n-1) + \psi(n-1)
\end{array}$$

Aus (1') und (2') folgt durch Subtraktion, wenn man den Wert von $\psi(n+1) - \psi(n)$ aus (8') einsetzt

$$f(n+2) = n\cdot f(n+1) - (n-2)\cdot f(n) + (3n-1)\cdot\varphi(n+1) - (n-3)\cdot\varphi(n)$$

Entsprechend ist

$$f(n+1) = (n-1)\cdot f(n) - (n-3)\cdot f(n-1) + (3n-4)\cdot\varphi(n) - (n-4)\cdot\varphi(n-1),$$

oder, da nach (2) resp nach (5') und (6')

$$\varphi(n+1) = f(n) + \varphi(n)$$
$$\varphi(n-1) = \varphi(n) - f(n-1) \text{ ist:}$$

$$f(n+2) = n\cdot f(n+1) + (2n+1)\cdot f(n) + (2n+2)\cdot\varphi(n)$$

und $$f(n+1) = (n-1)\cdot f(n) - f(n-1) + 2n\cdot\varphi(n),$$

und durch Elimination von $\varphi(n)$ folgt hieraus schließlich.

$$(4) \quad n\cdot f(n+2) - (n^2+n+1)\cdot f(n+1) - (n^2+n+1)\cdot f(n) - (n+1)\cdot f(n-1) = 0.$$

Unter Benutzung der soeben hergeleiteten Hülfsgleichung

$$f(n+1) - (n-1)\cdot f(n) + f(n-1) = 2n\cdot\varphi(n)$$

folgern wir aus den Gleichungen (4'), (5'), (6'), d. h aus

$$f(n+1) = \varphi(n+2) - \varphi(n+1)$$
$$f(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n)$$
$$f(n-1) = \varphi(n) - \varphi(n-1),$$

sofort:

$$\varphi(n+2) - n\varphi(n+1) + n\varphi(n) - \varphi(n-1) = 2n\cdot\varphi(n)$$

oder

$$(5) \qquad \varphi(n+2) - n\cdot\varphi(n+1) - n\cdot\varphi(n) - \varphi(n-1) = 0.$$

Damit haben wir Rekursionsformeln für die Funktionen f und φ gefunden [1]), die uns die Berechnung dieser gestatten [2]); am schnellsten wird man zum Ziel kommen, wenn man zunächst die φ nach (5) berechnet [3]), wobei zu berücksichtigen ist, daß $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 0$, $\varphi(3) = 0$ ist, und sodann aus den Werten der φ nach (2) resp. (5′)

$$f(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n)$$

berechnet

Man erhält so:

n	$\varphi(n)$	$f(n)$
1	1	(— 1)
2	0	0
3	0	1
4	1	2
5	3	13
6	16	80
7	96	579
8	675	4738
9	5413	43387
10	48800	439792
11	488592	4890741
12	5379333	59216642

§ 2. Promenaden zu je zwei und Paarung der Teilnehmer von Schachturnieren.

Ein Pensionat junger Mädchen geht täglich spazieren, je zwei in einer Reihe; wie sind die Anordnungen zu treffen, wenn im Laufe der geeigneten Anzahl von Tagen jedes Mädchen einmal, aber auch nur einmal, mit jedem anderen zusammen gehen soll? [4])

---

1) Schon von Laisant und Moreau waren zur Losung unseres Problems Rekursionsformeln angegeben, die bei Lucas, „Théorie des nombres“, t I, Nr 123, p 215 und p 491—495 (Note III), veröffentlicht sind Inwiefern diese mit den Formeln Taylors übereinstimmen, war ich nicht in der Lage festzustellen, da mir bei Drucklegung dieses Buches das Lucassche Werk nicht zugänglich war.

2) Eine entsprechende, hier weniger interessierende Rekursionsformel fur ψ siehe bei Taylor, l c. p. 62

3) Bei Taylor, l.c p 63, ist die Auflösung des in (5) enthaltenen Systems linearer Gleichungen in Determinantenform angegeben

4) Dieselbe Aufgabe könnte man in folgender Fassung aussprechen: Alle Steine eines Dominospiels, dessen höchste Nummer eine ungerade-

Ist die Anzahl der Mädchen ungerade, so ist natürlich immer ein Mädchen überzählig und geht dann neben der Pensionatsvorsteherin; wir zählen deshalb die letztere in dem Fall einer ungeraden Anzahl mit, so daß wir auf jeden Fall mit einer geraden Anzahl Personen zu tun haben. Ist $2n$ diese Anzahl, so teilen wir nach Walecki[1]) einen Kreis in $2n-1$ Teile, bezeichnen Mittelpunkt und Teilpunkte, wie in Fig. 4 für $n=6$ angegeben, und ziehen die dort verzeichneten Linien. Die Anordnung des ersten Tages erhalten wir, indem wir die an den Enden einer Sehne resp des Radius stehenden Buchstaben kombinieren, also: AM, BL, CK, DJ, EH, FG; die nächste, indem wir bei festen Buchstaben das System der Linien so weit drehen, daß der Radius durch den nächsten Teilpunkt (B) geht, und nun wieder kombinieren wie zuvor, und so fort, bis der Radius in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt Dabei mag bei ungerader Anzahl der Mädchen der Buchstabe in der Mitte für die Vorsteherin gelten [2]) — Daß so jede Person je einmal mit jeder anderen kombiniert wird, erkennt man leicht folgendermaßen: Wegen der Teilung der Peripherie in eine ungerade Anzahl

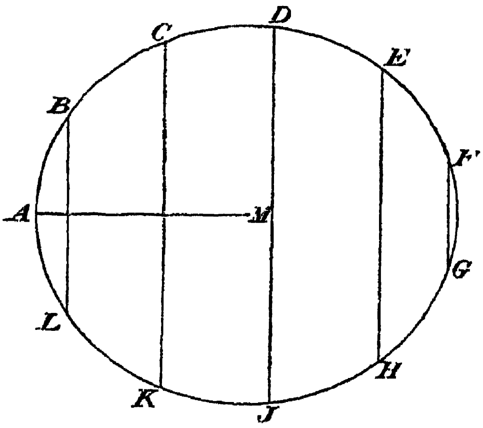


Fig. 4.

(9 etwa) ist, mit Ausschluß der Doppelnummern sind so in Reihen anzuordnen, daß in jeder Reihe jede Nummer (0, 1, 2 . 9) gerade einmal vorkommt

1) Lucas, „Récréat", II, p. 177

2) Man könnte natürlich mit Désiré André, „De l'organisation des assauts complets", Bull de la soc philomathique (9) II, 1899—1900 (1900), p. 66, den Buchstaben M auch auf die Peripherie, und zwar zunächst unendlich dicht neben A, legen; nach der ersten Drehung würde er dann unendlich dicht neben B liegen usw. An Stelle der Radien AM, BM usw hätten wir dann Tangenten AM, BM usw. parallel zu dem jeweiligen System von Sehnen.

Teile kehren der Radius und damit auch die zu ihm senkrechten Sehnen erst nach einer Drehung um 360° in ihre ursprünglichen Richtungen zurück. Wir erhalten somit $2n - 1$ Anordnungen in der Art der Fig. 4; von jedem einzelnen Teilpunkt der Peripherie gehen also in allen Stellungen zusammengerechnet $2n - 1$ Linien aus und zwar $2n - 2$ Sehnen und 1 Radius. Nicht nur die $2n - 1$ Systeme von Sehnen unter sich und ebenso die $2n - 1$ Radien unter sich sind von verschiedener Richtung, sondern auch die Sehnen können offenbar nie mit einem der in Betracht kommenden Radien parallel sein.[1]) So haben also alle $2n - 1$ von demselben Teilpunkt ausgehenden Linien verschiedene Richtung und, da sie alle wieder zu Teilpunkten (resp. zum Mittelpunkt) hinführen, so sind irgend zwei Punkte ein-, aber auch nur einmal, mit einander verbunden, w. z. b. w.

Von großer praktischer Bedeutung ist unsere Aufgabe für die **Schachturniere**, bei denen in jeder „Runde" jeder Teilnehmer mit jedem anderen in je einer „Partie" die Klinge kreuzen soll und sich nun die Frage erhebt, wie diese Paarungen vorzunehmen sind.[2]) Dabei wollen wir der Einfachheit halber annehmen, daß ebenso, wie die Pensionatsmädchen jeden Tag einen Spaziergang machen, die Turnierteilnehmer jeden Tag gerade je eine Partie spielen und beenden. Während wir es aber bei den Pensionatspro-

1) Angenommen, eine der in Betracht kommenden Sehnen und einer der in Betracht kommenden Radien wären parallel, so würde man hieraus — durch Verlängerung des Radius zum Durchmesser — sogleich folgern müssen (vgl. a. S. 71, Anm. 1), daß die Peripherie im Gegensatz zu unserer Annahme in eine gerade Anzahl gleicher Teile geteilt wäre.

2) Natürlich bieten Spiel und Sport auch außerhalb des Schach Anlaß zu solchen Fragestellungen; die soeben (Anm. 2, S. 80) zitierte Abhandlung von D. André (l. c. p. 45—73) betrifft ja z. B. die Paarungen bei Fechterturnieren. — Die Frage der Anordnung von $4n$ Teilnehmern eines Whist-Turniers dergestalt, daß jeder Turnierteilnehmer jeden anderen ein- und nur einmal als Partner, zwei- und nur zweimal als Gegner erhält, hat E. H. Moore einer Untersuchung unterworfen („Tactical Memoranda", Amer. Journ. of Mathem. 18, 1896, p. 290—303).

menaden als irrelevant ansahen, welches Mädchen rechts und welches links ging, ist es hier bei den Turnieren wesentlich, welcher der beiden Spieler anzieht resp. die weißen Figuren erhält. **Wir haben daher unsere obige Lösung, um sie für ein Turnier brauchbar zu machen, so einzurichten, daß jeder Teilnehmer ebenso oft Weiß wie Schwarz erhält.**[1]) Dies läßt sich genau natürlich nur bei einer ungeraden Anzahl von Teilnehmern machen, da nur dann jeder Teilnehmer eine gerade Anzahl Partien in der ganzen „Runde“ spielt, also ebenso oft Weiß wie Schwarz haben kann. An Stelle der Pensionatsvorsteherin haben wir uns jetzt, aber natürlich auch nur bei ungerader Personenzahl, einen „blinden“ Spieler zu denken; der mit diesem jeweilig kombinierte Spieler hat seinen „freien Tag“.

Haben wir **erstens eine gerade Anzahl von Teilnehmern**, so beginnen wir damit, die erste und zweite Paarung festzustellen, ohne dabei zunächst die Frage des Anzugs zu berücksichtigen; es ergeben sich so z. B. bei 8 Teilnehmern für die beiden ersten Tage nach unserem Waleckischen Verfahren (s. Fig. 5) die Paarungen:

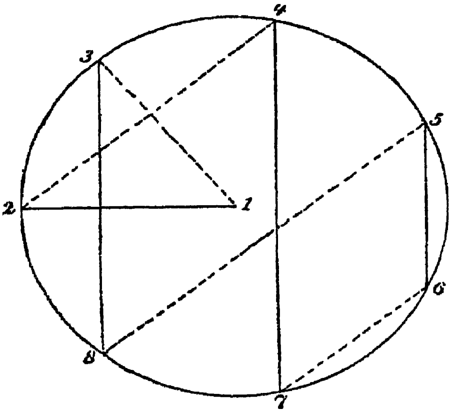


Fig 5.

I.	1, 2	3, 8	4, 7	5, 6
II.	1, 3	2, 4	5, 8	6, 7.

Da nun die Linien zweier benachbarter Stellungen ein zusammenhängendes geschlossenes Diagramm (s. Fig. 5) bilden, so können wir, ausgehend etwa von einer beliebigen Ecke 1 längs der ausgezogenen Linie, alle Linien unserer Figur (Achteck) durchwandern und zum Ausgangspunkte zurückkehren. Dabei bezeichnen wir die Linien nach der Richtung der Durchwanderung und erhalten so zunächst 1, 2; dann 2, 4 (nicht etwa 4, 2) usw. und, wenn wir nun festsetzen,

---

1) Vgl. eine Arbeit des Verfassers „Über die Paarung der Turnierteilnehmer.“ Deutsche Schachzeitung, Bd. 55, 1900, p. 130—132.

daß in jeder Kombination die erste Ziffer das Recht auf den Anzug gewährt, so erhält offenbar jeder Spieler an den beiden ersten Tagen dies Recht je einmal. Für unser Beispiel bekommen wir so:

I.	1, 2	8, 3	4, 7	6, 5
II.	3, 1	2, 4	5, 8	7, 6.

Auch den dritten und vierten Tag nehmen wir in dieser Weise zusammen und ebenso darauf den 5. und 6. Tag, während bei dem letzten, überzähligen Tage die Reihenfolge der Zahlen eines Paares willkürlich ist. Da in praxi jeder Spieler seine Nummer durch das Los erhält, nachdem vorher mit diesen Nummern statt der Namen das Spielprogramm einschließlich An- und Nachzug festgelegt ist, so ist es in Fortunas Hand gegeben, ob ein Teilnehmer einmal mehr Weiß oder Schwarz bekommt. Bei sogenannten doppelrundigen Turnieren, d. h. solchen, bei denen der ersten Runde eine zweite mit demselben Paarungsprogramm, jedoch überall mit Wechsel von An- und Nachzug, folgt, wird diese Ungleichheit natürlich vermieden [1])

Ist zweitens die Anzahl der Teilnehmer ungerade, die Anzahl der Partien jedes Einzelnen also gerade, so läßt sich die Ungleicheit in An- und Nachzug natürlich vermeiden. Wie dies geschehen kann, wollen wir an dem Beispiel eines Turniers von 7 Teilnehmern zeigen Der hinzuzunehmende Blinde sei 1; dann ergeben sich zunächst nach der obigen (Waleckischen) Methode ohne Rücksicht auf den Anzug folgende Anordnungen:

I.	1, 2	3, 8	4, 7	5, 6
II	1, 3	2, 4	5, 8	6, 7
III	1, 4	3, 5	2, 6	7, 8
IV	1, 5	4, 6	3, 7	2, 8
V	1, 6	5, 7	4, 8	2, 3
VI.	1, 7	6, 8	2, 5	3, 4
VII.	1, 8	2, 7	3, 6	4, 5

1) Doppelrundige Turniere sind jedoch wegen ihrer langen Zeitdauer nicht sonderlich häufig

Ordnen wir nun für die Tage I—VI, ebenso wie oben, An- und Nachzug, so würden wir für diese 6 Tage eine gleichmäßige Verteilung der Farben für alle Spieler haben, wenn die dem Blinden zuerteilten Partien wirklich zur Ausführung gelangten. Durch den Ausfall dieser Partien fällt nun aber für den einen Spieler ein Anzug, für den anderen ein Nachzug fort, und es fällt dem letzten Tage (VII) die Aufgabe zu, diese Ungleichheit wieder aufzuheben. Hat nun 1 (der Blinde), wie oben, in I Weiß, also in II Schwarz, in III wieder Weiß, also in IV Schwarz usw., so fällt offenbar für alle „geraden" Spieler (2, 4 ...) je ein Nachzug und für alle „ungeraden" (3, 5 ...) je ein Anzug aus. Wie man aus der Fig. 5 nun leicht erkennt, ist nicht nur in unserem speziellen Beispiel, sondern stets an dem letzten Tage überall ein gerader mit einem ungeraden Spieler gepaart; dasselbe gilt außerdem nur noch für den ersten Tag, und zwar hat dies natürlich darin seinen Grund, daß 2 und 8 bezw. 2 und $2n$ infolge der Sonderstellung von 1 die einzigen Kreisteilpunkte sind, denen auf der einen Seite ein „gerader" und auf der anderen ein „ungerader" Teilpunkt benachbart ist, während alle anderen Punkte entweder 2 gerade oder 2 ungerade Nachbarn haben. Gibt man also an dem letzten Tage den geraden Spielern überall Schwarz und den ungeraden Weiß, so wird dadurch gerade jene vorige Ungleichheit wieder kompensiert und vollste Gleichheit bezüglich des Anzugs für alle Spieler erzielt.

Eine andere Methode für die Paarung der Turnierteilnehmer hat der verstorbene Leipziger Mathematiker R. Schurig gegeben.[1]) Anscheinend war er der erste, der ein methodisches Verfahren zur Herstellung der Paarungstabellen[2]) anwandte; bis

1) Deutsche Schachzeitung, Bd 41, 1886, p 134, sowie Bd 49, 1894, p. 33—38; s. a. das „Schach-Jahrbuch" von J. Berger, sowie den Abdruck daraus in Ranneforths Schach-Kalender (Jahrg 1907, p. 41—48)

2) Über die Paarungstabellen von Deelman, dem Sekretär des Staunton-Club zu Groningen, resp. über einen Vortrag von P H Schoute hierüber auf dem Kongreß der Association française pour l'avancement des sciences zu Limoges 1890 s. neben dem kurzen Referat in den Comptes rendus der Association, XIX, t I (Paris 1890), p. 148, die Tageszeitung „L'écho de Paris" vom 22. Sept. und 4 Okt. 1890 (s. a hier im liter.

dahin waren dieselben empirisch für jeden einzelnen Fall aufgestellt, und, so unglaublich es klingt, die rechtzeitige Eröffnung des Nürnberger Turnieres 1883 schien fast in Frage gestellt, da Schachmeister Schallopp, der Verfertiger der Paarungstabellen, die in Frage kommende Tabelle zu Hause vergessen hatte.[1])

In etwas anderer Fassung wiedergegeben[2]), gestaltet sich das Verfahren Schurigs, an dem Beispiel von 7 Teilnehmern veranschaulicht, folgendermaßen: Man schreibt zunächst in 4 (Anzahl der Paare unter Zurechnung eines Blinden) Spalten jedesmal den Zyklus der Zahlen 1 . . . 7 hin und zwar die erste Spalte mit 1 beginnend, die zweite mit 2 beginnend und mit 1 endigend, die dritte mit 3 beginnend und mit 2 endigend, die vierte mit 4 beginnend und mit 3 endigend, also folgendermaßen:

1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	1
6	7	1	2
7	1	2	3.

Rechts neben jede dieser 4 Spalten schreibt man je eine weitere Spalte der 7 Zahlen, und zwar sollen diese Spalten, da die bisherigen mit 1, 2, 3, 4 begannen, mit 5, 6, 7 und 1 anfangen, jedoch so, daß die mit 5 beginnende Spalte an das rechte Ende

Index. Nr 488) Die dort gegebene Methode ist im wesentlichen dieselbe wie die Schurigsche, und zwar diese in der hier von uns wiedergegebenen Form genommen

1) Siehe E Schallopp, „Der dritte Kongreß des deutschen Schachbundes. Nürnberg 1883“ (Leipzig 1884), p. 29, 37 Erst spät in der Nacht vor Eröffnung des Turniers gelang es Schallopp mit Unterstützung eines anderen Herrn, die Tabelle abzuschließen. — Über die Schalloppschen Tabellen selbst s. E Schallopp, „Der Schachkongreß zu Leipzig im Juli 1877“ (Lpz. 1878), p. 33 u. 34.

2) Vgl. v. d. Verfasser dieses Buches: „Über die Paarung der Turnierteilnehmer.“ Deutsche Schachz., Bd. 55, 1900, p. 98/99.

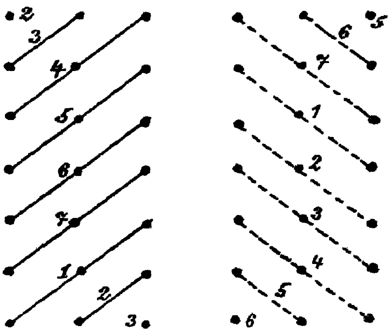
des Schemas kommt, die mit 6 beginnende sich dann nach links hieran anschließt und so weiter fort. Wir erhalten so schließlich:

1, 1	2, 7	3, 6	4, 5
2, 2	3, 1	4, 7	5, 6
3, 3	4, 2	5, 1	6, 7
4, 4	5, 3	6, 2	7, 1
5, 5	6, 4	7, 3	1, 2
6, 6	7, 5	1, 4	2, 3
7, 7	1, 6	2, 5	3, 4

Diese Tabelle liefert uns direkt das fertige Paarungsprogramm, indem immer die erste Ziffer den Anspruch auf Weiß gibt. Die Doppelnummern 1, 1 usw. bedeuten, daß der Betreffende dann frei ist. — Die Tabelle gilt aber auch zugleich für 8 Teilnehmer, indem dann in den Doppelnummern abwechselnd die erste und zweite Ziffer durch 8 ersetzt wird.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich nun folgendermaßen: Zunächst sieht man, daß bei ungerader Anzahl von Teilnehmern jeder derselben ebenso oft im Anzug wie im Nachzug ist, da alle Zahlen immer in den vorderen, wie hinteren Spalten je einmal vorkommen, und aus diesem Grunde wird übrigens offenbar auch bei gerader Teilnehmerzahl so weit, wie möglich (s. oben), Gleichheit im An- und Nachzug erzielt Ferner kommen in jeder Zeile alle Spieler je einmal vor, wenn wir die Doppelnummern links als je eine Zahl rechnen; die Zahlen jeder Zeile ergeben sich nämlich aus den entsprechenden der darüberstehenden, indem man zu den letzteren überall 1 addiert, wobei statt 8 jedoch 1 zu setzen ist. Würde also irgendwo in einer Zeile dieselbe Zahl zweimal stehen, so müßte dies auch schon in der ersten Zeile der Fall sein, was aber nach Herstellung der Tabelle ausgeschlossen ist. Es fragt sich also nur noch, ob auch vielleicht dieselben Teilnehmer zweimal und dafür andere gar nicht gepaart werden. Zu dem Zweck denken wir uns die verschiedenen Partien durch Punkte veranschaulicht und diejenigen Partien,

in denen 1 am Anzug ist, durch eine Linie verbunden, an die wir 1 schreiben; entsprechend machen wir es für 2 usw. Wir erhalten so die Fig. 6a (die „Linien“ 2 und 3 zerfallen in je zwei Teile, je eine wirkliche Linie und einen isolierten Punkt). Man sieht leicht, daß und warum diese Linien parallel sein müssen. Wir machen nun dasselbe für die Partien des Nachzugs und wählen hier gestrichelte Linien; wieder erhalten wir parallele Linien, jetzt aber in der anderen Diagonalrichtung (s. Fig. 6b). Jeder Punkt der Doppelfigur bedeutet eine Turnierpartie, und zwar weist ein Punkt der linken Figur auf dieselbe Partie wie der korrespondierende Punkt der rechten Figur. Um nun zu erkennen, wann zwei Spieler zusammen spielen, denken wir uns die beiden Figurenhälften mit korrespondierenden Punkten aufeinander gelegt; unter dieser Vorstellung spielen zwei



a) Fig. 6 b)

Spieler immer dann zusammen, wenn die Linien des einen Spielers mit denen des anderen einen „Punkt“ gemein haben, wobei als „Punkte“ jedoch nur die in der Figur markierten gelten. Man erkennt so, daß sich für jedes Spielerpaar immer gerade ein solcher Punkt ergibt; er gehört zugleich der ausgezogenen Linie des einen Spielers (4 z. B.) und der gestrichelten des anderen (7 beispielsweise) an. Es genügt, daß man sich für ein Paar Spieler hiervon überzeugt, da für jedes andere Paar die Verhältnisse ebenso liegen (man könnte sich die rechteckige Figur zu einem Zylinder aufgerollt denken, indem man das untere Ende an das obere anschließt).

Aus den Kreisen der praktischen Schachspieler heraus ist die Forderung gestellt, die Paarungstabellen so einzurichten, **daß niemals ein Turnierteilnehmer in irgend 2 aufeinanderfolgenden Partien beide Male Weiß oder beide Male Schwarz hat, sondern Anzug und Nachzug für jeden Einzelnen ausnahmslos abwechseln.** Bei gerader Spielerzahl ist freilich dieser Übel-

stand nicht ganz zu vermeiden[1]), und es kann höchstens die Forderung erhoben werden, ihn auf ein Minimum von Vorkommnissen zu beschränken. Nehmen wir nämlich beispielsweise wieder 8 Teilnehmer an und geben wir den Spielern 1, 2, 3, 4 am ersten Tage den Anzug und 5, 6, 7, 8 den Nachzug, so wollen wir einen Augenblick die Spieler 1, 2, 3, 4 als die „erste Klasse“ und 5, 6, 7, 8 als „zweite Klasse“ bezeichnen. Der erste Tag des Turniers zeigt dann den Charakter, daß die erste Klasse gegen die zweite kämpft, wobei die Spieler der ersten Klasse an allen vier Brettern den Anzug haben. Soll nun für jeden einzelnen Spieler Anzug und Nachzug regelmäßig abwechseln, so müßten am zweiten Tage alle Spieler der ersten Klasse Schwarz, alle der zweiten dagegen Weiß erhalten, ebenso am vierten und sechsten Tage, während am dritten und fünften Tage wiederum die erste Klasse Weiß und die zweite Schwarz erhielte. Dann würden ja aber die Spieler der ersten Klasse ausschließlich gegen die der zweiten spielen und z. B. niemals die Spieler 1, 2, 3, 4 unter sich. Damit also tatsächlich, wie wir doch verlangen, jeder Spieler gerade einmal mit jedem anderen spielt, muß offenbar von Zeit zu Zeit je ein Spieler aus der ersten „Klasse“, um in dieser Sprechweise zu bleiben, zu der zweiten Klasse und umgekehrt übertreten, und von diesen beiden die Klasse wechselnden Spielern hat dann der eine zweimal hintereinander Weiß, der andere zweimal Schwarz.

Bei unserer Anwendung der Waleckischen Methode dürfte jedoch die Zahl der Farbenfolgen tatsächlich auf ein Minimum beschränkt sein. Um dies zu erkennen, greifen wir zunächst zurück auf Fig 5 Dieselbe veranschaulichte uns die Paarung einer geraden Anzahl von Spielern für die beiden ersten Tage. Wir wollen für die Anordnungen von zwei in dieser Weise miteinander verbundenen, aufeinanderfolgenden Tagen kurz ein Kombinationsschema anmerken, indem wir die Ecken des Polygons der betreffenden Figur, beginnend mit einem Spieler, der in der ersten

1) Vgl. eine Note des Verfassers, Deutsche Schachzeitung, Bd 55, 1900, p. 227/228.

Partie Weiß hat, also etwa mit 1, der Reihe nach aufschreiben. Wir erhalten so für das dortige Beispiel zunächst als Schema:

$$1, 2, 4, 7, 6, 5, 8, 3$$

und können hiernach dann sofort die Paarungstabelle für die beiden ersten Tage hinschreiben. Allgemein bei $2n$ Spielern erhält man offenbar für dies erste Schema:

$$1, 2, 4, 2n-1, 6, 2n-3, 8 \; .. 5, 2n, 3.$$

Sehen wir von den beiden ersten Ziffern ganz ab, so wechseln also gerade und ungerade Zahlen miteinander ab, die ersteren mit 4 am linken Ende beginnend, die letzteren mit 3 am rechten. Wenn wir also wieder von 2 „Klassen" sprechen wollen, so gehören zu der ersten Klasse: Spieler 1 und alle „geraden" Spieler außer 2, und zu der zweiten Klasse: 2 und alle „ungeraden" Spieler außer 1. Das zweite Schema nun, das uns die Paarungen für den dritten und vierten Tag liefert, erhalten wir aus der Figur 5, indem wir das Liniensystem um 2 Peripherieteilpunkte weiter im Uhrzeigersinne drehen, also rechnerisch, indem wir alle Zahlen mit Ausnahme der 1, die unverändert bleibt, um 2 erhöhen, wobei von einer Zahl, die $> 2n$ ist, $2n-1$ zu subtrahieren ist Dies zweite Schema ist demnach:

$$1, 4, 6, 2, 8, 2n-1, 10, 2n-3, 12 \ldots 2n, 7, 3, 5$$

Es besteht also jetzt die erste Klasse aus 1, 3 und allen geraden Spielern außer 2, 4 und die zweite aus 2, 4 und allen ungeraden Spielern außer 1, 3. Alle Spieler, die an dem ersten Tage Weiß und an dem zweiten Schwarz hatten, haben also an dem dritten Tage auch wieder Weiß und an dem vierten Schwarz mit Ausnahme von 4, der infolge seines Übertritts von einer zur anderen Klasse zweimal hintereinander, nämlich an dem zweiten und dritten Tage, Schwarz und dann an dem vierten Weiß hat. Andererseits haben alle Spieler, die mit „Schwarz, Weiß" begonnen haben (1. u. 2. Tag), jetzt (3. u. 4. Tag) wieder „Schwarz, Weiß" mit Ausnahme von 3, der infolge seines Übertritts von der zweiten zur ersten Klasse gleichfalls eine Farbenfolge: zweimal hintereinander Weiß, nämlich am 2. und 3. Tage, erduldet. In derselben Weise, wie das zweite Schema aus dem ersten, geht nun das

dritte aus dem zweiten hervor, und man sieht, daß stets nach einer ungeraden Anzahl von Partien, also z. B. nach dem 5. Tage, ausnahmslos für alle Spieler Farbenwechsel eintritt, nach einer geraden Anzahl, z. B. nach dem 6. Tage, zwar für das Gros der Teilnehmer auch Farbenwechsel, jedoch nicht für diejenigen zwei Spieler, die von den beiden Klassen gegeneinander ausgetauscht werden und von denen der eine zweimal hintereinander Weiß, der andere zweimal hintereinander Schwarz erhält. Auch am letzten Tage, der ja bei gerader Spielerzahl eine, wie wir oben sahen, unvermeidliche Ungleichheit in der Verteilung von An- und Nachzug in das Paarungsprogramm hineinträgt, lassen sich die Farbenfolgen ebenso wie vorher beschränken, und schließlich *erleidet also im Laufe des ganzen Turniers jeder Spieler gerade einmal eine Farbenfolge mit Ausnahme von zwei Spielern, die hiervon ganz verschont bleiben und von denen der eine am ersten und letzten Tage Weiß, der andere an diesen beiden Tagen Schwarz hat* Diese beiden Spieler bleiben eben während des ganzen Turniers in ihren ursprünglichen Klassen; mehr als je ein Spieler darf aber offenbar nicht beständig derselben Klasse angehören, da sonst ja nicht alle Spieler miteinander gepaart würden

Ist die Anzahl der Spieler ungerade, so stellen wir zunächst unter Zuhilfenahme eines Blinden genau wie oben die Schemata her. Da wir alsdann — unter Einrechnung des Blinden — wieder eine gerade Anzahl von Spielern haben, so würde also, wie oben, folgen, daß für jeden Spieler mit Ausnahme von zweien gerade je einmal eine Farbenfolge eintreten würde, wenn die Partien des Blinden wirklich gespielt würden Wegen des Fortfalls dieser Partien muß man nun aber zunächst darauf gefaßt sein, daß für jeden Spieler noch eine weitere Farbenfolge auftritt, indem z B. in der Reihe „Weiß, Schwarz, Weiß“ etwa „Schwarz“ gerade herausfällt; ja, es könnte durch einen unglücklichen Zufall sich ereignen, daß ein Spieler unmittelbar nach der für ihn ohnehin unvermeidlichen Farbenfolge seine Partie mit dem Blinden, also seinen freien Tag, hat und dann die nächste Partie wieder mit derselben Farbe, also 3 Partien hintereinander mit derselben Farbe, zu spielen hat. Andererseits können aber die im vorigen

Falle unvermeidlichen Farbenfolgen auch gerade durch die Partien mit dem Blinden aufgehoben werden, indem z. B. von der Folge „Schwarz, Schwarz“ etwa das eine „Schwarz“ als Partie mit dem Blinden fortfällt. Dies wird bei denjenigen Spielern eintreten, die entweder unmittelbar vor oder unmittelbar nach ihrem Übertritt von der einen zur anderen Klasse mit dem Blinden gepaart sind. Man wird nun diese Beseitigung der Farbenfolge gleichmäßig **für alle Spieler** erreichen, wenn man etwa den Blinden stets in derselben, der „ersten“ Klasse läßt (2 Spieler wechseln ja die Klasse nicht) und ihn nun immer mit demjenigen Spieler paart, der nach der betreffenden Partie aus der zweiten Klasse austreten soll, bzw. mit dem, der gerade in diese Klasse übergetreten ist. An dem ersten, in dieser Hinsicht gewissermaßen überzähligen Tage ist der Blinde danach offenbar mit demjenigen Spieler zu paaren, der gleich ihm selbst die Klasse nie wechselt; an dem zweiten Tage sodann mit demjenigen, der von der zweiten Klasse designiert ist, nach Beendigung dieser Partie zu der Klasse des Blinden überzutreten; an dem dritten Tage mit demjenigen, der vor dieser Partie aus der Klasse des Blinden in die andere übergegangen ist usw. Unsere oben (S. 83f.) an einem Spezialfall (7 Spieler) dargelegte Paarungsmethode ist nun hierauf schon zugeschnitten, und wir erhalten allgemein für $2n$ Spieler, unter denen 1 der Blinde ist, folgende Schemata:

$$\begin{array}{llllllllll}
1, & 2, & 4, & 2n-1, & 6, & 2n-3, & 8 & \ldots 5, & 2n, & 3 \\
1, & 4, & 6, & 2, & 8, & 2n-1, & 10 & \ldots 7, & 3, & 5 \\
1, & 6, & 8, & 4, & 10, & 2, & 12 & \ldots 9, & 5, & 7 \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot\,\cdot\,\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot \\
1, & 2n-2, & 2n, & 2n-4, & 3, & 2n-6, & 5 & \ldots 2, & 2n-3, & 2n-1
\end{array}$$

$$1,\ 2n \mid 3,\ 2n-2 \mid 5,\ 2n-4 \mid 7\ .\ 4 \mid 2n-1,\ 2.$$

Dabei repräsentiert jede Zeile 2 Tage, die letzte dagegen nur einen. Man sieht leicht, daß für keinen Spieler jemals eine Farbenfolge vorkommt; so hat beispielsweise 2 zunächst seinen freien Tag (resp. „Schwarz“ gegen den Blinden), dann „Weiß“, darauf „Schwarz“ und immer abwechselnd; 3 hat zunächst „Schwarz“,

dann seinen freien Tag (resp. „Weiß“ gegen den Blinden), darauf wegen seines Übertritts zur anderen Klasse „Weiß“ und nun abwechselnd. *In diesem Fall einer ungeraden Spielerzahl haben wir also vollkommene Gleichmäßigkeit für alle Spieler sowohl bezüglich des Anzugs wie des Farbenwechsels erreicht, was bei gerader Spielerzahl jedoch, wie gesagt, unmöglich ist.*

Noch klarer vielleicht treten diese Verhältnisse hervor, wenn man der Schurigschen Paarungsmethode eine Form gibt, die Herr Robert Remak — ohne Kenntnis der Schurigschen Arbeiten — mir brieflich mitgeteilt hat (März 1907)[1]). Fig. 7 mag diese Methode veranschaulichen, und wir wollen der Figur nur wenige Worte hinzufügen: Jedem Teilnehmer entspricht eine bestimmte Linie, die gerade oder einmal im rechten Winkel umgebogen ist; so kommt 1 nur längs der punktierten Linie vor, hier aber in jedem Punkte, und zwar — abgesehen von dem Punkte oben links — abwechselnd an erster und an zweiter Stelle. Ebenso kommt 2 nur längs einer im rechten Winkel umgebogenen Linie vor, hier aber überall und zwar auch abwechselnd an erster und an zweiter Stelle, wenn wir die Umbiegungsstelle, an der die 2 isoliert steht

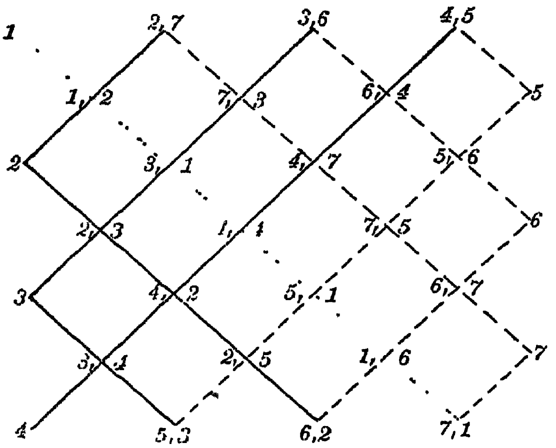


Fig. 7

1) Die resultierende Paarungstabelle ist mit der Schurigschen — bei Anwendung der Schurigschen Methode in ihrer ursprünglichen Form — identisch — Die Frage, ob wesentlich verschiedene Paarungstabellen möglich sind, d. h. solche, die nicht durch eine Permutation der Elemente (Spieler und Tage) ineinander übergeführt werden können, ist nach Remak (Brief vom 16. IX. 1909) dahin zu beantworten, daß für 6 oder weniger Turnierteilnehmer diese Möglichkeit nicht besteht, während sich für den Fall von 7 Teilnehmern jedenfalls bereits zwei wesentlich verschiedene Paarungstabellen angeben lassen.

— Partie mit dem Blinden —, nicht mitzählen. Offenbar schneidet oder trifft nun jede Linie, z. B. 3, jede andere, z. B. 5, ein- und auch nur einmal; jeder Teilnehmer wird also mit jedem anderen einmal gepaart. Für jeden Teilnehmer wechselt auch An- und Nachzug fortwährend, da die ihm entsprechende Zahl einmal an erster, das nächste Mal an zweiter Stelle steht. Auch der Fall, daß bei unserer Herstellung der Figur irgendwo ein erster oder ein zweiter Platz zweimal besetzt wird und dafür der andere leer bleibt, kann bei ungerader Teilnehmerzahl, auf die allein wir uns hier beschränken wollen, nicht eintreten, wie man leicht erkennt: Abgesehen von der punktierten Linie 1, der wir eine Sonderstellung geben, können wir uns die übrigen Linien in zwei Klassen eingeteilt denken: die erste besteht aus den in der Figur ausgezogenen Linien, welche die für sie charakteristische Zahl oben in der ersten Zeile auf dem ersten Platz — d. h. mit Anzug — aufweisen, während an den Linien der zweiten Klasse, die in der Figur gestrichelt sind, die charakteristische Zahl in der obersten Zeile an zweiter Stelle steht. Wir wollen diese Punkte der ersten Zeile als die „Anfangspunkte" der Linien ansehen und von da ab auf jeder Linie die Abstände messen, wobei wir als Längeneinheit den Abstand zweier Nachbarpunkte einer Linie, z. B. die Strecke von 2,7 zu 1, 2, annehmen, so daß also beispielsweise der Punkt 2, 3 auf der Linie 3 vom Anfangspunkt (3, 6) um die Strecke 3 entfernt ist. Derselbe Punkt ist aber auf der Linie 2 vom Anfangspunkt (2, 7) auch um die Strecke 3 entfernt, und man sieht leicht[1]), daß in diesem Sinne allgemein der Punkt i, k vom Anfangspunkt der Linie i ebenso weit wie vom Anfangspunkt der Linie k entfernt ist. Betrachten wir nun zunächst den

1) Ob man beispielsweise auf dem Umfang des Rechtecks 3,6 — 3 — 5,3 — 5,6 von 3,6 aus über die Ecke 3 zu 5,3 fortschreitet oder aber über die Ecke 5,6, macht für die Wegelange keinen Unterschied. Nun ist aber dieser letztere Weg, da die Strecke 3,6 — 6,4 = 4,5 — 6,4 ist, gleich der Strecke von 4,5 uber die Punkte 6,4 und 5,6 zu 5,3 oder gleich derjenigen von 4,5 über 5 zu 5,3; der Punkt 5,3 hat mithin von dem Anfangspunkt der Linie 3, d. h von 3,6, denselben „Abstand" wie von 4,5, dem Anfangspunkt der (gestrichelten) Linie 5.

Schnittpunkt zweier Linien derselben Klasse — also etwa wieder 2, 3 —, so ist dieser Schnittpunkt also, wie gesagt, von dem Anfangspunkte der Linie 2 ebensoweit entfernt wie von dem Anfangspunkte von 3 und, weil an diesen Anfangspunkten die Zahlen 2 und 3 beide an erster Stelle (Anzug) stehen, so würden auch an dem Schnittpunkt der Linien 2 und 3 die Zahlen 2 und 3 entweder beide auf den ersten Platz (Anzug) oder beide auf den zweiten (Nachzug) kommen, wenn nicht auf einer der beiden Linien — hier 2 — inzwischen die Biegungsstelle passiert wäre. Dies trifft aber stets in solchen Fällen zu; denn vor der Biegungsstelle war Linie 2 zu dem in Frage stehenden Teil von 3 parallel, konnte diesen also dort noch nicht schneiden. — Aus demselben Grunde schneiden sich zwei Linien verschiedener Klassen an einer Stelle, die für beide Linien entweder vor der Biegungsstelle (z. B. 7, 3) oder für beide hinter der Biegungsstelle (z. B. 2, 5) liegt. Man sieht leicht, daß dann an diesem Schnittpunkt die eine der beiden Zahlen den ersten, die andere den zweiten Platz zu beanspruchen hat, da für zwei Linien verschiedener Klassen die charakteristischen Zahlen an den Anfangspunkten der Linien auf verschiedenen Plätzen — die eine auf dem ersten, die andere auf dem zweiten — stehen. Auch für die Linie 1 schließlich erkennt man leicht, daß Widersprüche sich nicht ergeben können.

§ 3. Promenaden von n^2 Personen zu je n.

Es sei jetzt die Zahl aller Personen n^2, und je n sollen immer in einer Reihe gehen. Es wird verlangt, die Anordnungen so zu treffen, daß jede Person mit jeder anderen je einmal in derselben Reihe geht. Jede Person geht immer mit $n-1$ anderen in einer Reihe, und n^2-1, die Zahl aller Personen außer der betreffenden, ist durch $n-1$ teilbar; die Zahl der erforderlichen Promenaden ist also $\frac{n^2-1}{n-1} = n+1$. Ist n eine Primzahl, so ergibt sich sehr leicht eine Lösung[1]); wir setzen das

1) Vgl. Lucas, „Récréat.“, II, p. 192 und Schubert, „Zwölf Geduldspiele“, p. 23.

Verfahren an, dem Beispiel $n = 5$ auseinander und wählen zunächst, für die erste Promenade, folgende Anordnung:

I

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25.

Die zweite Anordnung erhalten wir, indem wir die in I hintereinander gehenden Personen kombinieren, also die Vertikalreihen zu Horizontalreihen machen und umgekehrt, d. h.:

II

1	6	11	16	21
2	7	12	17	22
3	8	13	18	23
4	9	14	19	24
5	10	15	20	25.

Eine dritte Anordnung bekommt man, indem man die erste Vertikalreihe ungeändert beibehält und die übrigen Zahlen zwar auch in ihren bezüglichen Vertikalen beläßt, sie jedoch dort so anordnet, daß die Zahlen der zweiten Vertikalen um eine, die der dritten um 2 usw. Stellen nach oben zyklisch verschoben werden; in die erste Zeile kommen so gerade die Ziffern der Diagonalreihe $\diagdown$ von II, und man erhält also:

III

1	7	13	19	25
2	8	14	20	21
3	9	15	16	22
4	10	11	17	23
5	6	12	18	24.

Die Anordnung IV entsteht aus III ebenso, wie III aus II, und so geht dies fort; wir erhalten also für die restierenden Anordnungen:

IV					V					VI				
1	8	15	17	24	1	9	12	20	23	1	10	14	18	22
2	9	11	18	25	2	10	13	16	24	2	6	15	19	23
3	10	12	19	21	3	6	14	17	25	3	7	11	20	24
4	6	13	20	22	4	7	15	18	21	4	8	12	16	25
5	7	14	16	23	5	8	11	19	22	5	9	13	17	21.

Man erkennt leicht[1]), daß diese Methode stets dann und nur dann anwendbar ist, wenn n eine Primzahl ist.[2])

Daß die Lösbarkeit unserer Aufgabe aber nichtsdestoweniger sich weiter erstreckt, mag eine Lösung für $n = 4$, also einen Fall, für den die obige Methode versagt, zeigen. Man erhält leicht folgende Anordnungen:

I				II				III				IV				V			
1	2	3	4	1	5	9	13	1	6	10	14	1	7	11	15	1	8	12	16
5	6	7	8	2	6	11	16	2	5	12	15	2	8	9	14	2	7	10	13
9	10	11	12	3	7	12	14	3	8	11	13	3	5	10	16	3	6	9	15
13	14	15	16	4	8	10	15	4	7	9	16	4	6	12	13	4	5	11	14

---

1) Die Personen, die in I nebeneinander gehen, gehen hinfort stets hintereinander, also sicherlich von ihnen nie wieder ein Paar in derselben Reihe Aber auch in den n Anordnungen II, III, IV . kann niemals ein und dasselbe Paar zweimal der gleichen Horizontalreihe angehören; denn die Zahlen der $(i+1)$-ten Vertikalreihe von II werden sukzessive um i, die der $(k+1)$-ten sukzessive um k Plätze zyklisch nach oben hin verschoben $(i, k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$, und dabei kann ein Paar von Zahlen, das einmal in derselben Horizontalen steht, nur dann ein zweites Mal in einer Horizontalen zusammentreffen, wenn $r \cdot k \equiv r \cdot i \bmod n$ oder $r(k-i) \equiv 0 \bmod n$ ist, eine Bedingung, die, da i und k verschieden und $1 \leq r \leq n-1$ ist, nie erfüllt wird, wenn n eine Primzahl ist

2) Über eine weitere Verallgemeinerung dieses Falles siehe Abschnitt II dieses Kapitels, S 117

Abschnitt II. Kirkmans Schulmädchen-Problem.

§ 1. Einleitung. Verwandte Probleme.

Im Jahre 1850 stellte der Engländer T. P. Kirkman, angeregt durch ein in dem „Lady's and Gentleman's Diary" 1844 erlassenes Preisausschreiben[1]), die folgende Aufgabe[2]): 15 Pensio-

1) Die Preisaufgabe war von W. S. B Woolhouse gestellt (s die in der nächsten Anm. zitierte Abh. von Woolhouse, p. 510) und verlangte (s. auch Kirkman in Camb. and Dubl. Math. Journ. V, 1850, p. 255/256), die Zahl der Kombinationen von n Elementen zu je a zu bestimmen, die sich unter der Beschränkung angeben lassen, daß je b Elemente nie in mehr als einer Kombination zusammen vorkommen Hierauf erging nur eine Lösung, und zwar fur den Fall· $a = 3$, $b = 2$, von seiten Kirkmans in. „On a problem in combinations", Camb. and Dubl Math J. II, 1847, p. 191—204 (s. dazu auch hier S. 99/100 nebst Anm. 1 von S. 100). Die Beschäftigung mit dieser Preisfrage gab Kirkman dann den Anstoß zu der in der folgenden Anm. zitierten Arbeit

2) Siehe T P Kirkman, „Note on an unanswered prize question", Camb. and Dubl. Math. Journ. V, 1850, p 260 Vorher jedoch schon und uberhaupt zum ersten Male muß Kirkman das Problem in dem (mir nicht zuganglichen) Lady's and Gentleman's Diary fur 1850 aufgestellt haben (Kirkman selbst spricht Educ. Times Reprints XI, 1869, p. 99 von „the famous fifteen young ladies whom I had the honour of introducing to the planet for the first time in the Lady's and Gentleman's Diary for 1850"). — J. J Sylvester bemerkte, das Problem, 7 Reihen von „Triaden" aus 15 Elementen so herzustellen, daß jede „Duade" darin gerade einmal vorkomme, — also das Problem, „which has since become so well known, and fluttered so many a gentle bosom, under the title of the fifteen school-girls' problem", — habe ihn schon beschäftigt lange Jahre, bevor es in der genannten Einkleidung im „Lady's Diary" hervorgetreten sei, und es sei gern möglich, daß das Problem seinen Ausgang genommen habe in mündlichen Mitteilungen, die er einstmals seinen Studenten in Cambridge gemacht, und daß es von dort sich weiter fortgepflanzt habe durch Kanale, die sich nicht mehr angeben ließen (Philos Magaz (4) 21, 1861$^{\mathrm{I}}$, p 371 = Collected Mathematical Papers of J. J Sylvester, IV (1908), p 266) Demgegenuber stellte Woolhouse (Philos. Magaz. (4) 22, 1861$^{\mathrm{II}}$, p 511) fest, daß als erster Kirkman in dem „Diary" das Problem aufgestellt habe. Erwahnt sei noch, daß Sylvester — anscheinend sofort nach Kirkmans erster Publikation — die Problemstellung weiter entwickelte, indem er ein Problem aufstellte, von dem das Kirkmansche nur ein Teilproblem ist (s. hierüber unten § 3, S. 110).

natsmädchen gehen jeden Tag miteinander spazieren, je 3 in einer Reihe; wie sind die Anordnungen für die einzelnen Tage zu treffen, wenn im Laufe einer Woche jedes Mädchen gerade einmal mit jedem anderen in einer Reihe zusammen gehen soll?[1])

Da jedes Mädchen an jedem Tage mit 2 anderen Mädchen zusammen in einer Reihe geht, so kann es in den 7 Tagen der Woche mit 14 verschiedenen, d. h. mit allen anderen Mädchen, je einmal zusammentreffen, wie unsere Aufgabe verlangt. Es fragt sich also nur, ob sich eine Anordnung so treffen läßt, daß für alle 15 Mädchen diese Forderung erfüllt ist, eine Frage, deren Beantwortung uns der § 2 geben wird. — Schon hier wollen wir jedoch folgende zwei Bezeichnungen einführen: eine Kombination von zwei Elementen heiße eine „Ambe", eine von drei Elementen ein „Tripel". Unter Benutzung dieser Ausdrücke lautet unser Problem dann so: **Gegeben sind 15 Elemente; aus diesen sind 7 Systeme von je 5 Tripeln so zu bilden, daß jedes einzelne System alle 15 Elemente enthält und daß in den 7 Systemen jede nur mögliche Ambe aus den 15 Elementen ein- und auch nur einmal vorkommt.**

Wie Kirkman bemerkt hat[2]), läßt sich auch für 9 Mädchen eine entsprechende Anordnung, und zwar natürlich für 4 Tage (statt 7), treffen, und uns kann diese Behauptung nicht überraschen. Fällt doch dieser besondere Fall unter das von uns schon in Abschnitt I, S. 94—96, erörterte Problem. Nach der dort gegebenen Methode erhalten wir, bezeichnet man die 9 Mädchen mit den 9 ersten Buchstaben des Alphabets, folgende Anordnungen für die einzelnen Tage I, II, III, IV:

I	II	III	IV
a, b, c	a, d, g	a, e, i	a, f, h
d, e, f	b, e, h	b, f, g	b, d, i
g, h, i	c, f, i	c, d, h	c, e, g

1) Es sei beiläufig erwähnt, daß noch ein anderes Problem, das der Theorie der rationalen Funktionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung angehört, die Bezeichnung „Kirkmans Problem" führt (s z. B. Encyklop d. mathem. Wissensch., Bd I, p 469)

2) Siehe Camb. and Dubl Math. Journ V, 1850, p 261.

Man überzeugt sich, wofern es nach dem oben gegebenen Beweise dessen noch bedarf, übrigens leicht, daß in diesen Anordnungen wirklich, wie verlangt, jede Kombination von 2 Buchstaben (Ambe) ein-, aber auch nur einmal, vorkommt.

Es darf nicht unerwähnt bleiben, daß bald nach Kirkman Jakob Steiner[1]) eine Frage stellte, die mit unserer Aufgabe eng zusammenhängt; er verlangte nämlich, aus den $\binom{n}{3}$ Tripeln von n Elementen solche Tripel auszuwählen, daß jede mögliche Ambe der n Elemente ein- und nur einmal darin vorkomme; und unter den $\binom{n}{4}$ Kombinationen zu je 4 wieder solche, daß jedes mögliche Tripel darin gerade einmal vorkomme usw.[2]) Der einfachste Fall des Steinerschen Problems, die Bildung von Tripeln, die alle Amben gerade einmal enthalten, ist bekanntlich für die Theorie der algebraischen Gleichungen von besonderer Bedeutung geworden. Solche Anordnungen von n, das hierfür $\equiv 1$ oder 3,

---

1) Crelles Journal Bd. 45, 1853, p 181 oder Werke (herausgeg. v Weierstraß) II, p. 435

2) In noch allgemeinerer Form würde dieses Anordnungsproblem so lauten: Von allen $\binom{n}{a}$ Kombinationen von n Elementen zu je a eine Anzahl e so auszuwählen, daß in diesen e Kombinationen jede Kombination der n Elemente zu je b gerade einmal vorkommt $(n \geqq a \geqq b)$; s E. H Moore, „Tactical Memoranda", Amer Journ of Mathem 18, 1896 (p 264—303), p 270 und J. A Barrau, „Over de combinatorische Opgave van Steiner", Verslag van de gewone Vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam XVII, 1, 1908 (Amsterdam 1909), p 318—326 (in der englischen Ausgabe· „On the combinatory problem of Steiner", Proceedings 1908, p 352—360), s. a F. Fitting, „Beitrage zum Steiner'schen Problem", Nieuw Archief voor Wiskunde (2) X, 1912, p 88—99 Außer dem weiter unten erwähnten und besonders wichtigen Fall der „Tripelsysteme" $\left(a = 3,\ b = 2,\ e = \frac{n(n-1)}{6}\right)$ sind u a folgende Spezialfalle behandelt. $n = 13$, $a = 4$, $b = 2$, $e = 13$ von Kirkman und Woodall (Educ Times Repr. 55, 1891, p 60); — $n = 11$, $a = 5$, $b = 4$, $e = 66$; $n = 16$, $a = 4$, $b = 3$, $e = 140$ von William Lea (Educ Times Repr. IX, 1868, p 35—36 und XXII, 1874, p 74—76; s a XI, 1869, p 97); — $n = 26$ und 34, $a = 4$, $b = 3$ von F Fitting („Zyklische Lösungen des Steiner'schen Problems", Nieuw Archief voor Wiskunde (2) XI, 1915, p. 140—148).

mod 6 sein muß [1]), Elementen, „Tripelsysteme“ genannt, spielen z. B. eine Rolle bei der algebraischen Auflösung der Gleichungen neunten Grades, welche die Inflexionspunkte einer ebenen Kurve dritter Ordnung bestimmen [2]), und sind daher genauer studiert worden. [3])

---

1) Siehe Kirkman, „On a problem in combinations“, Cambr. and Dubl. Math Journ II, 1847, p. 191—204.

2) O. Hesse, Crelles Journal Bd. 28, p. 68 und Bd 34, p. 191. Vgl auch M. Noether, „Über die Gleichungen achten Grades“ etc., Math. Ann. XV, 1879, p. 89—110.

3) Mit Existenzbeweisen und Methoden zur Herstellung von Tripelsystemen beschäftigen sich: M. Reiß, Crelles Journal Bd 56, 1859, p. 326; E. Netto, „Substitutionentheorie“, 1882, § 192 ff und Math. Ann. Bd. 42, 1893, p 143, sowie „Lehrbuch der Combinatorik“, 1901, p 202 ff.; E. H Moore, Math. Ann. Bd. 43, 1893, p. 271, Rend circ. matem. Palermo IX, 1895, p 86 und New-York Bull. 1897, p 11; L Heffter, Math. Ann. Bd. 49, 1897, p 101—112; s ferner J de Vries, Rend circ. matem Palermo VIII, 1894, p 222; G Brunel, Association franç pour l’avanc des sciences 24, Congrès de Bordeaux 1895, t. II, p. 145; K. Zulauf, „Über Tripelsysteme von 13 Elementen“, Diss. Gießen 1897; V De Pasquale, Lomb. Ist. Rend (2) 32, 1899, p. 213; F. Fitting, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) IX, 1911, p. 359—369. Von älteren Arbeiten, die sich vorwiegend auf Spezialfälle beschränken, nenne ich, außer der für unseren Kirkmanschen Fall in Betracht kommenden Literatur, noch · R R Anstice, Cambr. and Dubl Math. Journ. VIII, 1853, p 149—154; Th. Clausen, „Über eine kombinatorische Aufgabe“, Archiv der Math u. Phys. XXI, 1853, p 93—96 und S. Bills, Educ. Times Repr. VIII, 1867, p. 32—33. — Bei $n = 13$ Elementen gibt es zwei und nur zwei wesentlich verschiedene, d h durch Substitutionen nicht ineinander überführbare Tripelsysteme (s insbesondere die oben zitierten Arbeiten von J. de Vries und V. De Pasquale, ferner G Brunel, „Sur les deux systèmes de triades de treize éléments“, Journ. de mathém (5) VII, 1901, p 305—330 und Mém. de la soc. des sc phys. et natur. de Bordeaux (6) II, 1903, p 1—23, sowie J A Barrau, „Over drietalstelsels, in het bijzonder die van dertien elementen“, Verslag van de gewone Vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam XVII, 1, 1908 (Amsterdam 1909), p 274—279 (in der englischen Ausgabe: „On triple systems, particularly those of thirteen elements“, Proceedings 1908, p. 290—295); auch eine mir nicht bekannte Arbeit von F N. Cole, „The triad systems of thirteen letters“, Bull. of the Amer. Mathem Soc. (2) 19, 1912, p 59, wird hier vielleicht zu nennen sein). Für $n > 13$ existieren sicher stets zwei wesentlich verschiedene Tripelsysteme (Moore in der oben zitierten Arbeit von 1893); für $n < 13$, also $n = 3, 7, 9$ gibt es in

Unser Kirkmansches Schulmädchen-Problem geht über das der „Tripelsysteme" natürlich hinaus, da es ja nicht nur die Bildung irgendeines „Tripelsystems", sondern außerdem noch eine solche Einteilung der Tripel des Tripelsystems fordert, daß in jeder Abteilung von Tripeln jedes der n Elemente gerade einmal vorkommt, was natürlich für $n \equiv 1 \bmod 6$ unmöglich ist und daher nach Obigem: $n \equiv 3 \bmod 6$ bedingt. Daß solche Anordnung für $n = 9$ in der Tat möglich ist, haben wir bereits oben (S. 98) gesehen; für $n = 15$ wird uns der nächste Paragraph dies zeigen.

Im Anschluß hieran entsteht die weitere Frage, ob und wann es möglich ist, die $\binom{n}{3}$ Tripel von n Elementen in lauter „Tripelsysteme" zu zerlegen, ein Problem, dessen Unmöglichkeit für $n = 7$ Cayley nachgewiesen hat.[1])

Auch sonst kommen Anordnungen, wie unser Kirkmansches Problem sie verlangt, vor. So lassen sich in einer Gruppe von der Ordnung 16, deren Elemente außer dem Einheitselement sämtlich von der Ordnung 2 sind, die 15 Elemente der Ordnung 2 so in 5 Abteilungen von je 3 Elementen teilen, daß immer je 3 solche Elemente mit dem Einheitselement zusammen eine Untergruppe bilden, und zwar läßt sich diese Teilung auf 7 verschiedene Arten ausführen.[2]) Entsprechend den 35 Tripeln einer Kirkmanschen Anordnung haben wir hier 35 solche Untergruppen, und zwar ist leicht einzusehen, daß alsdann je zwei der „15 Elemente" der ganzen Gruppe ein- und nur einmal zusammen in einer dieser 35 Untergruppen vorkommen müssen.

---

diesem Sinne nur je ein Tripelsystem; den hier besonders interessierenden Fall $n = 15$ untersucht eine mir nicht bekannte, im Jahrb. Fortschr. d Math 40, 1909 (1912), p. 274 aufgeführte Arbeit von J A Barrau („Tripelstelsels van vijfteen elementen", Handelingen van het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres 12, p. 185—189).

1) Cayley, „On the Triadic Arrangements of Seven and Fifteen Things", Phil. Mag. XXXVII, 1850, p 50—53 = Collected Papers I, p 481—484 An diese Arbeit schließt sich mit verwandten Fragestellungen an: T. P. Kirkman, „Theorems on combinations", Cambr and Dubl Math. Journ 8, 1853, p 38—45

2) Siehe W. Burnside, „Theory of groups of finite order" (Cambridge 1897), p. 60, Ex 2

§ 2. Lösungen des Kirkmanschen Problems.

It were much to be desired that some one would endeavour to collect and collate the various solutions that have been given of the noted 15-school-girl problem.

J. J. SYLVESTER (Philos. Magaz. (4) 21, 1861 p. 520 = Mathem Papers IV, p 276).

Die ersten Lösungen des Problems der 15 Schulmädchen dürften von Cayley[1]) und Kirkman[2]) angegeben sein; später haben sich zahlreiche Lösungen anderer dazugesellt. Zwei Lösungen, die sich nur dadurch unterscheiden, daß die 15 Elemente (Symbole) unter sich vertauscht sind, dergestalt, daß die eine Lösung also durch eine geeignete Substitution der Elemente in die andere übergeht, wird man natürlich nicht als verschieden ansehen (vgl. a. S. 100, Anm 3). Sylvester hat nun in dem hier vorgesetzten Worte das Postulat erhoben, alle die von den verschiedenen Autoren angegebenen Lösungen zu sammeln und mit einander zu vergleichen, und W. S. B Woolhouse[3]) stellte 3 Systeme auf von der Art, daß jede überhaupt mögliche Lösung des Problems in einem dieser 3 Systeme enthalten sei. Auch Arthur Cayley[4]) hat, wie unten (S. 108/9, Anm.) noch genauer anzugeben sein wird, einen Gesichtspunkt hervorgehoben, der ihm ein brauchbares Klassifikationsprinzip für die verschiedenen Lösungen zu bieten schien. Neuerdings hat F Fitting[5]) die Frage nach der Anzahl der wesentlich verschiedenen Lösungen

1) A. Cayley, „On the triadic arrangements of seven and fifteen things", Phil. Mag. (3) XXXVII, 1850, p 50. Vgl a W Spottiswoode, Phil. Mag. (4) III, 1852$^{\mathrm{I}}$, p 349—351

2) T. P. Kirkman, „On the Triads made with Fifteen Things", Phil Mag. XXXVII, 1850, p. 169

3) W. S B. Woolhouse, „On the Rev. T P. Kirkman's Problem respecting certain Triadic Arrangements of Fifteen Symbols", Phil Mag (4) XXII, 1861, p. 511 ff.; s a. die dort zitierte, mir nicht zugängliche Abhandlung in Lady's Diary 1862 (s liter. Index. Nr. 261)

4) A. Cayley, „On a Tactical Theorem relating to the Triads of Fifteen Things", Phil. Mag (4) XXV, 1863, p. 59—60.

5) F Fitting, „Aufstellung aller von einander unabhängigen Lösungen des Kirkman'schen 15-Pensionnatsdamen-Problems", Nieuw Archief voor Wiskunde (2) X, 1912, p 244—251.

wieder untersucht und hat unter der Annahme, daß die Anordnung eines Tages, des Sonntags, festgehalten wird, ermittelt, daß es dann 11 verschiedene Lösungen — dieselben, die sich schon bei E. Carpmael[1]) finden, — gibt, doch hat P. Mulder[2]) gezeigt, daß bei Verzicht auf die Annahme einer starr festgehaltenen Sonntagsanordnung die Zahl der verschiedenen Typen sich auf 7 reduziert.

Wir wollen und müssen uns hier damit begnügen, von den verschiedenen Methoden zur Herstellung von Lösungen zwei anzugeben, von denen die eine besonders elegant, die andere besonders durchsichtig ist. Die erstere rührt von R. R. Anstice[3]) her und ist nachmals, wohl unabhängig von Anstice, auch von B. Peirce[4]) angegeben, dem wir hier folgen wollen: Unter den 15 Elementen wird eins (p) ausgezeichnet, die anderen 14 dagegen in zwei Klassen zu je 7: $a_1, a_2 \ldots a_7$ und $b_1, b_2 \ldots b_7$ geteilt, worauf dann für die Sonntagspromenade zunächst etwa folgende Anordnung gegeben wird:

I.

$$\begin{array}{ccc} p & a_1 & b_1 \\ b_4 & a_5 & a_7 \\ b_6 & a_3 & a_4 \\ b_7 & a_2 & a_6 \\ b_2 & b_3 & b_5 \end{array}$$

Für die anderen Tage ergeben sich die Anordnungen dann der Reihe nach, indem man, bei stets ungeändertem p, die Indizes

1) Siehe unten S 109, Anm. 2

2) P. Mulder, „Kirkman-systemen“ Dissertation Groningen 1917.

3) Anstice, „On a problem in combinations“, Camb and Dubl Math. Journ. VII, 1852, p. 279—292. Hieran schließt sich eine Arbeit Kirkmans an „On the Puzzle of the Fifteen Young Ladies“, Phil Mag. XXIII, 1862, p 198—204 — Vgl auch hier S 114, Anm 4

4) B Peirce, „Cyclic solutions of the school-girl puzzle“, The astronomical Journal, edited by B. A Gould, VI, 1859—1861 (Cambridge U S. 1861), p 169—174 — Auch Sylvester hebt (Phil. Mag. XXI, 1861, p. 520) die Lösung Peirces rühmend hervor: „the latest and probably the best“.

der übrigen Elemente um je 1 erhöht, wobei jede 8, die auftritt, wieder durch 1 zu ersetzen ist. Für den Montag zunächst ergibt sich so die Anordnung:

II.

$$\begin{array}{ccc} p & a_2 & b_2 \\ b_5 & a_6 & a_1 \\ b_7 & a_4 & a_5 \\ b_1 & a_3 & a_7 \\ b_3 & b_4 & b_6 \end{array}$$

In gleicher Weise erhält man aus diesem Montag den Dienstag, und so weiter die übrigen Tage.[1])

Man sieht leicht, daß durch die angegebenen Anordnungen die Forderungen unserer Aufgabe sämtlich erfüllt werden. Zunächst wird p, wie sofort ersichtlich, mit allen Elementen je einmal kombiniert. Sodann werden irgend 2 der a je einmal kombiniert, da die Differenzen zwischen den Indizes des ersten und des zweiten a in den in Frage kommenden Zeilen, nämlich der zweiten, dritten und vierten, für alle Tage der Reihe nach, vom Vorzeichen abgesehen, 2 bzw. 5, 1 bzw. 6, 4 bzw. 3 sind, mithin unter ihnen gerade alle von 0 verschiedenen Reste mod 7 einmal vertreten sind. Eine bestimmte „Ambe" der a, beispielsweise $a_6\,a_3$, deren Indizes die Differenz 3 besitzen, wird also dort, wo diese Differenz 3 vorkommt, d. h. in der vierten Zeile einer Tagesanordnung, auftreten, und zwar offenbar am 5. Tage der Woche. Da andererseits unsere Lösung auch nur $3 \cdot 7 = 21 = \binom{7}{2}$ Amben der a birgt, so kann auch keine Ambe mehr als einmal vorkommen. Aus denselben Gründen kommen auch je 2 der b gerade einmal zusammen in der letzten Zeile vor (die Differenzen der Indizes sind dort, wieder vom Vorzeichen abgesehen, 1 resp. 6, 3 resp. 4, 2 resp. 5). Schließlich wird auch jedes b gerade einmal mit jedem a gepaart, da die Indizes der b, um die der a vermin-

1) Für die Darstellung einer fertigen Lösung des Kirkmanschen Problems für alle 7 Tage wählt übrigens Sylvester („On the fifteen young ladies problem", London Math. Soc. Proc. 7, 1875/76, p. 235—236) eine fächerförmige Anordnung und meint, in geschmackvoller Ausführung werde das Spiel eine willkommene Gabe für den Weihnachtstisch bilden. — Eine geometrische Veranschaulichung des Problems und seiner Lösung am Würfel gibt E. W. Davis, „A geometric picture of the fifteen school girl problem", Annals of mathem. 11, 1897, p. 156—157.

dert, der Reihe nach die Differenzen 0, — 1, — 3, + 3, + 2, + 5, + 1 ergeben, die ein vollständiges Restsystem mod 7 bilden (andererseits enthält unsere Lösung auch nur 7 · 7 Kombinationen eines b mit einem a, so daß also jede einzelne Kombination dieser Art auch nur einmal vorkommen kann).

Die so erhaltene Lösung besitzt eine Gruppe von der Ordnung 168. Man erkennt nämlich leicht, daß die Lösung durch die Substitutionen

$$(a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7)\ (b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7) \text{ und}$$
$$(b_3\, b_7)\ (b_5\, b_6)\ (p\, a_4)\ (a_1\, a_2)\ (a_3\, a_5)\ (a_6\, a_7)$$

wieder in sich übergeht.[1]) Diese beiden Substitutionen erzeugen nun eine Gruppe von der Ordnung $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$; es ist die bekannte einfache Gruppe[2]), die bei der Transformation der elliptischen Funktionen auftritt. Burnside hielt diese Gruppe für die Maximalgruppe einer Kirkmanschen Anordnung, wobei er von der Annahme ausging, daß eine solche Anordnung höchstens ein Tripelsystem von 7 Elementen enthalten könne, einer Annahme, die jedoch von E. H. Moore als irrig nachgewiesen ist, mit der Folge, daß also Gruppen von noch höherer Ordnung hier auftreten können und auch tatsächlich auftreten.[3])

Eine sehr einfache und durchsichtige Methode hat der englische Gelehrte J. Horner (Vikar in Everton) gegeben; dieselbe ist von Joseph Power[4]) nach Mitteilungen des Autors publiziert worden. Die 15 Elemente denken wir uns zunächst in 2 Klassen zerlegt, die erste von 7, die zweite von 8 Elementen. Die 8 Elemente der zweiten Klasse — wir nennen sie $c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4$ — mögen nun zunächst zu je 2 kombiniert werden, und von den so sich ergebenden 28 Amben sollen immer je 4 so untereinander geschrieben werden, daß in jedem der resultierenden 7 Sätze alle 8 Elemente vorkommen. Die gewünschte Anordnung, die wir nach Horner reproduzieren, ob-

1) Siehe W Burnside, „On an application of the theory of groups to Kirkman's Problem", Messenger of Mathematics XXIII, 1893 94, p 137—143.

2) Vgl z B. Klein-Fricke, „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen", 1890, Bd. I, p. 488 ff, sowie Dyck, „Gruppentheoretische Studien", Mathem Annal XX, 1882, p 41

3) Moore, „Concerning the General Equations of the Seventh and Eighth Degrees", Math Annal. Bd 51, 1899, p 417—444

4) Power, „On the problem of fifteen school girls" Quart J of Mathem. VIII, 1867, p 236—251.

wohl wir natürlich auch auf die in Abschnitt I, S. 79f., angegebene Methode hätten zurückgreifen können, ist die folgende:

I.	II.	III	IV.	V.	VI.	VII.
$c_1\ c_2$	$c_1\ c_3$	$c_1\ c_4$	$c_1\ d_1$	$c_1\ d_2$	$c_1\ d_3$	$c_1\ d_4$
$c_3\ c_4$	$c_2\ c_4$	$c_2\ c_3$	$c_2\ d_2$	$c_2\ d_1$	$c_2\ d_4$	$c_2\ d_3$
$d_1\ d_2$	$d_1\ d_3$	$d_1\ d_4$	$c_3\ d_3$	$c_3\ d_4$	$c_3\ d_1$	$c_3\ d_2$
$d_3\ d_4$	$d_2\ d_4$	$d_2\ d_3$	$c_4\ d_4$	$c_4\ d_3$	$c_4\ d_2$	$c_4\ d_1$.

Jedes der 8 Elemente ist hier gerade einmal mit jedem anderen verbunden. Vor die Amben dieser 7 Sätze denken wir uns nun der Reihe nach unsere 7 anderen Elemente — wir nennen sie a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4 — gesetzt und zwar a_1 vor die Amben von I, a_2 vor die von II usw. Wir bekommen so 28 Tripel, und zwar sind in diesen nicht nur alle Amben aus den 8 Elementen der zweiten Klasse enthalten, sondern auch alle die Amben, die aus einem Elemente der ersten Klasse und einem der zweiten Klasse bestehen. Es fehlen uns also nur noch Tripel, die aus den 7 Elementen der ersten Klasse allein gebildet sind, und zwar brauchen wir so viele dieser Tripel, daß in ihnen jedes dieser 7 Elemente gerade einmal mit jedem der übrigen 6 kombiniert ist. Diese Tripel sind aber $a_1\ a_2\ a_3$; $a_1\ b_1\ b_2$; $a_1\ b_3\ b_4$; $a_2\ b_1\ b_3$; $a_2\ b_2\ b_4$; $a_3\ b_1\ b_4$; $a_3\ b_2\ b_3$. Wir haben damit im ganzen 35 Tripel, nämlich:

I.	II	III.	IV	V.	VI	VII.
$a_1\ a_2\ a_3$						
$a_1\ b_1\ b_2$	$a_2\ b_1\ b_3$	$a_3\ b_1\ b_4$				
$a_1\ b_3\ b_4$	$a_2\ b_2\ b_4$	$a_3\ b_2\ b_3$				
$a_1\ c_1\ c_2$	$a_2\ c_1\ c_3$	$a_3\ c_1\ c_4$	$b_1\ c_1\ d_1$	$b_2\ c_1\ d_2$	$b_3\ c_1\ d_3$	$b_4\ c_1\ d_4$
$a_1\ c_3\ c_4$	$a_2\ c_2\ c_4$	$a_3\ c_2\ c_3$	$b_1\ c_2\ d_2$	$b_2\ c_2\ d_1$	$b_3\ c_2\ d_4$	$b_4\ c_2\ d_3$
$a_1\ d_1\ d_2$	$a_2\ d_1\ d_3$	$a_3\ d_1\ d_4$	$b_1\ c_3\ d_3$	$b_2\ c_3\ d_4$	$b_3\ c_3\ d_1$	$b_4\ c_3\ d_2$
$a_1\ d_3\ d_4$	$a_2\ d_2\ d_4$	$a_3\ d_2\ d_3$	$b_1\ c_4\ d_4$	$b_2\ c_4\ d_3$	$b_3\ c_4\ d_2$	$b_4\ c_4\ d_1$

Das bisherige Verfahren läßt sich dahin charakterisieren, daß auf grund eines Tripelsystems der 7 Elemente erster Klasse ein Tripelsystem aus allen 15 Elementen gebildet ist.

Jede Ambe aus den 15 Elementen kommt so gerade einmal vor, und es handelt sich nur noch darum, die 35 Tripel zu je fünfen so zusammenzunehmen, daß diese 5 Tripel immer alle 15 Elemente enthalten (vgl. S. 101). Die 5 so zusammenzufassenden Tripel gehören natürlich stets verschiedenen Spalten (I, II etc.) an, da in unserer vorläufigen Anordnung die Tripel derselben Spalte immer in einem Element übereinstimmen. Wählen wir also zunächst $a_1\ a_2\ a_3$ aus, so dürfen wir kein Tripel der Spalte I mehr dazu nehmen, aber auch keins von II und III, dagegen etwa $b_1\ c_1\ d_1$ aus IV. Von V dürfen wir dann die beiden ersten Tripel, da sie c_1 resp. d_1 enthalten, nicht mehr wählen, dagegen etwa: $b_2\ c_3\ d_4$ und hierzu dann aus VI und VII: $b_3\ c_4\ d_2$ und $b_4\ c_2\ d_3$. Wir erhalten also:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_3 & d_4 \\ b_3 & c_4 & d_2 \\ b_4 & c_2 & d_3 \end{matrix}$$

Man sieht leicht, daß, um ein solches System von 5 Tripeln zu erhalten, man immer 4 dieser Tripel aus den zuerst gebildeten 28 und das fünfte aus den zuletzt gebildeten 7 Tripeln zu wählen haben wird[1]) Wir bekommen so leicht folgende Anordnung als schließliche Losung[2]) unseres Problems:

1) Indem man nämlich eins dieser 7 Tripel wählt, schließt man zugleich für den betreffenden Tag die übrigen 6 Tripel aus; denn von ihnen enthalten offenbar zwei und nur zwei das erste Element des gewählten Tripels, zwei weitere das zweite und abermals zwei andere das dritte Element des gewählten Tripels.

2) Aus der obigen Deduktion der Losung ergibt sich sofort eine charakteristische Eigenschaft von ihr. 8 der 15 Elemente, nämlich die der zweiten Klasse, also die vier Elemente c und die vier d, nehmen insofern eine Sonderstellung ein, als in der Lösung kein einziges Tripel vorkommt, das 3 dieser 8 Elemente vereinigte Arthur Cayley, der zuerst diesen Gesichtspunkt hervorgekehrt hat (Phil. Magaz. (4) XXV, 1863I, p 59—61), meint überhaupt, daß alle bis dahin angegebenen Lösungen des Kirkmanschen Problems eine solche Struktur besäßen,

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
$a_1\ a_2\ a_3$	$a_1\ b_1\ b_2$	$a_1\ b_3\ b_4$	$a_1\ d_3\ d_4$	$a_1\ d_1\ d_2$	$a_1\ c_3\ c_4$	$a_1\ c_1\ c_2$
$b_1\ c_1\ d_1$	$a_2\ c_1\ c_3$	$a_2\ c_2\ c_4$	$a_2\ b_1\ b_3$	$a_2\ b_2\ b_4$	$a_2\ d_1\ d_3$	$a_2\ d_2\ d_4$
$b_2\ c_3\ d_4$	$a_3\ d_2\ d_3$	$a_3\ d_1\ d_4$	$a_3\ c_1\ c_4$	$a_3\ c_2\ c_3$	$a_3\ b_2\ b_3$	$a_3\ b_1\ b_4$
$b_3\ c_4\ d_2$	$b_3\ c_2\ d_4$	$b_1\ c_3\ d_3$	$b_2\ c_2\ d_1$	$b_1\ c_4\ d_4$	$b_1\ c_2\ d_2$	$b_2\ c_4\ d_3$
$b_4\ c_2\ d_3$	$b_4\ c_4\ d_1$	$b_2\ c_1\ d_2$	$b_4\ c_3\ d_2$	$b_3\ c_1\ d_3$	$b_4\ c_1\ d_4$	$b_3\ c_3\ d_1$

daß sich 8 Elemente dieser Art angeben ließen, und führt als Beispiel die von ihm selbst angegebene Lösung (s. hier S. 102 nebst Anm. 1) an. Auch für die obige Peircesche Lösung (S. 103/4) ist in der Tat in $p, a_1, a_2, \ldots a_7$ leicht eine solche Gruppe von 8 Elementen gefunden. Für die Lösung, die Sylvester in der oben (S. 104, Anm. 1) zitierten Arbeit gibt und deren Beziehung zu anderen Lösungen ich übrigens nicht geprüft habe, bilden die Elemente 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 eine solche Gruppe. Auch von den schon oben (S. 102) genannten 3 Systemen von Woolhouse besitzen sowohl das erste wie das zweite die Eigenschaft, daß sie beide kein einziges Tripel aus den 8 Elementen a_2, a_3, a_4, a_5, b_2, b_3, b_4, b_5 aufweisen (s. l. c.) Dagegen wollen wir es für das 3. System Woolhouses dahingestellt sein lassen, ob dort eine solche Gruppe von 8 Elementen zu finden ist; jedenfalls aber lassen sich dort 7 Elemente: b_3, b_4, b_5, c_1, c_3, c_4, c_5, so angeben, daß kein aus ihnen gebildetes Tripel in der Lösung vorkommt. — Übrigens stellt 8 die Maximalzahl von eximierten Elementen dieser Art für Lösungen des Kirkmanschen Problems dar. Wollten wir nämlich fordern, daß 9 eximierte Elemente dieser Art existierten, so dürfte also jedes der 35 Tripel der Lösung höchstens 2 von diesen 9 eximierten Elementen enthalten. Andererseits müssen aber in den Tripeln der Lösung alle „Amben" unserer 15 Elemente und somit auch die sämtlichen Amben aus den eximierten 9 Elementen enthalten sein, und deren Zahl ist 36. Diese 36 Amben sind aber natürlich in den 35 Tripeln, wenn jedes höchstens eine Ambe davon aufnehmen darf, nicht unterzubringen, und damit ist die Unmöglichkeit erwiesen. — Andererseits gibt es aber für jede denkbare Lösung des Kirkmanschen Problems, wie Cayley (l. c. p. 60—61) zeigt, unter allen Umständen Gruppen von 6 Elementen derart, daß keine Triade der 6 Elemente in der betreffenden Lösung vorkommt. Cayley berechnet nämlich die Differenz zwischen der Gesamtzahl aller möglichen Hexaden von 15 Elementen und der Anzahl aller derjenigen verschiedenen Hexaden, die eine oder zwei Triaden der betreffenden Lösung enthalten, und findet, daß diese Differenz stets > 0, nämlich $= 735$, ist, so daß also 735 solche Sechser-Gruppen stets vorhanden wären. Diese Eigenschaft nun wollte Cayley, wie wir schon oben (S. 102) beiläufig bemerkten, als Klassifikationsprinzip

Andere Lösungen des Kirkmanschen Problems, wie die von Andrew Frost[1]), E. Carpmael[2]) und J. H. Gill[3]), erwähnen wir nur, ohne sie näher zu charakterisieren.[4])

---

benutzen und somit die Lösungen des Kirkmanschen Problems einteilen in solche, bei denen 8 Elemente der angegebenen Art sich finden lassen, zweitens in solche, bei denen nur 7 Elemente dieser Art angegeben werden können, und drittens in solche, bei denen nur Gruppen von je 6 Elementen dieser Art vorkommen. Cayley (l. c p. 60) glaubt, daß Lösungen aller drei Klassen wirklich existieren. — Dazu sei übrigens noch bemerkt, daß die soeben angegebene Zahl Cayleys: 735, wohl nur eine untere Grenze darstellt und die gesuchte Zahl anscheinend stets größer ist. Cayleys Anzahlbestimmung läßt nämlich völlig außer Acht, daß manche Hexaden sogar 4 „Triaden der betreffenden Lösung" enthalten (dies ist freilich, wie man leicht zeigen kann, das Maximum), womit sich in dem Cayleyschen Endresultat der Subtrahendus weiter erniedrigen, die Differenz also erhöhen würde Ich muß mich damit begnügen, auf diesen Mangel der Cayleyschen Untersuchung, den ich erst bei der Drucklegung dieses Buches bemerkte, hier kurz hinzuweisen.

1) Frost, „General solution and extension of the problem of the 15 school girls", Quart. J of Mathem. XI, 1871, p. 26—37.

2) Carpmael, „Some solutions of Kirkman's 15 school-girl problem", London Math. Soc Proc. XII, 1880/1, p 148—156. Ein Teil der Lösungen stimmt mit denen von Woolhouse überein, wie der Autor selbst bemerkt.

3) Publiziert durch Ball, „Mathem Recreations", 3. Aufl, Franz. Übers. v Fitz-Patrick (1898), p 158

4) Über eine verfehlte Arbeit von A. F. H Mertelsmann, „Das Problem der 15 Pensionatsdamen", Zeitschr fur Mathem u Phys Bd 43 1898, p. 329—334, reproduziert bei Schubert, „Math Mußestunden" 2 Aufl. (Leipzig 1900), Bd. II, p 55—63, u ebenso 3 Aufl, Bd II (1909), p. 55—63, mit angeblich über 15 Billionen Losungen, s meine Besprechung in Hoffmanns Zeitschr für mathem u naturw. Unterr., Bd XXXI, 1900, p 387/388 — Erwähnt sei ferner noch, daß A C. Dixon („Note on Kirkman's problem", Messenger of mathem XXIII, 1893/4, p 88—89) das Kirkmansche Problem mit einer Nebenbedingung belastet und für dieses modifizierte Problem, das jedoch wohl kaum besonderes Interesse verdient, eine Losung gibt

§ 3. Sylvesters Forderung.

Die Anzahl aller Tripel von 15 Elementen ist

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \cdot 13,$$

also 13-mal so groß wie die zu einer Lösung des Kirkmanschen Problems erforderliche Anzahl. Es lag daher nahe, die Kirkmansche Fragestellung dahin zu erweitern, ob es möglich sei, alle $\binom{15}{3}$ **Tripel von 15 Elementen in 13 solche Systeme zu zerlegen, daß jedes einzelne System eine Lösung des Kirkmanschen Problems darstellt.** In die Einkleidung des Pensionatsmädchenproblems gefaßt, lautet die neue Frage offenbar so: **Läßt es sich einrichten, daß 15 Mädchen in jeder der 13 Wochen eines Vierteljahres der Kirkmanschen Bedingung entsprechend ihre Spaziergänge machen und dabei während des ganzen Vierteljahres niemals dieselben 3 Mädchen mehr als einmal zusammen in einer Reihe gehen?** Diese Fragestellung rührt von Sylvester[1]) her; eine definitive Beantwortung derselben ist bisher nicht gegeben, doch darf man mit Cayley[2]) wohl annehmen, daß die Aufgabe unlösbar ist[3]), wenn auch Sylvester

---

1) Siehe Cayley, Phil. Mag. 37, 1850, p 52; s a Sylvesters eigene Äußerung in Phil. Mag (4) XXI, 1861$^{\mathrm{I}}$, p. 373/374, sowie seine spätere Arbeit „Note on a nine schoolgirls problem", Messenger of Math. (2) XXII, 1893, p. 159. — Es erübrigt sich wohl, noch ausdrücklich zu bemerken, daß diese jetzige Fragestellung diejenige Problemerweiterung Sylvesters ist, von der schon oben (S 97, Anm 2) beiläufig die Rede war

2) Cayley an dem vorstehend (Anm 1) zitierten Orte.

3) Auch Kirkman sah vielleicht das Sylvestersche Problem als unlösbar an und jedenfalls modifizierte er (Camb. and Dubl Math Journ V, 1850, p. 261 und Phil Mag XXXVII, 1850) die Sylvestersche Forderung stillschweigend dahin, daß die Spaziergänge der 15 Pensionatsdamen durch so viele Wochen fortgesetzt werden sollen, bis jedes überhaupt mögliche Tripel *wenigstens einmal* vorgekommen ist, und er gibt nun eine solche Anordnung für 15 Wochen, wobei die Sonntagsanordnung immer dieselbe ist. Diese dort gegebene Gesamtanordnung besteht also aus 15 vollständigen Lösungen des ursprünglichen Kirkmanschen Problems, und zwar stimmen alle diese 15 einzelnen Systeme in der Sonn-

anscheinend noch sehr viel später an seiner Forderung festgehalten hat.[1])

Nehmen wir jedoch wieder, wie in § 1, den einfacheren Fall der 9 Mädchen an, so läßt sich die Sylvestersche Bedingung mutatis mutandis erfüllen. Es gibt hier $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 12 \cdot 7$ Tripel; denken wir uns nun, die Mädchen gingen täglich viermal spazieren, so würde die Forderung des ursprünglichen Kirkmanschen Problems bereits durch die 4 Promenaden eines Tages befriedigt werden können, und die Sylvestersche Forderung würde dann darin bestehen, die Anordnungen des einen Tages auf die ganze Woche (7 Tage) entsprechend auszudehnen, und zwar so, daß niemals dieselben 3 Mädchen mehr als einmal in der Woche zusammen eine Reihe bilden. Es müssen also die $12 \cdot 7$ Tripel zu 7 Systemen von je 12 so gruppiert werden, daß jedes dieser 7 Systeme die Kirkmansche Bedingung erfüllt. Solche Anordnungen haben Kirkman[2]), Sylvester[3]) und Walecki[4]) gegeben. Nach dem Vorgang Sylvesters gehen wir aus von

$$\begin{matrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & i \end{matrix}$$

und stellen 2 weitere Anordnungen durch zyklische Vertauschungen der Buchstaben der ersten Vertikalreihe her, ebenso

---

tagsanordnung überein; abgesehen von dieser Wiederholung kommen aber alle übrigen $\binom{15}{3} - 5$ Tripel in dem gesamten Komplex der 15 Wochen ein- und auch nur einmal vor. Der Leser, der diese Arbeit Kirkmans einsehen sollte, wird finden, daß die Formulierung des Problems dort, wie auch in Educ. Times Reprints XI, 1869, p. 99, der wünschenswerten Präzision entbehrt.

1) Siehe die in Anm. 1 der vor. Seite zitierte Arbeit Sylvesters von 1893.

2) Kirkman, Camb. and Dubl. Math. Journ. V, 1850, p. 261.

3) Sylvester in der in Anm. 1, S. 110 zitierten Arbeit von 1893.

4) Siehe Lucas, „Récréat.", II, 1896, p. 193—196. Die von Lucas gebrauchte Bezeichnung des Problems als eines Waleckischen entspricht aber nicht dem Sachverhalt.

2 weitere durch Vertauschungen in der zweiten und schließlich noch 2 weitere durch solche in der dritten Vertikalreihe; man erhält so folgende 6 Anordnungen:

d, b, c	g, b, c	a, e, c	a, h, c	a, b, f	a, b, i
g, e, f	a, e, f	d, h, f	d, b, f	d, e, i	d, e, c
a, h, i	d, h, i	g, b, i	g, e, i	g, h, c	g, h, f.

In jedem dieser 6 Sätze nehmen wir nun noch in einer Horizontalreihe, also etwa der ersten, eine zyklische Vertauschung vor, und zwar kehren wir die Richtung, in der die zyklische Vertauschung vorgenommen wird, von Satz zu Satz um. Unter Hinzunahme und Wiederholung der ursprünglichen Anordnung bekommen wir so folgende 7 Sätze:

1.	2.	3.	4	5.	6.	7.
a, b, c	b, c, d	c, g, b	e, c, a	c, a, h	b, f, a	i, a, b
d, e, f	g, e, f	a, e, f	d, h, f	d, b, f	d, e, i	d, e, c
g, h, i	a, h, i	d, h, i	g, b, i	g, e, i	g, h, c	g, h, f.

Diese 7 Anordnungen sind nun die Schemata für die ersten Promenaden an jedem Tage, und aus ihnen ergeben sich dann je 3 weitere, wie in § 1, S 98, resp. in Abschnitt I, § 3, S. 94—96, auseinandergesetzt ist. Dabei kommt jedes der 84 überhaupt möglichen Tripel in dem ganzen System, wie man sich leicht überzeugt, gerade einmal vor.

Eine entsprechende Anordnung für 15 Mädchen ist wahrscheinlich, wie schon gesagt, nicht möglich. Verzichtet man dagegen auf eine der Forderungen, nämlich die, daß die Anordnungen jeder Woche für sich eine Lösung des ursprünglichen Kirkmanschen Problems darstellen, so kommt man auf ein unzweifelhaft lösbares Problem, mit dem Sylvester[1]) sich gleichfalls beschäftigt hat, also das folgende: **15 Pensionatsmädchen gehen jeden Tag in 5 Reihen zu je 3 spazieren; wie sind die Anordnungen für 91 Tage (1 Vierteljahr) zu gestalten, wenn**

1) Sylvester in der schon oben zitierten Arbeit: Phil. Magazine (4) 21, 1861^{I}, p. 371 = Sylvester, Coll Mathem. Papers IV (Cambridge 1908), p. 266. Dort eine Losung angegeben

in dieser ganzen Zeit jedes an sich mögliche Trifolium von Mädchen ein- und nur einmal in einer Reihe vorkommen soll? — Wir haben also, wie rekapitulierend bemerkt sei, mit 3 nahe verwandten Problemen hier zu tun, denen allen dreien gemein ist, daß jeden Tag 15 Pensionatsmädchen in 5 Reihen zu je drei spazieren gehen. Dabei lauten die weiteren Forderungen der 3 Probleme, kurz ausgesprochen, so:

1) Bei dem ursprünglichen Kirkmanschen Problem: 7 Promenaden (1 Woche) so, daß jede mögliche Ambe ein- und nur einmal in irgendeiner Reihe vorkommt.

2) Bei dem zweiten Problem: 91 Promenaden (1 Vierteljahr) so, daß jedes Tripel im ganzen gerade einmal vorkommt.

3) Das (wahrscheinlich unlösbare) Problem Sylvesters vereinigt die Forderungen der beiden vorstehenden Probleme und verlangt demnach: Promenaden an $7 \cdot 13 = 91$ Tagen (1 Vierteljahr), zusammengefaßt zu 13 Wochen von je 7 Tagen, so, daß jede Wochenanordnung jede Ambe gerade einmal in einer Reihe und die Vierteljahrsanordnung jedes Tripel gerade einmal aufweist.[1])

Wie Kirkman gezeigt hat[2]), läßt sich für w Wochen ($w = 1, 2, 3, \ldots 13$) eine solche Anordnung der Promenaden angeben, daß dieselben 3 Mädchen in der ganzen Zeit höchstens einmal in einer Reihe zusammen gehen und daß irgend zwei beliebige in der ganzen Zeit gerade w-mal in einer Reihe zusammentreffen. — Fraglich ist dabei allerdings, ob sich die Anordnung so treffen läßt, daß das erste Zusammentreffen zweier beliebiger Mädchen stets gerade in der ersten Woche, das zweite in der zweiten usw., schließlich das w-te Zusammentreffen in der w-ten Woche stattfindet. Erhebt man auch diese Forderung, so stellt der Spezialfall $w = 13$ natürlich wieder das, wie gesagt, vermutlich unlösbare Sylvestersche Problem dar.

1) Dazu tritt — wenn man will, als 4. Problem — die oben (S. 110, Anm. 3) erwähnte Modifikation, die Kirkman dem Problem Sylvesters, also unserem jetzigen Problem 3, gegeben hat.

2) T. P. Kirkman, „Theorems on combinations“, Cambridge and Dublin Mathem. Journal 8, 1853, p. 39/40.

§ 4. Erweiterungen und Verallgemeinerungen.

Selbstverständlich sind 9 und 15 nicht die einzigen Werte von n (Anzahl der gegebenen Elemente), für die eine Auswahl und Anordnung der Tripel im Kirkmanschen Sinne möglich ist; vielmehr hatte Kirkman[1]) selbst schon die Möglichkeit einer solchen Anordnung bei $5 \cdot 3^{s+1}$ und James Mease die bei 3^{s+1} Elementen gezeigt, dieser unter Angabe einer Lösung für 27 Elemente.[2]) William Spottiswoode[3]) und Andrew Frost beschäftigten sich mit Methoden zur Angabe von Lösungen für $2^{2s}-1$ Elemente; dabei gab Frost für 63 Elemente, den auf $n = 15$ folgenden Fall dieser Reihe, eine ausführliche Lösung an[4]) mit dem Hinzufugen, daß auch für den nächsten Fall seiner Reihe, den von 255 Elementen, die angewandte Methode ausreiche. — Die soeben genannte Zahl $2^{2i}-1$ ist stets von der Form $12s+3$; denn

$$(2^{2i}-1)-3=(2^i-1)(2^i+1)-3=2^{2i}-4$$

ist, wie man sieht, sowohl durch 3 wie durch 4, also durch 12, teilbar Fur diesen Fall $n = 12s+3$ unter der Voraussetzung, daß $\frac{n-1}{2} = 6s+1$, die Anzahl der „Tage", eine Primzahl ist, gab R R Anstice[5]) Kirkmansche Anordnungen.[6])

In neuerer Zeit haben zwei Engländer, H. E. Dudeney und O. Eckenstein[7]), in einer Reihe kleinerer Veröffent-

---

1) Kirkman, Camb. and Dubl. Math. Journ. V, 1850, p. 259; s. a Phil. Mag. XXXVII, 1850

2) Mitgeteilt in Camb and Dubl. Math. Journ. V, p 261 durch Kirkman, der selbst im Phil. Mag. XXXVII einen noch allgemeineren Satz („Theorem II") aufgestellt hat.

3) W Spottiswoode, „On a problem in combinatorial analysis", Philos Mag. (4) III, 1852^I, p. 351—354

4) A. Frost, l c (Quart J. of Mathem. XI, 1871), p 32—37 — Über eine Behandlung der Falle $n = 63$ und 255 nach den Grundsätzen der hier in § 2 (S. 103f) beschriebenen Anstice-Peirceschen Methode s W. S B. Woolhouse und S. Bills in Educ. Times Reprints VIII, 1867^II (1868), p 76—83

5) Anstice, l c (Camb and Dubl Math Journ. VII, 1852), p. 279

6) Bei allen diesen Untersuchungen handelt es um Promenaden zu je drei. Über eine Ausdehnung des Problems in der Richtung, daß immer 4 Personen in einer Reihe gehen und nun das einmalige Vorkommen aller Tripel (statt vorher Amben) gefordert wird, s Kirkman, Cambr. and Dubl. Math Journ. 8, 1853, p. 42.

7) Henry E. Dudeney, Educ. Times Reprints (2) XIV, 1908, p. 97—99; XV, 1909, p. 17—19; XVII, 1910, p. 35—38 und p. 53; Oscar Ecken-

lichungen Richtlinien für eine allgemeine Lösung des Problems, also für jedes an sich zulässige n, d. h. für jedes n von der Form $6m+3$ (s. S. 101), entwickelt. Wir wollen hier auf diese Methode, die immerhin noch mit einer gewissen, in jedem einzelnen Falle zu überwindenden Schwierigkeit[1]) behaftet bleibt, nicht näher eingehen und uns darauf beschränken, zu ihrer Illustrierung ein Beispiel zu geben, und wollen hierfür einen Fall: $n=69$, wählen, der von den vorstehend genannten Untersuchungen von Kirkman, Mease usw. nicht berührt wird. Bezeichnet man die Elemente durch die Zahlen 1 bis 69, so ergibt sich nach Eckenstein[2]) die folgende Lösung[3]):

---

stein, ibid. XVI, 1909, p. 76—77; XVII, 1910, p 49—53 und p. 38—39 Die verschiedenen Publikationen der beiden Autoren greifen ineinander und sind übrigens durchsetzt von Prioritätskontroversen. Wie hier das beiderseitige Eigentum gegen einander abzugrenzen ist, habe ich nicht versucht, genau zu ergründen, doch geht mein vorläufiges unmaßgebliches Urteil dahin, daß beide Autoren sich anscheinend gegenseitig, wenn auch wohl in ungleicher Starke, beeinflußt haben · Ubrigens bemerkt einer der Autoren — Eckenstein (l. c, XVII, 1910, p 52/53) — ausdrücklich, daß die in seinen Arbeiten benutzten Methoden keineswegs vollig originell seien, womit offenbar auch den älteren Untersuchungen anderer der ihnen gebührende Einfluß eingeräumt werden soll.

1) Vgl. auch Dudeney, l c., vol XIV, p 99 und XVII, p. 53, sowie Eckenstein, l. c., vol XVII, p. 52.

2) Eckenstein, l. c., vol. XVI, p 76; vgl auch Dudeney, l c, vol XV, p 19 und XVII, p 36/37

3) Auch für die meisten anderen zulässigen Spezialwerte von n, etwa bis zur Grenze 100, findet man in diesen Veröffentlichungen von Dudeney und Eckenstein Lösungen angegeben, so für $n=21$ (Educ Times Repr XV, 1909, p 19); $n=27$ (XIV, p. 98; XVII, p 36 u 51); $n=33$ (XIV, p. 99 u XVII, p 50/51); $n=39$ (XVII, p. 51), $n=45$ (XVII, p. 50); $n=51$ (XIV, p 99 u XVII, p 52); $n=57$ (XVII, p 37/38: von beiden Autoren); $n=75$ (XVII, p 37/38 u. 39); $n=87$ (XV, p 18); $n=93$ (XVI, p. 76/77 u XVII, p. 37/38; vgl a. XV, p. 19 u XVII, p. 50); $n=99$ (XVII, p. 52); $n=111$ (XVII, p 37 u p. 39; vgl a. XV, p. 18/19); $n=123$ (XVII, p. 51); $n=135$ (XVII, p 52). Von diesen Fallen lassen sich freilich $n=27, 45, 99, 135$, und ebenso die in der Reihe fehlenden $n=63, 81, 117$, kurz überhaupt alle Fälle eines durch 9 teilbaren n, nach einem Verfahren, das wir sogleich noch beschreiben werden, behandeln durch Zurückführung auf die Fälle eines dreimal kleineren n

Erster Tag.

1, 10, 13;	14, 23, 26;	51, 60, 63;	4, 28, 67;	38, 62, 68;
18, 42, 48;	7, 22, 55;	8, 41, 56;	21, 54, 69;	34, 52, 65;
35, 53, 66;	9, 27, 40;	11, 31, 58;	12, 32, 59;	15, 37, 57;
6, 43, 50;	2, 39, 46;	17, 24, 49;	5, 16, 33;	36, 47, 64;
3, 20, 61;	19, 29, 45;	25, 30, 44.		

Die Anordnung des zweiten Tages erhält man, indem man zu den Zahlen des ersten Tages überall 3 addiert; übersteigt die so erhaltene Zahl 69, so ist 69 zu subtrahieren. Entsprechend bekommt man die Anordnungen des dritten, vierten . . . bis 23. Tages dadurch, daß man zu den Zahlen des ersten Tages überall 6, 9, . . 66 addiert. — Für die uns dann noch fehlenden 11 Tage: den 24., 25., . . 34 Tag, sind die ersten Tripel die folgenden:

1, 2, 66;	1, 9, 68;	1, 3, 5;	1, 65, 69;
1, 54, 62;	1, 30, 56;	1, 17, 51;	1, 15, 44;
1, 41, 60;	1, 24, 47;	1, 35, 36.	

Um aus diesen ersten Tripeln die weiteren Tripel des betreffenden Tages zu erhalten, hat man zu den Zahlen der Reihe nach nur 3 (für das 2. Tripel), 6 (für das 3. Tripel), . . . 66 (für das 23. Tripel) zu addieren; dabei sind wieder alle auftretenden Zahlen, die größer als 69 sind, um 69 zu verkleinern.

Es sei noch bemerkt, daß, wenn für eine gewisse Anzahl n von Personen eine Lösung des Kirkmanschen Problems vorliegt, eine solche sich nach Walecki[1]) auch sofort für die dreifache Anzahl $3n$ angeben läßt. Nachdem also beispielsweise, wie hier in § 2 geschehen, für $n = 15$ Lösungen angegeben sind, können wir unter Benutzung einer von diesen leicht eine Lösung für den Fall der 45 Personen erhalten. Zu dem Ende denken wir uns die 45 Personen in 3 Scharen von je 15 geteilt und stellen zunächst für jede dieser 3 Scharen nach dem vorliegenden Lösungsschema die Anordnungen des 15-Problems her. Schreiben wir diese Anordnungen nach den einzelnen Tagen untereinander, also die Sonntagsanordnung der zweiten Schar unter die Sonntagsanord-

1) Siehe Lucas, „Récréat.“, II, p. 189

nung der ersten und die Sonntagsanordnung der dritten Schar wieder unter die der zweiten und führen wir dies entsprechend für alle Tage durch, so erhalten wir also 7 Anordnungen der 45 Personen derart, daß immer nur Personen derselben Schar zu einem Tripel vereinigt sind. Wir schreiben sodann weiter die 3 Scharen untereinander:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, \\ 16, & 17, & 18, & 19, & 20, & 21, & 22, & 23, & 24, & 25, & 26, & 27, & 28, & 29, & 30, \\ 31, & 32, & 33, & 34, & 35, & 36, & 37, & 38, & 39, & 40, & 41, & 42, & 43, & 44, & 45, \end{array}$$

und stellen eine achte Anordnung (Promenade) her, indem wir je 3 untereinander stehende Ziffern kombinieren. Eine weitere (neunte) Anordnung erhalten wir dann, indem wir von den 3 obigen Reihen die erste ungeändert lassen, die Ziffern der zweiten um eine und die der dritten um zwei Stellen nach links zyklisch verschieben und sodann wieder die jetzt untereinander stehenden Zahlen kombinieren. Genau entsprechend ergibt sich hieraus wieder eine neue Anordnung usf. Man erhält so 15 (allgemein: n) Anordnungen zu den 7 $\left(\text{allgemein: } \frac{n-1}{2}\right)$, welche die Lösung für 15 resp. n Personen schon liefert, hinzu, d. h im ganzen 22 resp. $\frac{3n-1}{2}$, wie es sein muß.

Zur einzigen Voraussetzung hat dies Verfahren offenbar, daß n ungerade ist, was ja aber ohnehin eine unerlaßliche Bedingung für jede Kirkmansche Anordnung ist, denn, wie wir soeben (S. 115) erst in Erinnerung brachten, muß n stets von der Form $6m+3$ sein — Wir bemerken dazu, daß das $3n$, für das wir das Verfahren Waleckis anwenden, demnach von der Form $18m+9=9(2m+1)$ ist, und zwar sieht man umgekehrt sofort, daß sich dies Waleckische Reduktionsverfahren auch stets, wenn die Anzahl der Elemente ein ungerades Vielfaches von 9 ist, anwenden läßt Durch iterierte Anwendung des Verfahrens lassen sich so alle Falle $3^k \cdot (2m+1)$, wo $k \geq 2$ ist, auf Grund einer Lösung fur den Fall $3(2m+1)$ erledigen — Man erkennt auch sofort, daß dies Prinzip sich gleichfalls anwenden laßt, um aus den Promenaden von n^2 Personen zu je n (s S 94—96) allgemein Losungen für Promenaden von n^r Personen zu je n herzuleiten, vorausgesetzt jedoch, daß n eine Primzahl ist.[1]) Durch diese Methode erledigt sich u a dann auch der oben (S. 114) angeführte Measesche Fall.

1) Siehe Lucas, „Récréat.“, II, p 191

Kapitel XV.

Das Josephsspiel.

Voilà une histoire bien remarquable, et qui nous apprend assez qu'on ne doit point mépriser ces petites subtilités, qui aiguisent l'esprit, habilitant l'homme à de plus grandes choses, et apportent quelquefois une utilité non prévue.

BACHET
„Probl. plaisants et délectables", Préface

Inter res saepenumero, quae attentione nostra haud dignae videantur, observantur quaedam, quae satis profundam investigationem requirunt, ac non parum sublimibus speculationibus occasionem praebent

L EULER
„Observationes circa novum et singulare progressionum genus" Novi Comment Academiae Petropol XX, 1775 (1776), p 123

Ces recherches purement curieuses, qu'Euler a aimées par-dessus toutes les autres, ne doivent pas être tenues pour un vain et inutile amusement; leur nature intellectuelle n'est pas autre que celle des plus belles découvertes de physique mathématique ou de mécanique céleste Effusions de la même lumière, elles sont tirées des mêmes principes et mettent en branle les mêmes facultés, on ne saurait proscrire ou diminuer les unes sans affaiblir et compromettre les autres. La science ne peut être partagée, et nul n'y atteint à tout ce qui est utile, s'il ne s'occupe que du seul nécessaire

J BERTRAND
„Éloges académiques", Nouvelle série 1902, p 269.

§ 1. Geschichte und Literatur des Spiels.

Von dem bekannten jüdischen Historiker Flavius Josephus († etwa 95 n Chr.) erzählt die Legende, daß er bei Eroberung der Stadt Jotapata durch Vespasian mit 40 anderen Juden vor den anstürmenden Feinden in einen Keller flüchtete, hier aber, vor den Feinden zwar vorläufig geborgen, Gefahr lief, den Todesstreich von der Hand seiner Genossen zu empfangen, die lieber gegenseitig sich töten als den Römern in die Hände fallen wollten und die daher schon drohten, den Widerstand, den Josephus ihrem Vorhaben entgegensetzte, gewaltsam zu brechen Von der Zwecklosigkeit gütlichen Zuredens überzeugt, machte Josephus gute Miene zum bösen Spiel und rettete sein Leben nur durch eine List, indem er nämlich für die beabsich-

tigte gegenseitige Niedermetzelung, zur Vermeidung einer Unordnung, einen bestimmten Modus vorschlug. Dieses von Josephus vorgeschlagene Verfahren bestand darin, daß alle sich in einer Reihe aufstellen und nun von einem Ende abgezählt werden sollte, wobei jedesmal der Soundsovielte (nach einigen Autoren der „dritte“) getötet werden sollte. Und zwar war das Verfahren in der Weise gedacht, daß jedesmal nach Durchlaufung der Reihe die Zählung am anderen Ende der Reihe, also zyklisch, fortgesetzt und die ganze Abzählung so weit getrieben werden sollte, bis nur noch einer übrig wäre, der sich zum Schluß dann selbst den Tod geben sollte. Der Vorschlag wurde in die Tat umgesetzt, und Josephus soll die Aufstellung so vorgenommen haben, daß er als der letzte und ein besonders schwächlicher Gefährte, den er allenfalls leicht überwältigen konnte, als vorletzter übrigbleiben mußte.

Dies die Form, in der sich, von unwesentlichen Varianten abgesehen, die Legende von der wunderbaren Rettung des Josephus durch die Literatur von Jahrhunderten hindurchzieht Immerhin ist für eine bewußt zur Anwendung gebrachte List schwerlich ein vollwertiger Beleg aufzufinden; Josephus selbst berichtet, daß das Los entschieden habe und er „durch einen glücklichen Zufall oder die Vorsehung Gottes nebst einem anderen übriggeblieben“ sei.[1]) Wenn also Bachets Wort aus der Vorrede zu seinen „Problèmes plaisants“[2]), das wir unserem Kapitel vor-

---

1) Flavii Josephi Opera, ed Dindorf, Paris 1847, „De bello judaico“, liber III, caput VIII, 7· *Καταλείπεται δὲ οὗτος, εἴτε ὑπὸ τύχης χρὴ λέγειν εἴτε ὑπὸ Θεοῦ προνοίας σὺν ἑτέρῳ.* — Auch die gewöhnlich hierfür zitierte Bearbeitung des „bellum judaicum“ durch Hegesippus (Pseudonym eines unbekannten Autors, vielleicht des Ambrosius von Mailand; vgl. Teuffel, „Rom Litteratur“, II, § 433) „De bello judaico“, ed. C F. Weber et J Caesar, Marburg 1864, liber III, cap XVIII spricht nur von einer Entscheidung durch das Los und fugt dann hinzu· itaque accidit ut interemtis reliquis Josephus cum altero superesset neci. manebat necessario ut aut sorte condemnaretur, aut certe si exilio superfuisset sanguine socii contaminandus foret. suadet ut sorti renuntiarent (l c p 205).

2) Siehe 4. Ausgabe, 1879, p 8 f.

ausschickten, die Geschichte von der Rettung des Josephus als einen Beleg dafür anführt, daß Fragen, wie die in seinem Buche behandelten, unter Umständen von großem Nutzen sein könnten, so erscheint gerade dies Beispiel seiner zweifelhaften Glaubwürdigkeit wegen nicht gerade glücklich gewählt. Die angebliche List des Josephus wird vielmehr erst einer späteren Legendenbildung zuzuschreiben sein. Die erste Druckschrift nun, die das so entstandene Josephsspiel als solches — „ludus Joseph", wie es dort heißt, — erwähnt, ist die „Practica Arithmeticae" von Cardano[1]) (1539). Für ihn als Mathematiker mußte das Kunststück natürlich aus prinzipiellen Gründen Interesse haben, wenn auch die Ermittelung der begünstigten Plätze in dem konkreten Falle der Josephus-Legende keinerlei mathematische Hilfsmittel erfordert, sondern natürlich durch einfaches Probieren — Abzählen — geschehen kann

Außer Josephus werden noch andere als Erfinder des Kunststücks genannt, insbesondere der jüdische Gelehrte Abraham ben Esra (1093—1167), und für diese Form der Legende hat Daniel Schwenter[2]), der bekannte Lehrer der orientalischen Sprachen und der Mathematik an der Altdorfer Hochschule[3]), eine Quelle ausfindig gemacht, die noch älter als das soeben zitierte

1) Cardano, „Practica Arithmeticae", Mediol 1539, Cap 61. „De extraordinariis et ludis", § 18 = Cardani Opera, Lugduni 1663, IV, p. 113 Vgl. auch M Cantor, „Gesch. der Mathematik", II (2 Aufl 1900), p 501.

2) Daniel Schwenter, „Deliciae physico-mathematicae", 1636, I. Teil, 46. Aufgabe, p 79 Vgl auch „Schau-Platz der Betrieger" (Hamburg u. Frankfurt 1687), p 235, sowie H Graetz, „Geschichte der Juden", Bd 6 (1861), p. 211. — Daniel Schwenter gibt ebendort übrigens weiter an, das Spiel sei bei „Christoff Rudolph Schultzen" zu finden, ich bin jedoch nicht in der Lage, die Richtigkeit dieser Behauptung durch Angabe der betreffenden Stelle aus den Werken Christoph Rudolffs, des bekannten Rechenmeisters aus der ersten Halfte des 16 Jahrhunderts, zu erweisen, obwohl ich zahlreiche Ausgaben seiner verschiedenen Schriften hierauf angesehen habe; auch eine diesbezügliche Frage im „Intermédiaire des mathématiciens", t. 16 (1909), p. 124 (Question 3564) hat bisher keine Antwort erfahren.

3) Vgl. hier S. 325 nebst Anm. 4 dort.

Werk Cardanos ist und die wir als die älteste, unser Kunststück überhaupt enthaltende Druckschrift ansehen dürfen. Wie Schwenter angibt, erzählt nämlich Elias Levita der Deutsche (1472—1549) am Ende seines 1518 in Rom gedruckten Buches ha-Harkabah auf Grund einer Erzählung, die Ibn Esra selbst in seinem „Buche der Taten"[1]) gegeben haben soll, die folgende Geschichte: Eines Tages fuhr Ibn Esra mit 15 seiner Schüler und 15 leichtfertigen Gesellen übers Meer, als sich ein gewaltiger Sturm erhob, der das Schiff so stark gefährdete, daß der Schiffsführer es für notwendig erklärte, die Hälfte der auf dem Schiffe befindlichen Personen ins Meer zu werfen. Ibn Esra ging sofort auf diesen Vorschlag ein und meinte, es sei besser, die Hälfte sterbe als daß das Schiff mit allen Personen versinke. Der gelehrte Rabbi schlug daher vor, das Los entscheiden zu lassen und zwar in der Weise, daß alle 30 Personen sich im Kreise aufstellten und nun im Kreise herum abgezählt werde, wobei jeder neunte ins Meer geworfen werden solle, so lange bis das Schiff um 15 Personen erleichtert sei. Der Vorschlag wurde angenommen, und die anfängliche Aufstellung anzugeben, wurde Ibn Esra selbst überlassen. Dieser stellte nun seine 15 Schüler („S") und die 15 Taugenichtse („T") in folgender Weise auf:

4 S, 5 T, 2S, 1 T, 3 S, 1 T, 1 S, 2 T, 2 S, 3 T, 1 S, 2 T, 2 S, 1 T.

Hierdurch erreichte er — die Abzählung begann bei dem in unserem Schema am linken Ende stehenden Schüler —, daß nur die 15 Taugenichtse von der Abzählung getroffen wurden und die 15 Schüler also sämtlich am Leben blieben.[2])

1) Moritz Steinschneider, „Abraham ibn Esra", Zeitschr. f Math u. Phys 25 (1880), Supplem. zur histor.-literar. Abt., p 124, Anm. 247, glaubt nicht, daß man im Mittelalter eine besondere Schrift dieses Inhaltes gekannt habe.

2) Nach M. Steinschneider (ibidem — s. vorige Anm —, p 123/4, sowie „Die Mathematik bei den Juden", Bibl mathem. N. F. 10, 1896, p. 39/40 und „Catalogus librorum hebraeorum in bibliotheca Bodleiana", Berlin 1852—1860, col. 687, Nr. 71) ist für die Geschichte in der hier gegebenen Darstellung auch eine dem Abraham ben Esra, allerdings wohl zu Unrecht, zugeschriebene hebraische Schrift „Tachbülā" (Kunstgriff, Stratagema), die im Jahre 1546 gedruckt wurde, zu nennen. Den

Die Erzählungen von Josephus und Abraham ben Esra sind geeignet, zu der Vermutung zu führen, daß unser Kunststück jüdischen Ursprungs sei oder doch aus dem Orient, der Wiege so vieler wunderbarer und märchenhafter Dinge und Erzählungen, stamme, und doch steht diese Annahme, die in der Tat mehrfach gemacht wurde, nur auf schwachen Füßen und entbehrt jedenfalls durchaus eines Wahrheitsbeweises. Ibn Esra insbesondere kann jedenfalls nicht der Erfinder oder wenigstens nicht der erste Erfinder gewesen sein.[1]) Vermögen wir doch für den Kunstgriff Quellen nachzuweisen, die älter sind als der gelehrte Rabbi, und damit kommen wir überhaupt erst zu den ältesten, uns bekannten Schriftquellen, verschiedenen Handschriften aus der Zeit des 10 bis 12. Jahrhunderts. Wir beginnen mit der ältesten, einer Einsiedeler Handschrift[2]), in der unser Spiel in

---

darin fur die Lösung angegebenen Memorialvers insbesondere hat, nach Steinschneider, „Abraham gewiß nicht geschrieben". — Wenn Steinschneider übrigens bei dieser Gelegenheit (in der erstgenannten Abhandlung, sowie im „Catalogus", l. c sub Nr. 74) auf eine Übertragung von Pfeiffer in lateinische Verse (1665) — gemeint ist jedenfalls der berühmte Orientalist August Pfeiffer (1640—1698) — verweist, so weiß ich darüber weiteres nicht anzugeben, auch dürfte dies Vorkommnis für unsere Zwecke ziemlich unerheblich sein — Auch eine Munchner hebräische Handschrift spanisch-jüdischen Ursprungs ist außer den bereits genannten Vorkommnissen hier wohl noch zu erwähnen Es ist Nr. 341[5] bei M. Steinschneider, „Die hebräischen Handschriften der K. Hof- und Staatsbibliothek in München" (München 1895), p. 184 Freilich gibt diese Handschrift (nach Steinschneider) die Rätselfrage in der Fassung, daß jemand von 15 Florinen und 15 Groschen die Hälfte der Stücke und zwar durch wiederholte Fortnahme immer des neunten erhalten soll, wobei nun die Frage aufgeworfen wird, wie die Münzen anzuordnen seien, damit gerade die 15 Florinen getroffen werden. Aber auch hier wird ausdrücklich auf Abraham ben Esra verwiesen, und demzufolge wird denn auch für die Losung ein Memorialsatz (in Prosa) angegeben, der nicht auf die Fassung der 15 Florinen und 15 Groschen, sondern auf die des Insmeerwerfens von 15 Personen (Heiden) zugeschnitten ist.

1) Steinschneider, l c (Bibl. mathem. 1896, p. 40) glaubt überhaupt nicht recht, daß die Juden des 12. Jahrhunderts dieses arithmetische Volksrätsel schon gekannt haben

2) Codex Einsidelensis Nr. 326

folgender, von Theodor Mommsen[1]) herausgegebenen Fassung vorkommt:

Quadam[2]) nocte niger[3]) dux nomine, candidus[3]) alter
    Forte subintrarunt unica tecta simul.
Candidus exhibuit secum ter quinque nitentes[4])
    Totque niger[5]) nigros more colore pares.[6])
Candide, de nostris primus quis, dixerat alter
    Providet excubias? nam tua dicta sequar.
Haec placido contra[7]) respondit candidus[3]) ore:
    Judicio quemquam nolo[8]) gravare meo,
Ne nova lis socios per me conspiret in arma·
    Sed tibi consilium non[9]) removebo meum
Ordine disponam socios discumbere cunctos,
    Quos sors nona legat noctis in excubias
Candida sed sedeat nigris commixta catervis,[10])
    Ut me velle viros fallere nemo putet.
Quattuor eximii candoris, quinque nigelli,
    Candiduli bini, unicus atque niger.

1) Th. Mommsen, „Handschriftliches. Zur lateinischen Anthologie", Rhein. Museum für Philologie, N F., 9 Jahrg., 1854, p 298. Das Gedicht ist abgedruckt u a. bei M Curtze, „Weiteres über das Josephspiel", Bibl math (2) 9, 1895, p. 34

2) „Quidam" schreibt auf Grund eines noch unten zu erwahnenden Meermannischen Codex unbekannten Alters die „Anthologia veterum latinorum epigrammatum et poematum" von Peter Burmann, t 2, Amsterdam 1773, p. 402 (Lib. V, Ep 121) und ebenso die Ausgabe von H. Meyer, Leipzig 1835, t. 2, p 61 (Nr 1061)

3) Hier Majuskel bei Burmann und bei Alexander Riese, „Anthologia latina sive poesis latinae supplementum", Pars prior, Fasc 2, Leipzig 1870, p. 184.

4) „Extiterat numero quindenus candidus ipse" (Burmann und Meyer).

5) „videt" (Meyer, s Burmann, l c, Anm).

6) „Totque genis nigro, Maure, colore pares" bei Lucian Müller, „Uber ein heutiges Kinderspiel", Fleckeisens Jahrbücher fur class Philol, 11. Jahrg (= Neue Jahrb f Philol u. Padag, 35 Jahrg, 91 Bd), 1865, p. 219; ebenso Riese

7) „E contra placido" (Burmann und Meyer).

8) „Judicio nolo quemque" (Burmann und Meyer)

9) Burmann hat „nunc", vermutet aber „non removebo" oder „non reticebo"; vgl auch Meyer, l. c, Annotationes, p 45.

10) „caterva" (Riese).

Splendentes trini[1]), fuscato[2]) pelle nigellus,
Candidus hinc unus carboneique duo,
Fulgentes bini, fuscato tegmine trini,
Candidus hinc unus carboneique duo,
Candiduli bini splendentes pelle decora,
Quos sequitur cunctos unicus atque niger.[3])
Hoc super ingenio cunctos sors nona nigellos
Sic cecidit[4]); turba candida sorte caret.
Dux niger excubias solus cum milite fusco
Pervigil ingratus[5]) duxit adusque diem,
Ast placitum tota carpebat nocte soporem
Candidus ingenio praeditus atque sui.

Zu deutsch etwa: „Einst kamen zur Nachtzeit zwei Truppenführer, der eine Schwarz, der andere Weiß mit Namen, zufällig in dasselbe Quartier. Weiß brachte mit sich 15 weiße Soldaten, Schwarz ebensoviele schwarze. ‚Weiß', sagte Schwarz, ‚wer von den Unsrigen soll zuerst die Wache übernehmen? Gern will ich nämlich deinen Weisungen folgen.' Weiß entgegnete hierauf mit sanftheiterer Miene: ‚Niemanden will ich mit meiner Entscheidung beschweren, damit nicht durch meine Schuld ein Streit ausbricht und die Gefährten von neuem zu den Waffen ruft. Aber meinen Rat will ich dir nicht vorenthalten: in Reihe und Ordnung möchte ich alle Genossen sich lagern lassen, und das neunte Los mag sie alsdann für die Nachtwachen auswählen Aber die weiße Schar soll mit der schwarzen vermischt dasitzen, damit niemand wähnt, ich wolle die Männer betrügen'" — In den nun folgenden 8 Versen gibt die Handschrift die Regel, nach der die weißen und schwarzen Gefährten anzuordnen sind, wenn nur Schwarze vom Lose getroffen werden sollen, richtig an Wir übergehen diese Vorschrift, die mit der oben (S. 121) bereits gegebenen natürlich übereinstimmt, und fahren daher mit dem Ge-

1) „terni" (Riese) 2) „fuscata" (Riese).

3) Zu den die Losung gebenden 8 Versen vgl. Lucian Müller, l. c. p. 218 und 223, wo diese Verse mit mehr oder weniger großen Abweichungen nach einem Blatte des 12. Jahrhunderts aus einem Leidener Miscellancodex und nach einer Handschrift des 13. Jahrhunderts aus einem Baseler Miscellancodex abgedruckt sind.

4) „Accepit" oder „cunctis ... nigellis incidit, at" (Lucian Müller).

5) „ingratas" (Lucian Muller)

dicht fort: „Infolge dieses Kunstgriffs traf das neunte Los gerade alle Schwarzen; die weiße Schar ging frei aus Widerwillig mußte der schwarze Führer allein mit den schwarzen Soldaten bis zum Morgen die Wache halten, während der ingeniöse weiße Führer und die Seinen die ganze Nacht hindurch den ersehnten Schlaf genossen.“

Nach Mommsen[1]) ist der hier in Betracht kommende Teil der Handschrift „wohl eher im zehnten als im neunten Jahrhundert geschrieben“. Über Alter und Ursprung des Gedichts selbst steht nichts fest, und von philologischer Seite sind überhaupt verschiedene Gründe gegen einen römischen Verfasser geltend gemacht.[2]) Lucian Müller stützt die Zweifel, die er gegen einen römischen Ursprung des Gedichts erhebt, freilich nicht in erster Linie auf sprachliche Gründe, sondern auf die Überlieferung, daß Abraham ben Esra der Erfinder des Kunstgriffs gewesen sei.[3]) Demzufolge nimmt Müller unbedingt einen orientalischen Ursprung des Spiels an, sei es nun, daß ein chaldäischer oder arabischer, sei es, daß ein hebräischer Rechenmeister der Erfinder sei, und er vermutet, daß spanisch-jüdische Gelehrte, wie Abraham ben Esra einer war, das Kunststück in die abendländische Bildung und Literatur eingeführt haben. Wie dem auch sei, so kann jedenfalls Ibn Esra selbst nicht einmal dieser erste Vermittler gewesen sein, da eben, wie schon oben hervorgehoben wurde, die Einsiedeler Handschrift, von dem lateinischen Gedicht selbst gar nicht zu sprechen, bereits älter ist als der gelehrte Rabbi. Überhaupt möchte man glauben, daß die Form der Ibn Esra-Legende und ebenso allerdings die der Einsiedeler Erzählung nicht die älteste Form unseres Kunststücks ist, da es sich hier um Angabe von 15 bevorzugten Plätzen unter 30 handelt, während uns in der Josephus-Legende der Fall entgegentritt, daß nur ein resp. zwei Plätze bevorzugt sind. Denn, wenn auch die praktische Ermittelung der 15 günstigen Plätze unter den 30

1) Rhein. Museum, l c p. 296.

2) Auch Riese hält wenigstens die Gegenüberstellung von Weißen und Schwarzen nicht für römisch (l c. Praefatio, p. XLIII)

3) Lucian Müller, l c p. 219.

leichter auszuführen ist als die des einen resp. der zwei begünstigten, da in dem ersten Falle nur bis zur Ausscheidung der ersten 15 abgezählt zu werden braucht, in dem zweiten Falle dagegen das Abzählverfahren bis zur Ausscheidung von 29 resp. 28 Personen durchgeführt werden muß, so ist doch das gedächtnismäßige Festhalten einer Anordnung mit 15 bevorzugten Plätzen schwerer als das einer solchen mit nur einem oder zwei begünstigten Plätzen. Freilich wird man auch aus der Josephus-Legende, selbst wenn ihre Unabhängigkeit und Ursprünglichkeit feststände, noch keinerlei Schlüsse auf das Ursprungsland ziehen dürfen, da sie gewiß ebensowohl orientalisch-jüdischen wie abendländischen Ursprungs sein könnte.

Außer der Einsiedeler Handschrift erwähnten wir gelegentlich schon (S. 123, Anm. 2) einen Meermannischen Codex, in dem sich das lateinische Gedicht, und zwar hinter Rhythmen aus dem 10. Jahrhundert, vorfindet, ohne daß jedoch Genaueres über das Alter dieser Handschrift feststände.[1]) Freilich finden sich in diesem Codex nur die ersten 12 Verse des lateinischen Gedichts, die eigentliche Aufgabe unseres Spiels also: der Schreiber des Codex oder ein Vorgänger von ihm hatte die Auffindung der Lösung offenbar dem Scharfsinn seiner Leser überlassen wollen und deshalb nach Vers 12 innegehalten.[2])

Im Gegensatz dazu geben mehrere Handschriften des 12. Jahrhunderts nur die Auflösung, ohne die Aufgabe, z B eine Berner Handschrift[3]) des 12 Jahrhunderts in folgenden beiden Fassungen[4]):

1) Siehe Lucian Müller, l. c p 217.

2) Lucian Muller, l. c p 218

3) Codex Bernensis 704 — Auch die in Anm. 3, S 124, genannte Leidener Handschrift des 12. Jahrh enthalt nur die Lösung nebst einer der Veranschaulichung dienenden Figur, dagegen nicht die Aufgabe Über weitere solche Vorkommnisse unseres Kunststucks in Handschriften des 12. Jahrh. s. Franz Joseph Mone, „Räthselsammlung", Anzeiger für Kunde der teutschen Vorzeit, 7. Jahrg (1838), col. 39, Nr. 41 und 8. Jahrg. (1839), col. 315, Nr. 69 (die zweite dieser beiden Lösungen im wesentlichen in der Fassung der Einsiedeler Handschrift; die der ersten Lösung beigegebene Zeichnung ist fehlerhaft).

4) Siehe Hermann Hagen, „Carmina medii aevi maximam par

Sors cuiusdam de XV Christianis totidemque Judaeis

Bis duo nam nivei praesunt et quinque nigelli
His supponuntur clari duo postque secuntur,
Unius et taetri interimunt vestigia terni
Albi lacte magis, Maurus quoque nectitur ipsis.
Candidus inseritur, niger unus et alter habetur,
His cristallini sociantur in ordine bini,
Tres titubant nigri lactantis robore victi.
Post duo corvini et nivei sunt denique bini
Orbem tum furvus demum determinat unus.

Item de sorte supradicti episcopi.[1])
Quattuor et pentas, duo monas tres mias unus,
Hinc dias ambo, trias, unus duo et duo monas.[2])

Es würde uns natürlich zu weit führen, auf alle Handschriften, die unser Spiel betreffende Stellen enthalten, näher einzugehen. Es muß uns genügen, zu wissen, daß Handschriften des 10, 11. und 12. Jahrhunderts bereits Stellen über das Spiel enthalten, und einige dieser Stellen, insbesondere die aus dem Einsiedeler Codex als das bis jetzt älteste bekannte Vorkommnis unseres Spiels, kennengelernt zu haben. Daß die Handschriften mehrfach nur die Auflösung des Spiels angeben, nicht die Aufgabe selbst, ist offenbar so zu verstehen, daß die Aufgabe an sich zu jener Zeit — 12 Jahrhundert — bereits recht verbreitet und

---

tem inedita Ex Bibliothecis Helveticis collecta" (Bern 1877), LXXXV p 145—146, abgedruckt Bibl mathem. (2) 9 (1895), p. 34 (M Curtze) Das fehlerhafte XX der Überschrift ist an diesem letzteren Orte (Curtze) in XV verbessert; überhaupt ist die Stelle nicht ohne Korruptelen, und wir haben daher an die Stelle des 4 und 5. Verses der Berner Handschrift die Verse 4—6 gesetzt, die A Riese aus älteren Handschriften (10—11 Jahrh) angibt (l. c p. 185).

1) Zu dieser Überschrift ist zu bemerken, daß dieser zweiten, von der ersten getrennten Losung in der Handschrift ein Gedicht vorhergeht mit der Überschrift „ammonitio uictoris pape" (Victoris Papae, also des Papstes Victor); s. Hagen, l. c. p. 145, Anm.

2) Diese Verse auch in der Handschrift Codex lat. Monacensis Nr. 14836 (11. Jahrh); s. M Curtze, „Zur Geschichte des Josephsspiels", Bibl. math. (2) 8 (1894), p. 116.

bekannt war und daß es den Autoren nur darauf ankam, die Auflösung, die bei dem Kunststück zu beobachtende Regel, festzuhalten und zu überliefern.

Übereinstimmend behandeln alle diese Handschriften das Kunststück in der Form, daß immer der Neunte beim Abzählen ausgeschieden wird. Freilich, die soeben (Anm. 2, S. 127) erwähnte Münchener Handschrift Nr. 14836 weist bereits daraufhin, daß man ebensogut irgendeine andere Zahl statt der 9 nehmen könnte. Ein von Karl Bartsch herausgegebenes Meisterlied, das dem Reinmar von Zweter zugeschrieben ist[1]) und dessen erster, für uns hier allein in Frage kommender Teil möglicherweise auch wirklich von Reinmar herrührt[2]), nimmt denn auch eine Abzählung nach 10 an. Es sei gestattet, von diesem nach Bartsch jedenfalls dem 13. Jahrhundert angehörenden Liede wenigstens den Anfang anzugeben:

Ander driu, wie man juden und cristen ûz zelt.

Von juden und cristen wart ein kiel
geladen alsô swaere, swie daz ein lôz an sie geviel,
daz man ir beider drîzic zesamen sazt und schiet sie nâch der zal
Den zênden solt man werfen hin
sô daz er solt ertrinken nu merkent an ein scharpfen sin,
wie daz die cristen flîzic dâ mit den juden triben solich wal.

Nun folgt die Regel für die Anordnung der 15 Christen und 15 Juden, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, richtig, d. h den genannten Bedingungen und der Forderung der Aufgabe gemäß. Eine daran anschließende geistliche Deutung, in der das Schiff auf die Welt und das Meer auf die Hölle bezogen wird, und eine warnende Vermahnung bilden sodann den Hauptteil des Liedes. — In dieser Form, mit 15 Christen und 15 Juden, von denen die letzteren ins Meer geworfen werden, findet sich

1) Siehe „Meisterlieder der Kolmarer Handschrift", herausg. von Karl Bartsch = Bibliothek des litterarischen Vereins zu Stuttgart, Bd. 68 (Stuttgart 1862), p. 500.

2) Siehe Bartsch, l. c. p 694/5, sowie p. 159

das Kunststück fortab besonders häufig, so z. B. — auch mit Abzählung nach 10 — in Sebald Tuchers „Gült- und Zinsbuch“ (1497), einer Handschrift des freiherrl. Tucherischen Geschlechtsarchivs[1]), oder — unter mathematisch schon etwas allgemeineren Gesichtspunkten — in dem Appendix zum „Triparty“ des Nicolas Chuquet, einer handschriftlichen, erst in neuerer Zeit herausgegebenen[2]) Aufgabensammlung, die, mag sie nun von Chuquet selbst oder einem anderen herrühren, jedenfalls demselben Jahre 1484 angehört[3]), in dem das umfassende Rechenwerk, dem sie als Anhang beigegeben ist, eben der „Triparty“ Chuquets, abgeschlossen wurde.[4]) — An einer, freilich viel späteren Stelle finde ich

1) Siehe W. Loose, „Zählspiel“, Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Organ des Germanischen Museums, N. F., 24. Jahrg. (1877), col. 248. — Auch in einer lateinischen Handschrift der Bodleiana kommt die „fabula de 15 Judaeis et 15 Christianis“ in der Form vor, daß immer der Zehnte ins Meer geworfen wird und so gerade die 15 Juden getroffen werden Vorwiegend nur der Umstand, daß Steinschneider dies Vorkommnis mehrfach erwähnt (s. seinen „Catalogus libr hebr. in bibl. Bodl“, col 687, sowie auch seine Abh. über „Abraham ibn Esra“, l c p 124) veranlaßt mich, hieran nicht achtlos vorübergehen; denn an sich ist diese Handschrift — 17 Jahrhundert — so jung, daß sie neben den älteren Vorkommnissen wohl nur geringes Interesse verdient

2) Von Aristide Marre im Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche 14 (1881), p 413—460; s p 453 (Aufgabe 146)

3) Siehe Cantor, „Gesch d. Math“, II (2. Aufl, 1900), p. 359.

4) Außer diesen Vorkommnissen sei noch eins erwähnt, von dem ich freilich nur aus den Literaturangaben, die Steinschneider gibt, weiß· „Anonym als Vorfall zwischen Juden und Christen arabisch mit hebräischer Schrift in der Bodl. HS. bei Uri 212“, so heißt es wortlich bei Steinschneider (Abh. über „Abraham ibn Esra“, l. c. p 124; s. a. seinen „Catalogus libr hebr. in bibl. Bodl“, l. c.) Aus Johannes Uri, „Bibliothecae Bodleianae codicum manuscriptorum orientalium ... catalogus“ (Oxonii 1787), insbesondere aus dem ersten Abschnitt dieses Katalogs, der die „Codices manuscripti hebraici et chaldaici, una cum arabicis charactere hebraeo expressis“ umfaßt, ist jedoch, so viel ich sehe, nichts hierüber zu entnehmen.

geradezu den Namen „Judenersäufespiel“ für unser Kunststück angegeben.[1])

Eine in Schweden erhaltene Überlieferung will wissen, daß niemand anders der Erfinder dieses Kunststücks gewesen sei als der Heilige Petrus. Ist doch das dort unter dem Namen „Sankt Päders Lek“ (Das Spiel des Heiligen Petrus) erhaltene Spiel nichts anderes als unser „Judenersäufespiel“. St. Peter, so berichtet die Legende, war einst auf einem Schiff, auf dem sich insgesamt 15 Christen und 15 Juden befanden. Die Fortsetzung ist dann die bekannte mit der Forderung, daß nach 9 abgezählt wird und gerade die 15 Juden getroffen werden. — Die richtige Vorschrift für die entsprechende Aufstellung der Christen und Juden findet sich am Ende eines runischen Kalenders in folgender Weise angegeben[2]):

XXXXIIIIIXXIXXXIXIIXXIIIXIIXXI

Merkwürdig ist, daß dort aller Kommentar fehlt. Also auch hier,

1) „ludus quem vocant Mergendi Judaeos“ in der „Arithmetica curiosa“ des Jesuiten Adalbert Tylkowski, Ausgabe 1690, p 196.

2) Siehe Jens Wolff, „Runakefli le Runic Rim-stok, ou Calendrier runique“ (Paris 1820), p. 52 und J. Barnard Davis, „Some account of Runic Calendars and ‚Staffordshire Clogg‘ Almanacs“, Archaeologia or miscellaneous tracts relating to antiquity, t. 41 (1867), p. 472, Anm G. Eneström (Bibl math. N F. 7, 1893, p 32) nennt eine schwedische arithmetische Handschrift von Rizanesander (1601) mit dem „Sankt Peders lek“ und gibt auch an, daß mehrere schwedische Runenstäbe des 17. Jahrhunderts die Lösung unserer Rätselfrage (nur die Lösung) aufweisen. — Es sei hier gleich bemerkt, daß sich auch in Dänemark die Aufgabe unseres Spiels, freilich in ganz anderer Einkleidung, im Volke erhalten hat. Das bei Jens Kamp, „Danske Folkeminder, Æventyr, Folkesagn, Gaader, Rim og Folketro, samlede fra Folkemunde“ (Odense 1877), p 323 als Nr. 7 angegebene und vom Sammler auf Falster erbeutete Rätsel verlangt: Auf einem Dreieck sind zusammen 27 Striche (auf jeder Seite 9) und in einer Ecke ein Kreuz Wo muß das Abzählverfahren (nach je 9) begonnen werden, wenn das Kreuz zuletzt übrig bleiben soll? Dabei hat die volkstümliche Einkleidung verschiedene Formen angenommen, z B. die: Ein Fronherr gelobte einem Bauern, seinen Sohn vom Kriegsdienst freizugeben, wenn er ein Rätsel raten könne, und nun folgt die angegebene Aufgabe.

wie in den zuvor genannten Handschriften, die richtige Auflösung ohne die Aufgabe selbst!

Aus Gründen nationaler oder religiöser Gegensätzlichkeit werden begreiflicherweise die Christen und Juden, sei es im Volksmunde, sei es bei einzelnen Autoren, hier und da durch Vertreter anderer Rassen, Religionen oder Nationen ersetzt sein. So wird denn, um nur ein Beispiel aus neuer Zeit zu nennen, ein in Paris 1802 erschienenes Spielbuch[1]) zitiert, in dem die Geschichte von Franzosen und Engländern erzählt wird, natürlich so, daß die Engländer ins Meer geworfen werden. Mehr Beachtung als solche vereinzelten Varianten verdient die häufiger vorkommende Einkleidung, in der an die Stelle der Juden Türken getreten sind. In dieser Form, als Spiel der 15 Christen und 15 Türken, und zwar mit Abzählung nach 9, wird das Kunststück dem sizilianischen Dichter Antonio Veneziano (1543—1593) zugeschrieben, der es während seiner Gefangenschaft in Algier ersonnen haben soll.[2]) Doch schon, als Veneziano noch ein Kind war, im J. 1547 nämlich, hat beispielsweise Hans Sachs die Fabel, allerdings mit Abzählung nach 10, in einem Spruchgedicht besungen. Der Nürnberger „Schuh–macher und Poet dazu" ist sogar in der Lage, uns das Jahr — 1403 n. Chr — der Schiffsfahrt und deren Route

---

1) „Le manuel des sorciers", 2e éd, p 70; ich zitiere nach „Mélusine, Recueil de Mythologie, Littérature populaire, traditions et usages", herausg. v. H. Gaidoz und E Roland, t III (Paris 1886/87), col 429; s a ebenda col 308 — In Frankreich führt unser Problem übrigens heute wohl den Namen „Problème de Caligula" (Intermédiaire des mathématiciens 1, 1894, p 9), eine Bezeichnung, über deren Entstehung ich freilich keine Auskunft zu geben vermag.

2) Siehe „Opere di Antonio Veneziano", herausg von Salvatore Arceri (Palermo 1861), p. 119 und Giuseppe Pitrè, „Usi e Costumi, Credenze e Pregiudizi", vol IV (Palermo 1889), p 474—476 (die hier gegebene „Tavola del giuoco" ist freilich fehlerhaft). — Übrigens war mir das erste dieser beiden Werke auch mit Hilfe des Auskunftsbureaus der Deutschen Bibliotheken nicht erreichbar Ich gebe das Zitat nur nach dem zweitgenannten Werke resp. nach der in der nächsten Anm. zitierten Abhandlung von J Bolte bzw Reinhold Köhler, der ich überhaupt viel bibliographische Belehrung für diesen Abschnitt verdanke.

— von Konstantinopel nach Venedig — anzugeben. Doch hören wir den Meistersänger selbst[1]):

Historia.

Die XV Christen und XV Türcken, so auff dem meer furen.

Als man zelt vierzehen hundert jar
Unnd auch drey jar, begab sich zwar,
Das zu Constantinopel auff sassen
Dreissig person zu schiff, der wassen
Fünffzehen Türckn und fünfzeh Christen
Die wolten abfaren mit listen
Auff Venedig. Als die an klag
Nun furen biß an dritten tag,
Da kam an sie ein ungewitter
Von sturmen, winden, herb und pitter.
Das meer wurd wütend und ungstüm,
Mit hohen wellen umb und ümb,
Schlugen an das schiff grausamlich,
Das fur yetz auff, den undtersich.
All kauffman-schatz man da auß warff
Ins meer, doch war der wind so scharff,
Das alle hilff war gar vergebens.
Sie all verwagen sich deß lebens.
Ein yeder rüfft zu seinem Got
Inn dieser grossen wassers-not
Nun war in dem schiff ein patron,
War ein vernünfftig, sinnreich mon.
Der selb war ein haimlicher Christ,
Doch im schein ein Machometrist,
Das man ihn durchs meer ließ paßirn,
Gar gschickt mit rechnung zifferiern
Der sprach: Wenn ir folgt meinen sinnen,
Wolt wir wol halb dem tod endtrinnen.
Sie fragten, wie das selb möcht gschehen
Da wart der patron zu in jehen:
Wenn man euch setzet aller ding
Her inn dem schiff frey zirckel-ring
Und nach dem umbhin zelet bloß,
Wer der zehend wer nach dem loß,
Das man den hin nauß wurff ins meer,
Und zelet wider umbhin sehr,
Den zehenden nauß wurff an gremen,
Biß ihr fünffzehen hin nauß kemen
Die andren fünffzehen ich eben
Darvon wolt bringen bey dem leben
Deß fürschlags giengen sie all ein
Yeder hofft in der zal zu sein,

1) Siehe Hans Sachs, herausg. von Adelbert v. Keller, Bd 2 (= Bibl. des litterar Vereins in Stuttgart, Bd 103), Tubingen 1870, p. 335—337; s. dazu a. Bd 21, herausg von E Goetze (1892), p. 365; 23 (1895), p. 513; 25 (1902), p 261/62 (Nr. 2477, sowie Nr 2476). S. a „Historien und gute Schwänke des Meister Hanns Sachs", herausg. von Konrad Spät, genannt Frühauf [= Wolfg. Adph Gerle] (Pest 1818), p. 40—43, sowie J Bolte, „Stoffgeschichtliches zu Hans Sachs" (nach Reinhold Köhlers Kollektaneen), Euphorion 3 (1896), p. 351—362. Hans Sachs hat denselben Stoff auch in einem Meisterliede behandelt, das bei K. Goedeke, „Dichtungen von Hans Sachs", I. T. (= Deutsche Dichter des 16. Jahrhunderts, Bd. IV), Leipzig 1870, p 239—241 („Die 30 kaufleut") gedruckt ist.

Die das loß vom tod wurd quitiren.
Der patron thets uber-summieren,
Setzt erstlich zwen Christen mit witzen
Und hieß ein Türcken zu in sitzen,
Darnach setzt er drei Christen hin,
Fünff Türcken setzet er zu ihn,
Zwen Christen setzt er darnach wider
Und setzt zwen Türcken zu ihn nider,
Vier Christen setzt er an die schar
Und eynen Türcken zu in dar,
Zu dem so setzt er eynen Christen
Und darnach drei Türcken mit listen[1]),
Ein Christen setzt er underfach
Und zwen Türcken setzt er darnach,
Zwen Christen setzet er behend
Und einen Türcken an das end.
Als er sie nun het all gestelt
Im kraiß und auch das loß gefelt,
Zelt er hin numb vom ersten an,
Und welcher war der zehend man,
Den hub man auff an alle wehr
Und warff in hin nauß inn das meer,
Biß das ihr in dem meer ertrancken
Nach dem loß fünffzehen, versancken.
Darvon das schiff ward leicht zuhand.
Darmit so kamen sie zu land,
Inn der Venediger portn furen
Und also frey errettet wuren.
Das loß so künstlich war bereyt,
Das den Christen geschach kein leyd.
Das loß traff die dürckischen hund,
Das sie alle giengen zu grund
Wer die warheyt erfaren wöll,
Der selbig mit der kreyden söll
Die Christen setzen nach ir zal,
Für ir yeden ein creutz an mal.
Dergleich Türcken schreib aller ding
Nach der zal yeden mit eym ring
Und fach denn an dem ersten an
Und thü den zehenden ab than,
Biß ihr fünffzehen thun abgehn,
So bleiben denn die Christen steen
Und die Türcken das bad außgiessen.
Darmit thu ich den spruch beschliessen.
Das hayl und trost widerumb wachs
Den Christen, wünschet in Hans Sachs.

Anno salutis 1547, am 6 tag Octobris

Eine andere Einkleidung unseres Spiels, für die ich als älteste mir bekannte Quelle das 1565 erschienene Rechenbuch des Simon Jacob von Coburg[2]) nenne, erzählt von 12 Zechgesellen, die

---

1) Hier heißt es in dem Spruchgedicht versehentlich „Und darzu ein Türcken mit listen“, dagegen gibt das Meisterlied Hans Sachsens (s. die vorige Anm.) die richtige Zahl, und wir haben daher diese Fassung hier substituiert. Es sei hierbei bemerkt, daß Meisterlied und Spruchgedicht sonst übereinstimmen, nur ist „Venedig“ dort durch „Rodis“ ersetzt; auch fehlt im Meisterlied die Zeitangabe: 1403 für die Begebenheit.

2) „Ein new und Wolgegrundt Rechenbuch auff den Linien und Ziffern sampt der Welschen Practic und allerley Vortheylen“, fol. 250 v. und ebenso in der Ausgabe von 1612, beide Ausgaben in 4°; die kleine, nahezu ebenso betitelte Oktav-Ausgabe des „Rechenbuchs“ (Ausgaben von 1565 oder von 1613) enthält anscheinend nichts hiervon. Von der späteren Literatur nenne ich: Michael Scharff, „Arithmetica joco-seria“

durch unser Abzählverfahren zu ermitteln suchten, wer von ihne ihre gesamte Zeche bezahlen solle, und die es nun so einricht ten, daß ein Bestimmter hiervon getroffen wurde. Spätere Aut ren der „delektablen" Mathematik haben die Aufgabe dann weit ausgeschmückt, z. B. so, daß der Wirt den Vorschlag des Abzäl lens, etwa nach je 7, macht, und er nun von den Zechgeselle überlistet wird, indem diese es so einzurichten wissen, daß er selbs der Wirt, der mit ihnen am Tische sitzt, als der Leidtragenc ausgeht. Bei dieser Variante der Aufgabe ist somit unter alle Plätzen, deren Zahl hier also 13, statt sonst 30, beträgt, nu einer, wie bei der Josephus-Legende, und zwar in der letzte Fassung der des Wirtes, ausgezeichnet, oder vielmehr es hande sich darum, denjenigen Ausgangspunkt der Abzählung zu e mitteln, bei dem der von dem Wirt tatsächlich eingenommer Platz der ausgezeichnete, d. h der zuletzt übrigbleibende, wird.

Für einen anderen Zweck empfiehlt der Jesuit und Math matiker Jean Leurechon (1591—1670) unser Auszählverfahre und zwar, wie er sagt, in Nachahmung der alten Römer, die de Überlieferung nach schon diesen Gebrauch davon gemacht habe sollen[2]): Behörden, Lehrer usw., so meint er, sollten diesen Kuns griff anwenden, um aus einer Reihe von Personen, die an sic insgesamt bestraft werden müßten, bestimmte, besonders stra würdige Individuen für die Bestrafung auszuwählen, andere

(Hamburg 1693), p. 2—3; Christian Pescheck, „Arith- und Geometr sche Erquick-Stunden", T. I (Bautzen 1717), p. 58—59 (Behandlung sel dürftig); [Witgeest, S] „Natürliches Zauber-Buch oder neu-eröffnete Spielplatz rarer Künste" (Nurnberg 1718), p 432/433; Johann Jurge Ressing, „Arithmetische Ruhe-Stunden" (Hamburg 1738), p 69—71 derselbe gibt in seinem „Arithmetisch- und Algebraischen Zeitvertreiber (3 Ausg., Hamburg 1745) außer dieser (p 119f.) noch eine andere Ei kleidung (p 39f)

1) Die Fragestellung ist also im wesentlichen dieselbe wie bei de in Dänemark vorkommenden Aufgabe (s. S. 130, Anm. 2).

2) Siehe Leurechons „Recreation mathématique composée de plu sieurs problemes plaisans et facetieux" (4. Ausg., Paris 1627), erschiene unter dem Namen eines Schülers und Neffen des Verfassers, H. va Etten, p 16 Siehe a. Schwenter, l. c. p 81. Siehe a hier S. 361.

seits aber die weniger Schuldigen ganz straffrei ausgehen zu lassen.

Neben all diesen Formen, in denen unser Spiel auftritt, hat es sich bis heute in verschiedenen Gegenden Deutschlands, zum mindesten in Niederdeutschland, z. B. im Stedingerland und in Mecklenburg, in den Spielstuben der Kinder erhalten, und hat hier folgende Form angenommen[1]): Die Anfangsbuchstaben der Namen der Spielteilnehmer werden untereinander von einem der Spielenden auf eine Schiefertafel geschrieben, und darauf wird jeder gefragt: „Wieviel Soldaten willst du haben?“ Die gewünschte Zahl, mindestens 1, höchstens 20, wird in Gestalt von Nullen hinter den betreffenden Anfangsbuchstaben geschrieben. Nachdem dies bei allen einschließlich des Schreibers ausgeführt ist, zählt dieser mit dem Griffel von links nach rechts, und zwar nach Durchlaufung von Reihe 1 oben weiter in Reihe 2 usf., immer bis 9 und streicht dabei jedesmal bei 9 die betreffende Null oder den betreffenden Buchstaben — denn Nullen und Buchstaben sind gleichwertig — als „tot“ durch. Derjenige, der den letzten „Soldaten“ — Null oder Buchstaben — behält, ist Sieger. Während des Durchstreichens spricht der Spielleiter oder murmelt der ganze Chorus (Stedingerland):

Krot und Not
Sleit alle Velker dot

oder auch (Mecklenburg):

Krûp un Not
Sleiht den Soldaten dot,

wobei das „Krot und Not“ aus Kraut und Lot[2]), d. i Pulver und Blei, entstanden ist.

---

1) Siehe Niedersachsen, Jahrgang 1898/99, p 253 (W Siedenburg) und p 317 (A K) — Auch in anderen Formen wird sich unser Kunststuck im Spiel der Kinder noch erhalten haben; vgl a. Lucian Muller, l c p. 220.

2) Hierüber ist mir zufallig die folgende Abhandlung begegnet· Christian Ulrich Grupen, „Observationes rerum et antiquitatum Germanicarum et Romanarum. Oder Anmerkungen aus den teutschen und römischen Rechten und Alterthümern“ (Halle 1763), Observatio XXII (p 369—379)· „Von der Benennung Kraut und Loth“.

Nachdem wir so die wichtigsten Vorkommnisse des Spiels aus Literatur und Volkskunde des Abendlandes kennen gelernt haben, seien noch aus den Literaturen des Orients die in Betracht kommenden Stellen, soweit sie mir bekanntgeworden sind, angeführt. Da wird beispielsweise ein ägyptischer Schriftsteller des 17. Jahrhunderts, Ahmed el-Qạlyubi († 1659), zitiert, der in seinem Nauadir ganz genau unsere Geschichte der 15 Christen und 15 Türken auf dem Schiffe, nur mit Vertauschung der Rollen, mit 15 Muselmännern und 15 Ungläubigen also, und zwar auch mit der Abzählung nach 9 und demzufolge auch mit der uns wohlbekannten Lösung, vorbringen soll.[1]) Doch schon viel früher scheint diese Geschichte von den 15 Mohammedanern und 15 Christen, welch' letztere infolge Abzählung nach je 9 ins Meer geworfen werden, in der Literatur des Orients vorzukommen. Wenigstens erzählt Thomas Hyde sie in seinem Werke „Mandragorias seu historia shahiludii"[2]), einem arabischen Schriftsteller „Al Sáphadi" nach, der nach J. Ruska[3]) mit dem 1363 gestorbenen Ṣalāḥaddīn aṣ-Ṣafadī identisch ist. — Auf Ceylon sollen mehrere derartige Geschichten erhalten sein[4]), die anscheinend noch aus der Zeit der portugiesischen Herrschaft, also aus dem 16. oder 17. Jahrhundert, stammen. Eine dieser Erzählungen hat den uns wohlbekannten Schauplatz des Schiffes, das jetzt mit Portugiesen und Mauren besetzt ist, und hat im übrigen ganz die uns geläufige Form. Merkwürdig ist, daß auch hier die

1) Siehe eine Notiz von René Basset in Mélusine, t. III (Paris 1886/87), col. 528; die dort gegebene nahere Stellenangabe über das ägyptische Werk lautet Ed. de Boulaq, 1892, 4°, hist 176, p. 82 [Bulaḳ Vorstadt von Kairo]

2) Oxonii 1694; s. die dem eigentlichen Werke vorausgehenden „Prolegomena generalia, varia curiosa de shahiludio continentia" (unpaginiert: p. 34/35). Den Hinweis auf diese Stelle verdanke ich Herrn Prof. Dr. Ruska-Heidelberg.

3) Zeitschr f mathem. u. naturw. Unterr. 47, 1916, p. 277. Siehe über den genannten arabischen Schriftsteller auch C. Brockelmann, „Gesch. der arabischen Litteratur", Bd. II (Berlin 1902), p 31—33.

4) Siehe H. Gaidoz (nach J P Lewis) in Mélusine, t. III, col. 273—274

Zahl der Personen 15 + 15 ist und gleichfalls nach 9 abgezählt wird und demzufolge die Anordnung, die der portugiesische Kapitän wählt, ganz die uns bekannte ist. Eine andere singhalesische Erzählung bezieht sich auf die Belagerung der Stadt Kandy durch die Portugiesen. Die Belagerten sollen, am Ende ihrer Kräfte, den Vorschlag gemacht haben, die Feindseligkeiten einzustellen und die Entscheidung des Kampfes dem Lose zu überlassen. Auch hier kommt es nun — nach einer Darstellung ging dieser Vorschlag von den Kandyern, nach anderer von den Portugiesen aus —, zur Anwendung unseres Kunstgriffes, und die Stimme des Schicksals spricht in bekannter Weise zugunsten derjenigen Partei, die den Vorschlag gemacht hat. Sehr merkwürdig ist, daß in allen diesen Fällen die Zahl n der Personen übereinstimmend $= 15 + 15$ und ebenso die Zahl d, nach der abgezählt wird, übereinstimmend $= 9$ ist. Da dieser Spezialfall $n = 30$, $d = 9$ aus keinerlei Gründen eine Bevorzugung vor anderen verdient, so führt die höchst auffallende Übereinstimmung mit Notwendigkeit zu der Annahme, daß diese verschiedenen Überlieferungen des Orients und Okzidents nicht unabhängig voneinander sind.

Schließlich liefert auch der äußerste Osten, die Literatur Japans, uns einen Beitrag zu unserem Thema, ja einen Beitrag, der, wie wir sehen werden, in ganz besonderem Maße unser Interesse verdient. Als der bedeutendste Vertreter der alten autochthonen japanischen Mathematik, die die Japaner, im Gegensatz zu der modernen, vom Abendland übernommenen und mit „Sūgaku" bezeichneten Mathematik, „Wasan" nennen, gilt anerkanntermaßen Takakazu Seki (1642—1708) und als dessen bedeutendster Schüler wieder Murahide Araki[1]) (1640—1718). Dieser

1) Zu diesen Namen sei bemerkt, daß man in Japan, wie in China, den Vornamen hinter den Familiennamen setzt, doch ist hier in diesem Buche überall die bei uns gebräuchliche Stellung gewählt. Zu erwähnen ist weiter, daß die Schreibweise der Eigennamen und besonders der Vornamen im Japanischen bisweilen mit großen Schwierigkeiten verknüpft ist, aus denen es sich erklärt, daß als Vorname Sekis nach moderner Aussprache des Ideogramms „Kōwa" angegeben wird, während er sr. Zt., wie oben

teilte die höheren Gegenstände, die er in Sekis Schule kennengelernt und getrieben hatte, in 7 Teile und schrieb darüber das berühmte Werk Sampō-schichibuscho oder „7 Bücher Mathematik“, ein Werk, das nicht veröffentlicht, vielmehr nur den besten und vertrautesten Schülern mitgeteilt und im übrigen geheimgehalten wurde. Von diesen 7 Büchern hat das 5. den Namen Sandatsu-kempu und behandelt in seinem ersten Teile ein Problem, das mamakosan oder Stiefkinder-Problem heißt und das in Arakis bzw. in Sekis Fassung im wesentlichen so lautet[1]): Ein reicher Landbesitzer hatte von seiner ersten Frau 15 Kinder und von seiner zweiten gleichfalls 15, zusammen also 30 Kinder. Die zweite Frau hatte nun den Wunsch, daß einer ihrer leiblichen Söhne ihrem Manne in seinem Besitz folgen möchte, und sie machte dem Gatten daher folgenden Vorschlag: Alle 30 Kinder sollten sich in einer gewissen Ordnung im Kreise

---

geschrieben, Takakazu gesprochen sein dürfte. Aus denselben Gründen erhält Sekis oben genannter Schüler Araki, der übrigens (s oben) etwas älter als der Lehrer ist, bald den oben angegebenen Vornamen, bald wieder den: Son-yei (s Y Mikami, „The development of mathematics in China and Japan“, Lpz. 1913, Introductory note, p VII/VIII). Da außer dem gewöhnlichen oder familiaren Vornamen jeder auch noch einen feierlichen Namen hatte, so liest man neben Seki Kōwa und Seki Takakazu bisweilen auch noch Seki Schinsuke. — Von dem hohen Ansehen, das der Name Sekis übrigens auch im heutigen Japan noch genießt, zeugt die Tatsache, daß der beruhmte Mathematiker neuerdings, 200 Jahre nach seinem Tode, durch Dekret des Mikado vom 15 November 1907, noch in einen bestimmten, höheren Rang der Hofordnung versetzt wurde.

1) Siehe Tsuruichi Hayashi, „A brief history of the Japanese mathematics“ (eine freie, verkurzte und vielfach veränderte Übersetzungsausgabe von T Endō, „Dai-Nippon Sūgaku-Schi“ [Gesch der japanischen Mathematik], 1896 Tokyo), Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 6 (1905), p. 348 u. 347; s. a von demselben eine Abh. in Tôkyô Sūgaku-Buturigakkwai Kiji-Gaiyô (Proceedings of the Tôkyô Mathematico-Physical Society) 3 (1906), p 198, hier zugleich eine Unrichtigkeit aus dem Enoncé des Problems der erstgenannten Stelle berichtigt. Siehe auch David Eugene Smith und Yoshio Mikami, „A History of Japanese Mathematics“ (Chicago 1914), p. 82/83; dort (p. 84, Anm. 2) ist als der japanische Name des Problems übrigens angegeben. „Mameko-date.“

aufstellen, und nun sollte abgezählt werden, wobei jedesmal der Zehnte ausgeschieden werden sollte. Der zuletzt Übrigbleibende sollte der Erbe des Vaters werden. Der Gatte ging auf den Vorschlag ein, und bei der Ausführung des Verfahrens ergab sich, daß zunächst 14mal hintereinander stets ein Stiefkind ausgeschieden wurde. Es waren jetzt also nur noch ein Stiefkind und die 15 leiblichen Kinder der Mutter übrig. Da glaubte die Mutter, daß der Sieg den Ihrigen bereits sicher sei, und in dieser festen Erwartung schien es ihr ganz gleichgültig, wie weiter gezählt würde. Sie fing also bei dem allein noch übriggebliebenen Stiefkinde von neuem an zu zählen, zählte jedoch in umgekehrter Richtung als vorher.[1]) Wieder wurde natürlich, wie vereinbart, jeder Zehnte ausgeschieden, und dabei ergab sich nun das überraschende Resultat, daß nacheinander alle 15 leiblichen Kinder der Mutter von dem Lose getroffen wurden und somit das eine Stiefkind als Erbe ausging.

Doch Seki und Araki sind keineswegs schon die frühesten Mathematiker der altjapanischen Wissenschaft, die sich mit dem „Stiefkinderproblem" beschäftigt haben, vielmehr ist hierfür nicht nur, aus der unmittelbar vorhergehenden Zeit, Muramatsus Werk „Mantoku Jinkō-ri" (1665) zu nennen[2]), sondern es liegt auch noch aus dem ersten Drittel des Jahrhunderts ein positives Zeugnis hierfür in dem „Jinkō-ki" von Yoschida[3]) vor.

1) Die Umkehrung der Richtung ist übrigens mathematisch irrelevant; denn, da außer dem einen Stiefkind nur noch leibliche Kinder übrig sind, die Abzählung aber bei dem Stiefkind beginnt, so bilden die übrigen Personen, die 15 leiblichen Kinder, im Sinne unseres Problems eine einheitliche unterschiedslose Menge, bei der es offenbar gleichgültig ist, in welchem Drehungssinne sie durchlaufen wird.

2) Siehe Smith und Mikami, l c. p 80 u 81 (Fig. 25) Der Verfasser heißt Muramatsu (Kudayū Mosei) und nicht Matsumura, wie manche schreiben; s. Smith u. Mikami, p. 77, Anm. 1.

3) Siehe Smith und Mikami, l c. p 80, der Verfasser, Schichibei Kōyū Yoschida, lebte von 1598 bis 1672 (s Smith und Mikami, l. c. p. 59 u. 62). — Der beste japanische Kommentar über das Problem ist übrigens ein Werk von 1774: „Sandatsu Kaigi" von Sadusuke Fujita (s. Smith u. Mikami, l c p 84, Anm 2).

Dieses letztgenannte, im Jahre 1627 geschriebene Werk, dessen Titel bedeutet: „Abhandlung über Zahlen von den größten bis zu den kleinsten“[1]), ist die älteste heute bekannte und erhaltene japanische Schrift überhaupt, in der unser Problem vorkommt. Aus ihr hatte Seki geschöpft; allerdings sagt er dies nicht ausdrücklich, sondern gibt für das Problem als Quelle nur alte Überlieferung an.[2]) Wie weit das Problem tatsächlich zurückgeht, wird wohl heute nicht mehr festzustellen sein; die Überlieferung will zwar wissen, daß es bereits zu den Problemen Michinoris gehört habe, dessen Werk in die Zeit von 1156 bis 1159 fällt.[3])

Ein neueres japanisches Werk, eine i. J. 1808 veröffentlichte Mathematiklehre von Matuoka, spricht das Problem in etwas anderer als der obigen Fassung aus Wir dürfen uns darauf beschränken, die Abweichungen kurz anzugeben: Nachdem — infolge der besonderen, von der zweiten Ehefrau angegebenen Aufstellung der 30 Kinder im Kreise — hintereinander 14 Kinder erster Ehe durch das Abzählverfahren ausgeschieden sind, erklärt das letzte Kind erster Ehe: „Wenn so weiter gezählt wird, werde ich gleichfalls verschwinden; ich verlange, daß anders verfahren wird; dieses Mal beginne die Abzählung bei mir!“ Es geschieht, und nun werden alle 15 Kinder der zweiten Ehe ausgeschieden, und das letzte Kind erster Ehe beerbt den Vater. Zur Illustrierung des Vorgangs bringt das japanische Werk ein Bild, das wir hier als Fig. 1 wiedergeben[4]): Die weißgekleideten Personen sollen die

1) Siehe Smith und Mikami, l. c p 60

2) Smith und Mikami, l c p. 84

3) Siehe Smith und Mikami, l. c. p. 84 und dazu p. 17, sowie Mikamis oben zitiertes Werk von 1913, p. 179

4) Die Reproduktion erfolgt hier nach „Congrès international des orientalistes. Compte rendu de la première session“, Paris 1873, t. I (Paris 1874), p. 295 Dem dort veröffentlichten Vortrage von Le Vallois („capitaine“) entnahm ich außer dem Bild auch die obigen Angaben über das Werk Matuokas; den Hinweis auf diesen sonst in der einschlägigen Literatur nirgends zitierten Vortrag, der übrigens in seinen sonstigen Angaben über die Geschichte unseres Problems nicht als maßgeblich gelten kann und wohl auch nicht gelten will, verdanke ich einer übrigens

Fig. 1.

Kinder erster, die schwarzgekleideten die zweiter Ehe sein. Auf dem Banner des schwarzen Bannerträgers steht geschrieben: „Von hier aus nach links!“ In der Tat: Beginnt man bei dem schwarzen Bannerträger, gibt man ihm also die Nummer 1 und geht man, von ihm aus gesehen, „nach links“, das heißt durchläuft man den Kreis im Drehungssinne des Uhrzeigers, so scheiden bei dieser Aufstellung zunächst 14 Weiße aus.[1]) Würde man nun in derselben Art fortfahren, so würde beim nächsten Male der 15. und letzte Weiße — es ist der weiße Bannerträger — aus-

---

schon oben erwähnten lehrreichen Notiz des Herrn Gustaf Eneström, Bibl. math., N F. VII, 1893, p 32

1) Der besseren Übersicht halber sei hier die Aufstellung unseres Bildes schematisch wiederholt: 2 S, 1 W, 3 S, 5 W., 2 S., 2 W., 4 S., 1 W, 1 S., 3 W, 1 S, 2 W., 2 S, 1 W. (S. = Schwarz, W. = Weiß) Die Aufstellung ist natürlich mutatis mutandis dieselbe wie die bei Hans Sachs (S. 133).

geschieden werden. Auf seinen Einspruch[1]) hin beginnt aber jetzt die weitere Abzählung bei ihm als Nr. 1, und nun werden der Reihe nach alle 15 Schwarzen ausgeschieden, so daß der weiße Bannerträger als glücklicher Erbe übrig bleibt.

Übrigens hat auch diese Problemfassung und diese Illustrierung Matuokas ihre Vorläufer; zum mindesten weist das freilich nicht viel ältere Werk von Kenryū Miyake: „Schojutsu Sangaku Zuye" (1795) ein bei Smith und Mikami (l. c. p. 82: Fig. 26) wiedergegebenes Bild auf, das ganz in der Art des unseren gehalten ist[2]) und das deutlich zeigt, daß auch dieser

---

1) Unserer Quelle zufolge bedeutet die Inschrift auf dem Banner des weißen Bannerträgers: „Sodann von hier aus nach rechts!" Die Worte „nach rechts" sind, die richtige Übersetzung vorausgesetzt, im grunde überflüssig, da es auf den Drehungssinn nicht mehr ankommt (vgl. Anm. 1, S. 139).

2) Die Abbildung weist außer den 30 Kindern auch noch, außerhalb des Kreises stehend und entsprechend größer gezeichnet, die beiden Eltern auf. Im übrigen unterscheidet sie sich aber, wie gesagt, von der unseren nicht sonderlich, ist jedoch, wenigstens in der Form, wie sie bei Smith und Mikami vorkommt, für ihren Zweck leider wenig geeignet, da sie den Unterschied zwischen schwarzen und weißen Personen teilweise nicht deutlich genug hervortreten läßt, wobei ich es dahingestellt sein lassen muß, ob dies ein Fehler der Originalfigur des japanischen Werkes von 1795 oder der Reproduktion von 1914 ist. Überhaupt kann ich hier bei aller Belehrung, die ich diesem Abschnitt des Smith-Mikamischen Werkes verdanke, die Bemerkung nicht unterdrücken, daß in diesem Abschnitt in mancher Beziehung eine bessere und klarere Darstellung sich unschwer hätte erreichen lassen. So würde ich p. 83 das Diagramm so gedreht haben, daß es mit den Figuren 25 und 26, deren Veranschaulichung es dienen soll, völlig harmoniert. Daß in den nach den Werken Muramatsus und Miyakes reproduzierten Figuren 25 und 26 die Farbengebung gerade die entgegengesetzte ist (in der ersteren sind die Kinder erster Ehe durch schwarze, die zweiter durch weiße Kreise, dargestellt — s. a. p. 82, Anm., sowie das Diagramm p. 83 —, während sie in der zweiten Abbildung ebenso, wie auf unserem Bilde nach Matuoka, also in den umgekehrten Farben, gezeichnet sind) hätte wohl irgendwo ausdrücklich bemerkt werden sollen. Ebenso vermisse ich für den zweiten (unteren) Teil der Fig. 25 (p. 81) eine Angabe über dessen Bedeutung, die ich, falls die Figur nicht etwa mit Fehlern behaftet ist, nicht zu erkennen vermag (die im Innern der Figur stehenden

Autor (Miyake) das Problem genau in der hier soeben gegebenen Fassung, also in derselben wie das Buch von Matuoka, nahm.

Ob man nun die erste oder die zweite Fassung des Problems zugrunde legt, in jedem Falle haben wir auch hier, bei dem japanischen Problem, das Prinzip des Abzählens und des Ausscheidens der Zehnten; freilich hat das Abzählverfahren hier die Besonderheit, daß es diskontinuierlich ist, aus zwei verschiedenen Prozessen besteht. Merkwürdig mutet uns besonders an, auch hier als Zahl der im Kreise aufgestellten Personen wieder unsere 30 zu finden. Warum, so fragen wir uns, auch hier diese Zahl? Warum gerade 15 Kinder aus jeder der beiden Ehen, eine Zahl, die doch selbst in einem durch Kinderreichtum ausgezeichneten Lande sich ungewöhnlich ausnehmen muß? Auf den ersten Blick liegt daher die Annahme nahe, es bestehe ein Zusammenhang zwischen diesem japanischen Problem und einer der anderen, vorher von uns besprochenen Spielformen oder Legenden aus Abend- oder Morgenland.[1] Aber auch nur auf den ersten Blick dürfen wir diesen Eindruck haben! Betrachten wir die Frage näher, nehmen wir sie unter die mathematische Lupe, so kommen wir sogleich zu der Überzeugung, daß die Japaner hier durchaus auf eigenen Füßen stehen. Originell ist schon das äußere Gewand des Problems, originell ist insbesondere die Zweiteilung des Abzählverfahrens, und originell ist vor allem die zugleich ethische und mathematische Pointe, daß das in der sicheren Erwartung des Sieges abgebrochene[2]) und darauf von neuem bei dem einen

japanischen Worte, die möglicherweise die Lösung des Rätsels geben, werden natürlich, wie mir, auch zahlreichen anderen Lesern unverständlich sein.)

1) Diese Vermutung wird in der Tat geäußert im Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche 9 (1906), p. 69, Anm. 1. Auch Le Vallois nimmt dies anscheinend an (s. l. c. p. 297). Eine Abhängigkeit zwischen den Vorkommnissen des Ostens und Westens nehmen anscheinend auch Smith und Mikami (p. 84) an, lassen es aber unentschieden, welches von diesen Vorkommnissen das ursprüngliche sei.

2) Ich spreche hier von der ersten der beiden oben angegebenen Problemfassungen als der nach meinem Wissen älteren. Übrigens würde

Stiefkinde begonnene Abzählverfahren alle leiblichen Kinder ausscheidet und gerade das eine Stiefkind als Sieger hervorgehen läßt. Nicht jede Zahl nämlich ist geeignet, dies Postulat zu befriedigen. Liegt bereits fest, daß die Abzählung eine Dezimierung sein soll — die Wahl gerade der Zahl 10 kann uns nicht absonderlich anmuten und beweist jedenfalls nichts für oder gegen die Abhängigkeit von älteren Vorbildern —, so führt eine mathematische Überlegung, die wir in § 6 ausführen werden und deren Resultat wir hier vorwegnehmen, zu der Erkenntnis, daß unser Postulat nur dann erfüllt wird, wenn als Zahl der leiblichen Kinder eine der Zahlen der folgenden Reihe gewählt wird: 1, 15, 21, 70, 226 ... In allen diesen Fällen also, d. h. wenn die Zahl der leiblichen Kinder 1 oder 15 oder 21 oder 70 usw. ist, aber auch nur in diesen Fällen, führt das bei dem einen übriggebliebenen Stiefkinde begonnene Verfahren der Dezimierung gerade zum Siege des Stiefkindes. Nun ist aber der erste Fall der Reihe, daß nämlich nur ein leibliches Kind vorhanden ist, trivial und ohne Interesse, und von den übrigen Zahlen der Reihe ist 15 bereits die kleinste, also die für die Wahl geeignetste. Nachdem nun aber so dem Postulat der Aufgabe gemäß die Zahl der leiblichen Kinder auf 15 festgesetzt war, lag es nahe, die Zahl der Stiefkinder, ohne daß dies freilich notwendig war, ebensogroß anzunehmen.

So bestehen also hier bei dem japanischen Problem für die Zahl 15 resp. für 30 gewichtige innere Gründe, während diese Zahl in all den anderen Fassungen unseres Spiels oder Problems recht willkürlich war. Daß die Japaner in der Lage waren, die hier erforderlichen Überlegungen anzustellen, verrät bereits eine beträchtliche Einsicht in die mathematische Theorie unseres Spiels. Wenn ich dabei auch natürlich von den möglichen oder angeblichen Vorkommnissen aus der älteren Zeit und vollends

mit geringen Änderungen offenbar dasselbe von der zweiten Fassung, falls diese etwa bei Yoschida sich finden und die ältere sein sollte, gesagt werden dürfen. die mathematische Pointe ist jedenfalls genau dieselbe und die ethische eine ganz ähnliche

von Michinori (12. Jahrhundert) absehe, so darf man doch schon nach dem, was nach den Arbeiten sprachkundiger Historiker positiv festzustehen scheint, annehmen, daß, falls nicht schon Yoschida (1627), so doch jedenfalls Muramatsu (1665) und vollends Seki die mathematische Theorie unseres Spiels ihren Hauptzügen nach bereits in ihrem geistigen Besitz gehabt und insbesondere, wenn auch in eine für uns ungewöhnliche Form gekleidet, ein für unser Problem wesentliches Rekursionsgesetz gekannt haben, von dem noch zu sprechen sein wird (S. 168/169, s. a. S. 154) und das im Abendlande meines Wissens zuerst von Leonhard Euler entdeckt und 1776 veröffentlicht wurde in einer Abhandlung, die Euler im Jahre 1771, also ein reichliches Jahrhundert nach Muramatsus Werk, mehr als 60 Jahre nach Sekis Tode, der Petersburger Akademie vorgelegt hatte.[1]) Eine Beeinflussung auch der späteren japanischen Mathematik durch die Abhandlung Eulers ist um so mehr ausgeschlossen, als diese, unter einem nichtssagenden Titel versteckt, selbst in Europa bis heute fast unbekannt geblieben zu sein scheint.[2]) Daß umgekehrt von einer Beeinflussung des Abendlandes durch Japan auch dann wohl noch keine Rede sein könnte, wenn die nichts weniger als verbürgte Autorschaft

---

1) „Observationes circa novum et singulare progressionum genus", Novi Comment. Academ. Petropol. 20, 1775 (1776), p. 123 Für das Exhibitionsdatum s „Briefwechsel zwischen C G J. Jacobi und P. H. von Fuß", herausg. von P. Stäckel und W Ahrens (Leipzig 1908), p 99. Nr. 155.

2) So konnte es kommen, daß noch in unseren Tagen P G Tait, „On the Generalization of Josephus' Problem", Proc. of the Royal Society of Edinburgh 22, 1897/99, p. 165—168, z. T. dieselben Betrachtungen anstellte wie Euler schon getan. Ebenso hatte H Schubert, der eine eingehendere mathematische Theorie unseres Spiels begründet hat (1895; s hier §§ 3, 4, 6), von dem Vorhandensein der Eulerschen Abhandlung offenbar keine Ahnung Ich wurde auf diese Abhandlung Eulers, die man in der einschlägigen Literatur uberhaupt nirgends berücksichtigt findet, vor einigen Jahren durch Herrn Gustaf Eneström in Stockholm, den Verfasser der neuesten und besten Euler-Bibliographie, aufmerksam gemacht (vgl. auch das Vorwort zu Bd. I, S V).

Michinōris (12. Jahrh.) als historische Tatsache feststände, brauchen wir angesichts der ganzen älteren Handschriften-Literatur des Abendlandes, insbesondere der Einsiedeler Handschrift, garnicht zu erwähnen

Wir gelangen somit zu dem Resultat, daß unser Kunststück oder unser Spiel oder Problem, wie wir es nennen wollen, mindestens zwei verschiedene Geburtsstätten gehabt hat.[1]) Die eine davon ist Japan, wo auch zuerst der Kern einer mathematischen Theorie des Spiels gefunden wurde; dabei müssen wir es unentschieden sein lassen, ob die Fragestellung des „Stiefkinderproblems" aus dem japanischen Volksleben heraus sich entwickelt hat, oder lediglich ein selbstgeschaffenes Problem der Mathematiker darstellt. Abgesehen von dieser ganz selbständigen Entwicklung in Japan scheinen dagegen alle sonstigen Formen unseres Kunstgriffes oder unserer Legende, wie wir sie in den verschiedensten Teilen der Alten Welt angetroffen haben, untereinander verknüpft zu sein; mag nun Josephus der Held der Legende sein oder Abraham ben Esra oder gar der Heilige Petrus, mag das Abzählprinzip im Spiel der niederdeutschen Kinder oder in mehr oder minder beglaubigten Erzählungen aus Ceylon oder Ägypten uns entgegentreten, mag von Christen und Juden, von weißen und schwarzen Soldaten, von Muselmännern und Ungläubigen, von listigen Zechbrüdern im Wirtshause darin die Rede sein, mag der Name Josephsspiel, Sankt Päders Lek, Judenersäufespiel, Problème de Caligula oder sonstwie lauten, alle diese und andere Varianten scheinen Äste und Zweige desselben Baumes zu sein. Freilich, wo wir dessen Wurzel zu suchen haben, ob in Europa oder ob sie etwa arabi-

---

1) Adolf Bastian hat die Tatsache, daß nicht selten bei verschiedenen Volkern, bei denen eine gegenseitige Beeinflussung ausgeschlossen zu sein scheint, die gleichen geistigen oder materiellen Errungenschaften sich finden, einmal den Satz vom „gleichartigen Menschengedanken" genannt, und durch ihn ist der nicht gerade glückliche Terminus vom „Völkergedanken" in die Volkerkunde eingeführt worden; s. S. Günther, „Ziele, Richtpunkte und Methoden der modernen Völkerkunde" (Stuttgart 1904), p. 16 u. 49.

schen oder jüdischen Ursprungs ist, wer vermöchte das bei einer über nahezu die ganze Alte Welt seit Jahrhunderten verbreiteten Spielerei wohl zu sagen?[1])

§ 2. Empirische Lösungen und Merkverse.

Durch einfaches Probieren läßt sich die Aufgabe unseres Spiels für jeden konkreten Fall natürlich leicht lösen, und für den am häufigsten vorkommenden, den der 15 + 15 Personen mit Abzählung nach 9, ist die Lösung, d. h. die Stellung, bei der durch die Abzählung nach 9 gerade die 15 Personen der einen Kategorie ausgeschieden werden, oben bereits mehrfach angegeben.[2]) Wir rekapitulieren sie hier, indem wir die am meisten vorkommende Einkleidung, die von den 15 Christen und 15 Türken, zugrunde legen, wie folgt:

4 Chr., 5 T., 2 Chr., 1 T., 3 Chr., 1 T., 1 Chr., 2 T., 2 Chr., 3 T., 1 Chr., 2 T., 2 Chr., 1 T.,

eine Anordnung, für die ja einige Handschriften den Vers

Quattuor et pentas, duo monas tres mias unus
Hinc dias ambo, trias, unus duo et duo monas

als mnemotechnisches Hilfsmittel geben, wobei man sich nur zu merken hat, daß die erste Zahl sich auf die „Christen" bezieht und die Abzählung bei dem ersten dieser zu beginnen hat.

Doch noch von einer anderen Art von Merkversen haben wir hier zu sprechen, solchen, die in einer dem Uneingeweihten unverständlichen Geheimsprache sprechen und die daher. dem mystisch-magischen Charakter unseres Kunststücks entsprechend, hierfür begreiflicherweise mit ganz besonderer Vorliebe angewandt sind. Der Umstand, daß in den hier für die Aufstellung zu gebenden Rezepten, wenigstens für die gewöhnlich vorkommenden Fälle, eine größere Zahl als 5 nicht auftritt (s. die vor-

---

1) Auch Moritz Steinschneider, in der schon mehrfach (s S. 121, Anm 1) zitierten Abhandlung, p. 124, enthalt sich jeder Mutmaßung in dieser Beziehung.

2) Schematisch S 121 und 130, in lateinischen Versen S 123/124, und 127 — Für den nächsthäufigen Fall: $n = 15 + 15$, $d = 10$, ist die Losung S. 133 (Hans Sachs), sowie S. 141 nebst Anm. 1 dort, gegeben.

stehende lateinische Merkregel resp. das vorhergehende Lösungsschema), ermöglicht es, die vorkommenden Zahlen, d. h. 1, 2, 3, 4, 5, durch die Vokale a, e, i, o, u anzudeuten, so also, daß der Vokal a eine 1 bedeutet, e eine 2 usf. Da hätten wir denn also für den uns geläufigen Fall der 30 Personen mit Abzählung nach je 9 für die übliche Anordnung folgende Vokalreihe:

o u e a i a a e e i a e e a.

Diese Vokale sind nun leicht zu merken, wenn sie zu einem Verse, etwa dem folgenden, verflochten werden:

Non dum pena minas a te declina degeas.

Die Vokale dieses Verses geben uns dann der Reihe nach die erforderliche Aufstellung der 15 Christen und 15 Türken an: 4 Christen (o), 5 Türken (u), 2 Chr. (e), 1 T. (a) usw.

Ich habe diesen Vers, der aus einer Münchener Handschrift[1]) des 15. Jahrhunderts stammt, vorangestellt, da er meines Wissens das älteste Vorkommnis dieser Art ist. Eine Variante von ihm ist der folgende Vers, der sich gleichfalls in der Literatur[2]) findet:

Nondum poena, mina ad te declinat ô Eneas.

(oe = e; ô zählt nicht).

Bekannter ist der folgende, der sich z. B schon bei dem bereits erwähnten Leurechon findet[3]), aber jedenfalls noch älter ist:

Populeam virgam mater regina ferebat.[4])

---

1) Codex lat Monacensis Nr. 14809 resp. 14908; s. M. Curtze, Bibl. mathem. (2) 8 (1894), p. 116 und Abhandlungen zur Gesch der Mathem., Heft 7 (Supplement zur Zeitschr f Math u. Phys., Bd. 40), 1895, p. 112, Anm Die Signatur des Codex ist an den beiden Stellen eine verschiedene, wie hier angegeben; wahrscheinlich ist die erste Zahl verdruckt und die zweite — 14908 — die richtige (M Curtze hat aus dem Codex 14908 noch andere Veröffentlichungen vorgenommen).

2) Ich entnehme den Vers dem schon (s. S. 130, Anm. 1) zitierten Buche von Tylkowski (Ausg. 1690, p 196), wo er — fälschlich — für den Fall einer Abzählung nach 10 angegeben wird

3) In der oben (s. S 134, Anm 2) zitierten Ausgabe von 1627: p. 16.

4) Oder „tenebat“, s. z. B. Schwenter, l. c. (1636), p 80; ebenso bei Andreas Sutor, „Latinum Chaos“ (Augsburg 1716), p. 421, wo übrigens auch der Vers selbst als eine Erfindung der „Christen“ bezeichnet wird, nach dessen Direktiven sie auf der bewußten Meerfahrt die Auf-

Gleichfalls recht bekannt und aus der gleichen Zeit[1]) nachweisbar ist der französische Merkvers:

Mort, tu ne falliras[2]) pas
En me livrant le trépas.

Als deutschen Vers gibt Schwenter[3]) den folgenden an:

So du etwan bist gfalln hart,
Stehe widr, Gnade erwart.

Ein anderer, gewiß neuerer, deutscher Vers lautet:

Gott schlug den Mann in Amalek,
Den Israel bezwang.

Um auch die bisher noch nicht vertretenen modernen Hauptkultursprachen zu Wort kommen zu lassen, nennen wir noch die Merksprüche:

From numbers' aid and art
Never will fame depart

und

Or tu ne dai la pace ei la rendea.[4])

Alle diese Merksprüche und -formeln, die sich gewiß noch weiter vermehren ließen — selbst arabische[5]) und hebräische[6]) findet man angegeben —, beziehen sich auf unseren Regelfall: 30 Personen, Abzählung nach 9, Ausscheidung der Hälfte, und

---

stellung der 30 Personen bewirkt und somit ihre eigene Rettung erreicht hätten.

1) Siehe Claude Gaspard Bachet de Méziriac, „Problemes plaisans et delectables, qui se font par les nombres", 2 Ausg, Lyon 1624, p. 175; auch bei Leurechon (l c) und anderen

2) Oder „failliras" und ai = a gerechnet

3) L. c p 80

4) Siehe G. A Alberti, „I giochi numerici fatti arcani" (Bologna 1747), p 134.

5) Siehe Thomas Hyde, l c. „Prolegomena" (p. 36). Die Merkformel lautet transskribiert. D(a)hbaǵa Ab(a)bǵa B(a)ba, wo die Buchstaben ihren im Arabischen ublichen Zahlwerten nach, d h: a = 1, b = 2, ǵ = 3, d = 4, h = 5, zu nehmen sind und die eingeklammerten nicht zählen.

6) Siehe Schwenter, l. c. p. 80; vgl. a. Lucian Müller, l c p. 221/2, sowie Avé-Lallemant, „Zur popularen Kabbala", Vom Fels zum Meer 1882 II (April—Sept), p. 90. Siehe a. hier S. 121/122, Anm 2 (Anfang u. Ende).

eine gleiche Reichhaltigkeit in Merksprüchen hat sicher kein anderer Fall aufzuweisen. Der einzige Fall, für den ich noch einen deutschen Merkvers nachzuweisen vermag, ist der uns ja gleichfalls als recht verbreitet bekannte: 30 Personen, Abzählung nach 10, Ausscheidung der Hälfte. Der Merkvers lautet[1]:

Es war in uns Elend ohn Mass
Abr Christ hat gendet das.

Für diesen Fall werden übrigens außerdem noch einige lateinische Verse angegeben:

Rex angli cum gente bona dat signa serena

oder

Rex Danicus, regnet ovans, audiat Hebraea
(au = a; ae = e)

oder

Regalis uestem plorans Maria ferebat.[2]

Für andere Fälle als diese weiß ich überhaupt nur noch lateinische Verse aus der Literatur beizubringen; ich merke noch die folgenden an:

---

1) Siehe Schwenter, l. c. p. 81, jedoch dort mit der irrtümlichen Angabe, daß der Merkvers für die Abzählung nach 7 bestimmt sei; mit demselben Irrtum auch in dem bereits (s. S. 120, Anm. 2) zitierten „Schau-Platz der Betrieger“, p 237.

2) Der erste Vers, in dieser Form gewohnlich angegeben, z. B. bei Schwenter (1636), jedoch hier mit dem in der vorigen Anmerkung angemerkten Irrtum (Schwenter, Ausg. 1626, schreibt übrigens „anglicum“), findet sich bereits in der oben (s S. 148, Anm. 1) genannten Münchener Handschrift des 15. Jahrhunderts, jedoch mit „veste“ statt „gente“ (s. Curtze, l. c.); Lucian Müller (l. c p 221, Anm 2) gibt den Vers in der unrichtigen Fassung „dona“ statt „signa“ und verweist auf das mir nicht zugängliche und auch durch das Auskunftsbureau der Deutschen Bibliotheken nicht nachweisbare „Sertum polyantheum“ (Brieg 1682); einige Autoren, z. B J. J. Ressing in der S 133/134, Anm. 2, genannten Schrift von 1738, p 68, schreiben: „Rex Paphi“ . . . . Der zweite (wie auch der erste) Vers steht bei Tylkowski, der dritte ebendort, jedoch fehlerhaft (zweites und drittes Wort vertauscht); die Verse stammen offenbar nicht von diesem Autor, vielmehr ist die relativ reichhaltige Liste von Merkversen, die er dem Leser bietet, recht kritiklos zusammengetragen und mit wesentlichen Fehlern behaftet (vgl. a. S. 148, Anm. 2)

Für Abzählung nach 3:

Ecce amatam sedere amatam fecere araneam meam.[1])

Für Abzählung nach 6 findet sich ein Vers in der schon zitierten Münchener Handschrift des 15. Jahrhunderts:

Larga dei pietas bene manes omnia papam.

Für Abzählung nach 7:

Candia dat lites tibi laetas tempore factas

(ae = e)

oder

Abdita transmittens vigiles ars exonerabat.[2])

(Hier ist ausnahmsweise die erste Zahl auf die Türken zu beziehen, die zweite also auf die Christen, und so abwechselnd.)

Für Abzählung nach 8 folgende 4 Merkverse:

Arte parare mea veniant adistere sorte.[3])
Pater Adam coeperat moenia gratiae Veronae.[1])

(oe und ae = e).

Ardea scande petram trepidas attingere frontem.[4])
Mater amare vetans per climata gigneret orbem [4])

Für Abzählung nach 12:

Ibant per montes, querebant desidiosa.[5])

Alle diese Verse beziehen sich auf den Fall der 30 Personen, und für den Fall einer anderen Personenzahl wüßte ich aus der Literatur nur einen, und zwar lateinischen, Merkvers anzugeben, der anscheinend für den Fall von 20 Personen bestimmt, jedoch mißglückt ist.[6]) Sonst also begegnet uns in den Merk-

1) Entnommen Alberti, l. c p 134.

2) Beide Verse entnommen dem Buche von Tylkowski, l. c In dem zweiten Verse heißt es dort „vigilis", aber das Lösungsschema erfordert ein e.

3) Aus der mehrfach zitierten Münchener Handschrift des 15. Jahrhunderts, dort jedoch am Ende „secte", während die Lösung ein o erfordert.

4) Entnommen dem Buche von Tylkowski

5) Aus der Münchener Handschrift des 15. Jahrhunderts

6) Siehe den letzten Vers, den Tylkowski in seinem mehrfach zitierten Buche „pro septimo" angibt. die Summe der Vokale, jeder durch die ihm entsprechende Zahl ersetzt, gibt 20

versen immer nur der Regelfall der 30 Personen und, wofern wir uns auf die Merkverse in lebenden Sprachen beschränken, auch immer nur mit der Maßgabe, daß nach 9, allenfalls nach 10, abgezählt wird. Für diesen Fall ($n = 30$, $d = 9$) existieren freilich, wie wir sahen, Merkverse der verschiedensten Sprachen; sie legen, da diese deutschen, französischen, englischen u a. Sprüche in der Hauptsache gewiß aus dem Volke heraus entstanden sind und jedenfalls weit verbreitet waren und auch noch sind, ein Zeugnis ab von der großen Volkstümlichkeit, die unser Spiel, etwa im 17. und vorzugsweise, wie es scheint, im 18. Jahrhundert, erlangt hatte; zum anderen bestätigen die Merkverse, da sie alle auf denselben, wenngleich aus inneren Gründen in keiner Weise bevorzugenswerten Fall $n = 30$, $d = 9$ resp. 10 sich beziehen, die Richtigkeit unserer obigen These, nach der zwischen all den verschiedenen Vorkommnissen und Varianten, in denen unser Spiel, von der japanischen Form abgesehen, uns entgegentritt, das Verhältnis gemeinsamen Ursprungs besteht. Die zahlreichen lateinischen Verse werden wir anzusehen haben als Erfindungen der gelehrten Autoren, die, wie es scheint, z. T. einen förmlichen Sport hiermit getrieben haben und dabei denn auch andere Abzählungskonstanten als 9 resp. 10 bedachten, von der durch Tradition geheiligten Personenzahl 30 sich jedoch nicht oder doch nur ganz vereinzelt zu emanzipieren vermochten.

Alle diese Merkverse aus lebenden, wie toten Sprachen beziehen sich, ohne daß wir dies immer von neuem hervorhoben, auf diejenige Einkleidung unserer Aufgabe, die wir am schnellsten als das Problem der Christen und der Türken kennzeichnen, deren Ziel also die Ausscheidung der Hälfte aller Personen ist. Nimmt man die Aufgabe in der Form der Josephus-Legende oder als Geschichte von den Zechbrüdern, so handelt es sich nicht um die Frage, welche unter n Personen als die letzten $\frac{n}{2}$ übrigbleiben, sondern nur um die letzte Person unter allen resp. um den Platz, der zuletzt bei dem Abzählverfahren getroffen wird. Liegt der Platz, den die betreffende Person (Josephus oder im anderen Falle der Wirt) einnehmen soll, bereits fest, so lautet

die Frage, wie auch schon S. 134 gesagt ist, so: Wo muß mit dem Abzählen begonnen werden, damit die betreffende Person zuletzt allein übrigbleibt? Auch diese Frage ist empirisch natürlich leicht zu lösen: Angenommen z. B., die Zählung beginne bei A (s. Fig. 2) und schreite im Uhrzeigersinne fort und als letzte Person bleibe alsdann O übrig, so braucht man, wenn etwa J als letzte Person übrigbleiben soll, die Zählung nur bei T, statt bei A, zu beginnen, wenn T ebenso weit vor A liegt wie J vor O (die Personen sollen in der Zeichnung der Fig. 2 aequidistant auf dem Kreise angeordnet sein). — Liegt der dem Anfangspunkte A entsprechende Endpunkt dagegen etwa in O', so hätte man, damit J Endpunkt wird, die Abzählung nur in T' zu beginnen, wenn T' ebensoweit hinter A wie J hinter O' liegt.[1])

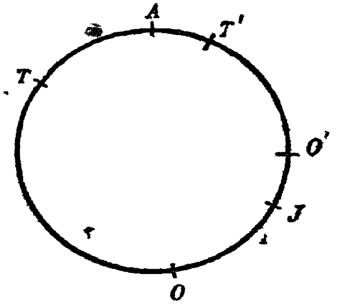


Fig 2

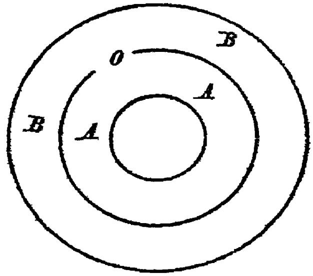


Fig 3

Es mag hier noch erwähnt werden, daß ein vor einigen Jahrzehnten patentiertes Spiel[2]) auf dasselbe hinauskommt, wie unsere Aufgabe, wenn auch das Prinzip dieser dabei nur in seiner einfachsten Form auftritt: Eine Anzahl Steine werden in dem Kreisring A (s Fig. 3) aufgestellt; der erste wird durch die Öffnung O in den Kreisring B geschoben, dann der zweite in A hinter die anderen, der dritte wieder nach B geschoben, der vierte wieder hinter die anderen von A usf. In B sollen die Steine dann in bestimmter Reihenfolge erscheinen; wie muß die Aufstellung in A gewählt werden, damit diese Reihenfolge herauskommt? Wenn z. B bei 12 Steinen die Anordnung in B sein

---

1) Vgl z. B. Ressing, l. c p 69—71.

2) Reichspatent Nr. 43927, erteilt an Gymnasiallehrer Heinr. Knobel in Berlin 1887, jetzt gelöscht.

soll: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, so muß man in *A* die Steine aufstellen in der Ordnung: 1, 7, 2, 10, 3, 8, 4, 12, 5, 9, 6, 11.

§ 3. Das mathematische Problem und seine Umkehrung.

Eine mathematische Behandlung unseres Problems würde zum Ziel haben, das empirische, in jedem Einzelfalle von neuem anzuwendende Abzählverfahren durch allgemeine Regeln resp Gesetze zu ersetzen. Es ist H. Schubert gelungen, eine befriedigende mathematische Erledigung des Problems zu finden, und zwar ist er hierzu durch eine induktiv gefundene Rekursionsformel gelangt [1]) Den Beweis für Schuberts Methode hat dann E. Busche in der soeben (Anm. 1) zitierten Arbeit geliefert, auf die wir uns im folgenden vorzugsweise stützen werden. Im Grunde finden sich jedoch wesentliche Elemente der Schubertschen Theorie und insbesondere das erwähnte Rekursionsgesetz bereits [2]) bei Leonhard Euler, der unserem Problem eine eigene, ja schon oben (S. 145 nebst Anm. 1 u. 2 dort) erwähnte Abhandlung gewidmet hat, deren einleitende Worte wir an den Kopf dieses Kapitels gesetzt haben. Diese interessante Abhandlung des großen Mathematikers muß jedoch, wie gleichfalls oben schon gesagt wurde, so gut wie unbekannt geblieben oder doch vollständig in Vergessenheit geraten sein. und es zeigt sich hier wieder, wie schon so oft, welch' unerschöpfliche Fundgrube Eulers Schriften immer noch bilden und daß sich bei ihm bereits Untersuchungen und Resultate vorfinden, die erst sehr viel später von anderen Mathematikern ohne Kenntnis der seinigen von neuem angestellt resp gewonnen sind.

---

1) Siehe E Busche, „Über die Schubert'sche Lösung eines Bachet'schen Problems", Mathem Annal. Bd. 47, 1896, p. 105. In den „Zwölf Geduldspielen" (1895) von H Schubert ist die Lösung p. 124 bis 132 ohne Beweis mitgeteilt

2) Übrigens waren — etwa gleichzeitig mit Schubert — auf die im Intermédiaire des mathématiciens gestellten Fragen 32 und 330 Antworten von E. Cesàro (t. I, 1894, p 30—31), Franel (t I, p 31; II, 1895, p. 122), Adrien Akar (t. I, p. 189—190), Delannoy (t. II, p. 120—121) und Moreau (t. II, p. 229) eingegangen, in denen sich die wesentlichen Punkte der Schubertschen Lösung auch finden. Dagegen vermag ich in den neuerdings dort (Interméd., t 18, 1911, p. 110—112) in Beantwortung von Frage 3103 (s. hier S. 167, Anm. 1) gegebenen Entwickelungen von Welsch nichts zu finden, das nicht auch die älteren Arbeiten leisteten, und für praktisch und übersichtlich kann ich die dortige Darstellung auch nicht ansehen.

Das zu behandelnde Problem in allgemeiner Fassung lautet offenbar:

Eine beliebige Anzahl n von Punkten, die man sich etwa auf einer Kreisperipherie angeordnet denken möge, ist der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis n bezeichnet. Man zählt nun, bei Punkt 1 anfangend und über Punkt n hinaus wieder bei Punkt 1 fortfahrend, fortgesetzt bis d und scheidet jeden Punkt von der weiteren Abzählung aus, auf den einmal die Zahl d fällt. Die zu beantwortende Frage ist dann: welches ist die Platznummer ν des Punktes, der als der e-te ausgeschieden wird? Dabei soll $0 < d \lesseqgtr n$ sein; die Zahl e ist natürlich $\leqq n$ und positiv.

Zunächst kehren wir mit Busche die Fragestellung einmal um, indem wir ν als bekannt und e als gesucht ansehen, also fragen: Als wievielter unter allen scheidet der Punkt, der die Platznummer ν trägt, bei der Abzählung aus? Zählt man, statt bei Punkt 1 anfangend, von Punkt $\nu - 1$ ab in umgekehrter Richtung, so daß also ν der zuletzt erreichte Punkt der Reihe ist, so wird jetzt offenbar die Reihenfolge der ausscheidenden Punkte eine andere werden; es muß aber offenbar jetzt der Punkt n, der ja bei einer neuen, unserer jetzigen Zählordnung entsprechenden Numerierung die Nummer ν bekommen würde, als e-ter Punkt ausscheiden, wie vorher ν. Die Punkte sollen dabei zunächst ihre ursprünglichen Platznummern beibehalten, aber jedesmal, wenn bei dieser Abzählung ein Punkt ausgeschieden wird, sollen alle übrigbleibenden Punkte von neuem numeriert werden, dabei aber der Punkt n immer der „Nullpunkt" für diese Numerierung bleiben, was natürlich nicht ausschließt, daß er daneben nach jedem Umlauf noch seine zweite oder eigentliche Nummer als Endpunkt, die der Anzahl der dann noch gerade vorhandenen Punkte gleich ist, erhält, während dagegen der Punkt 1 seine Nummer bis zu seinem Ausscheiden behält. Beim Zählen von $\nu - 1$ aus werden nun, wenn $\nu - 1 \geqq \mu d$ ist $(\mu \geqq 0)$, bis zur ersten Überschreitung des Nullpunktes μ Punkte, — eventuell also keiner, — ausgeschieden, nämlich die Punkte $\nu - d$, $\nu - 2d$, $\nu - \mu d$; darauf wird dann der Nullpunkt überschritten und nun scheidet der Punkt $\nu - (\mu + 1) d + k (n - \mu)$ aus, wo k die kleinste Zahl ist, die diesen Ausdruck positiv macht (der Nullpunkt hat jetzt als zweite Nummer eben die Nummer $n - \mu$) Wäre nun zufällig $\nu = (\mu + 1) d$, d. h. würde beim ersten Mal schon der Nullpunkt ausgeschieden, so wäre natürlich das gesuchte $e = \mu + 1$; sonst geht aber die Zählung fort, indem nun von $\nu - (\mu + 1) d + k (n - \mu)$ wieder sukzessive d, $2d \dots$ abgezogen werden, bis der Ausdruck negativ wird, wo dann wieder ein Vielfaches von der Anzahl der dann noch verbleibenden Punkte zu addieren ist und zwar das kleinste Vielfache dieser Zahl, das den Ausdruck noch positiv macht, und so geht dies fort. Schließlich wird aber jener Ausdruck einmal gerade $= 0$

werden, was dann und nur dann eintritt, wenn der Nullpunkt ausgeschieden wird.

Das Verfahren gestaltet sich hiernach am bequemsten nach folgender Regel[1]:

Man schreibe die Zahlen n, $n-1$, $n-2\ldots$ nebeneinander hin und setze unter n die Zahl v, unter $n-1$ die Zahl $v-d$, unter $n-2$ die Zahl $v-2d$ usw., indem man fortgesetzt d subtrahiert. Sobald eine dieser Differenzen negativ werden würde, füge man zu der vorhergehenden Zahl der unteren Reihe so oft die uber ihr stehende Zahl hinzu, daß, wenn man nun d subtrahiert, eine positive Zahl herauskommt, die höchstens gleich der Zahl ist, unter die sie gehört. Dieses Verfahren führt schließlich in der unteren Reihe zu der Zahl Null, und die Anzahl der in der unteren Reihe stehenden Zahlen bis zu 0 exkl ist die gesuchte Zahl e

Beispiel:

$$n=15,\ d=7,\ v=9$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 15, & 14, & 13, & 12, & 11, & 10, & 9, & 8, & 7, & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1 \\ 9, & 2, & 9, & 2, & 7, & 0. & & & & & & & & & \end{array}$$

Unter $n=15$ ist $v=9$ geschrieben, von dieser 9 wird $d=7$ subtrahiert und der Rest 2 daneben geschrieben, hierzu, da eine weitere Subtraktion von 7 zu einer negativen Zahl führen würde, die darüberstehende Zahl 14 addiert und dann 7 subtrahiert usw. Die gesuchte Zahl e ist also $=5$.

§ 4. Oberreihen.

In diesem § soll nicht die weitere Verfolgung unseres Problems unsere Aufgabe sein, sondern wir wollen hier ein Werkzeug schmieden, dessen wir für die weitere Behandlung des Problems bedürfen: es sind dies gewisse Reihen, die von Schubert eingeführt sind[2]) und durch Busche eine allgemeinere Form erhalten haben. Wir definieren als eine „Oberreihe mit dem Anfangsglied a, dem Summanden s und dem Quotienten q“ folgende Reihe:

$$(a, s, q)=[a],\ [(s+[a])q],\ [(s+[(s+[a])q])q]\ \ldots,$$

wo a, s, q irgendwelche reellen Zahlen sind und durch $[x]$, falls x eine ganze Zahl ist, diese, sonst aber die zu x nächstgrößere ganze Zahl charakterisiert werden soll, so zwar, daß eckige Klammern fortan nur

1) Siehe Busche, l. c p. 106.

2) Solche Reihen finden sich auch — unabhängig von Schubert — in den schon erwähnten Noten von Cesàro (Intermédiaire des mathématiciens, t. I, 1894, p. 30—31) und Franel (ibidem t. I, p. 31; t II, p. 122).

in dieser Bedeutung gebraucht werden sollen[1]), während runde die gewöhnliche Bedeutung der Klammern beibehalten. Eine Oberreihe besteht hiernach aus lauter ganzzahligen Gliedern und zwar in dem für uns eigentlich allein in Betracht kommenden und daher hinfort in der Regel stillschweigend angenommenen Falle, daß $a > 0$, $s \geqq 0$ und $q > 1$ ist, aus lauter positiven, beständig zunehmenden ganzen Zahlen Für diesen Fall gilt auch, daß, wenn man die Reihe der Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Glieder bildet, die Zahlen dieser Reihe jedenfalls nicht abnehmen. Ist t nämlich irgendein Glied der Oberreihe, so ist das darauffolgende $[(s+t)q]$, wonach die Richtigkeit unserer Behauptung dann leicht zu erkennen ist. So lautet z. B. die Oberreihe

$$\left(1,\ 3,\ \frac{4}{3}\right) = 1,\ 6,\ 12,\ 20,\ 31,\ 46\ \ldots$$

und — ein zweites Beispiel — $\left(2,\ 0,\ \frac{4}{3}\right) = 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 11,\ 15,\ 20\ \ldots$

Wir stellen nun zunächst einige Sätze über Oberreihen auf, von denen wir später Gebrauch machen werden:

I. Zu jeder Oberreihe (a, s, q) lassen sich stets unendlich viele andere Oberreihen mit demselben Quotienten so angeben, daß die Glieder der einen Reihe um dieselbe konstante Zahl größer sind als die entsprechenden einer anderen, also die Differenz zwischen je zwei Gliedern in der einen Reihe dieselbe ist wie die zwischen den entsprechenden einer anderen. Eine solche Oberreihe laßt sich bilden mit beliebig vorgeschriebenem Anfangsglied Für den Fall einer Reihe mit ganzzahligem Summanden s und einem Quotienten von der Form $q = \frac{d}{d-1}$ (d ganzzahlig) läßt sich eine solche zweite Oberreihe mit beliebig vorgeschriebenem ganzzahligem Summanden, also auch insbesondere mit dem Summanden 0, bilden; in diesem besonderen Falle (Summand 0) sind die Glieder der zweiten Reihe um $d\ s$ größer als die entsprechenden der ursprunglichen.

Es seien (a, s, q) und (A, S, q) zwei Oberreihen mit demselben Quotienten q; es werde $[A] - [a] = x$ und $s - S = y$ gesetzt. Dabei mag der Einfachheit halber A als die größere der Großen A, a und x somit als positiv vorausgesetzt werden. Alsdann sind, so behaupten wir, die Glieder der einen Oberreihe alle um die konstante Zahl x größer als die der anderen, wenn x und y der Bedingung genügen:

$$x\left(1 - \frac{1}{q}\right) = y$$

---

1) Da Verwechselungen hier ausgeschlossen sind, akzeptieren wir diese von **Busche** angewandte Bezeichnungsweise, obwohl ja sonst, wie auch in diesem Buche an einigen Stellen, unter $[x]$ die der Bedingung $[x] \leqq x < [x] + 1$ genügende ganze Zahl verstanden wird

Sind nämlich t und t' irgend zwei aufeinanderfolgende Glieder der einen und T, T' die entsprechenden Glieder der anderen Oberreihe, d. h. also

$$t' = [(t + s)\,q]$$
$$T' = [(T + S)\,q]$$

und ist für die Glieder t und T die Differenz noch $= x$, wie bei den beiden Anfangsgliedern der Reihe, also $T = t + x$, so ist

$$T' = [(t + x + S)\,q] = [(t + x + s - y)\,q]$$

und der obigen, für x und y bestehenden Bedingungsgleichung wegen:

$$T' = \left[\left(t + s + \frac{x}{q}\right) q\right],$$

also, weil x seiner Definition nach eine ganze Zahl ist.

$$T' = [(t + s)\,q] + x = t' + x,$$

d. h dann unterscheiden sich auch die nächstfolgenden Glieder noch um die konstante Zahl x; für die Anfangsglieder beider Reihen war dies nun aber der Fall und damit ist es also allgemein bewiesen x und y sind nur einer Gleichung unterworfen, so zwar, daß x offenbar beliebig ganzzahlig und damit das Anfangsglied der zweiten Reihe überhaupt ganz beliebig angenommen werden darf, so daß also Oberreihen, deren Glieder gegenüber den entsprechenden der ursprünglichen jeden ganzzahligen Unterschied aufweisen, jedenfalls möglich sind. — Dabei ergibt sich allerdings eventuell für unsere Größe $S = s - x\left(1 - \frac{1}{q}\right)$ ein negativer Wert, so beispielsweise, wenn wir zu unserer obigen Oberreihe

$$\left(1,\ 3,\ \frac{4}{3}\right) = 1,\ 6,\ 12,\ 20,\ 31,\ 46\ .$$

eine zweite dieser Art, d. h. mit gleichem Wachstum der Glieder fortschreitende, mit dem Anfangsgliede $A = 100\frac{2}{3}$ verlangen. Alsdann ist $[A] = 101$, x also $= 100$ und $S = -22$. Die verlangte zweite Oberreihe, deren Glieder trotz des negativen „Summanden“ beständig wachsen, ist

$$\left(100\,\frac{2}{3},\ -22,\ \frac{4}{3}\right) = 101,\ 106,\ 112,\ 120,\ 131,\ 146\ \ldots$$

Die Glieder sind also durchweg um 100 größer als die der ersten Oberreihe.

Ist speziell $q = \frac{d}{d-1}$ (d eine ganze Zahl), ein Fall, der später für uns besondere Bedeutung erlangen wird, so lautet unsere zwischen x und y bestehende Bedingungsgleichung: $x = dy$, so daß zu jedem ganzzahligen y, also insbesondere bei ganzzahligem s und beliebigem, wenn

nur ganzzahligem S, sich stets ein ganzzahliges x ergibt. Für $S = 0$ ist insbesondere $x = ds$ Damit ist Satz I vollständig bewiesen

II. Zu einem beliebigen unechten Bruch $q = \frac{m}{p}$ (m und p relativ prim) lassen sich stets $m - p$ Zahlen aus der Reihe $1, \ldots m - 1$ so auswählen, daß, wenn man mit diesen $m - p$ Zahlen als Anfangsgliedern arithmetische Reihen von der Differenz m bildet und darauf mit allen Zahlen dieser arithmetischen Reihen als Anfangsgliedern Oberreihen vom Quotienten $q = \frac{m}{p}$ und dem Summanden 0, alsdann in der Gesamtheit dieser Oberreihen jede ganze Zahl ein-, aber auch nur einmal vorkommt.[1])

Bei ganzzahligem a ist das erste Glied unserer Oberreihe $\left(a, 0, \frac{m}{p}\right)$ die Zahl a selbst, und das zweite Glied ist $b = \left[a \frac{m}{p}\right]$. Diese Größe b können wir uns aus a so gefunden denken, daß zu $a \cdot m$ eine Zahl $k < p$ so addiert wird, daß $a \cdot m + k \equiv 0 \bmod p$ wird; alsdann ist $b = \frac{a \cdot m + k}{p}$. Umgekehrt ergibt sich a aus b wieder, indem von b p eine Zahl $k < p$ subtrahiert wird, so daß b $p - k \equiv 0 \bmod m$ ist; alsdann ist $a = \frac{b \cdot p - k}{m}$. Man sieht hieraus sofort, daß beide Operationen — die „ursprüngliche“ und die „inverse“, wie wir sagen wollen, — eindeutig sind, daß aber die letztere nicht notwendig ausführbar ist, daß dies vielmehr nur für diejenigen Zahlen b der Fall ist, deren p-faches einen Rest mod m gibt, der $< p$ ist. Wir wollen solche Zahlen einmal „reduzierbare“ und diejenigen, deren p-faches mod m einen Rest $> p$ laßt, auf die also die inverse Operation nicht anwendbar ist, „unreduzierbare“ nennen. Man sieht sofort, daß von zwei mod m kongruenten Zahlen entweder beide reduzierbar oder beide unreduzierbar sind Werden also alle Zahlen in m arithmetische Reihen, jede Reihe von der Differenz m, angeordnet, so wird jede dieser Reihen entweder nur reduzierbare oder nur unreduzierbare Zahlen enthalten Die Trennung derselben ergibt sich nach dem bereits Gesagten folgendermaßen: Man nehme die Zahlen 1, 2 .. m und bestimme die kleinsten Reste ihrer p-fachen Werte mod m, die ja, da m und p relativ prim vorausgesetzt wurden, ein vollständiges Restsystem mod m bilden; dann sind diejenigen Zahlen, für die diese Reste 0, 1,

---

1) Dieser Satz wurde für den Fall $m - p = 1$ zuerst von Schubert (Mitteilungen der mathem Gesellsch zu Hamburg, Bd. III, 1891—1900, Nr. 5, 1895, p 224) ausgesprochen und dazu von Busche der Beweis geliefert (ibid. p 225 f). Die obige allgemeinere Form rührt von dem Verfasser dieses Buches her (Zeitschr für Math u. Phys. 40, 1895, p. 246)

$\cdots p-1$ sind, die Anfangsglieder der arithmetischen Reihen der reduzierbaren, die $m-p$ anderen dagegen die Anfangsglieder der arithmetischen Reihen der unreduzierbaren Zahlen

Berücksichtigt man, daß jede reduzierbare Zahl durch ein- oder mehrmalige Anwendung der inversen Operation bei deren Eindeutigkeit auf eine bestimmte unreduzierbare Zahl führen, sich also durch ein- oder mehrmalige Anwendung der ursprünglichen Operation aus einer unreduzierbaren Zahl ergeben muß, so sieht man, daß, wenn jede Zahl dieser $m-p$ arithmetischen Reihen unreduzierbarer Zahlen zum Anfangsglied einer Oberreihe vom Quotienten q und dem Summanden 0 genommen wird, in diesen Oberreihen zusammen jede Zahl der Zahlenreihe gerade einmal vorkommen wird.

Den so bewiesenen Satz wollen wir noch kurz durch ein Beispiel illustrieren und wählen hierfür: $m=7$, $p=5$. Da die 5-fachen Werte der Zahlen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

nach 7 die kleinsten Reste.

5, 3, 1, 6, 4, 2, 0

ergeben, so liefern die Reihen

1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50 ...
4, 11, 18, 25, 32, 39, 46 . .

alle unreduzierbaren Zahlen Diese Zahlen muß man daher zu Anfangsgliedern von Oberreihen nehmen, um jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe gerade einmal zu erhalten, wie nachstehende Tabelle der Oberreihen dies für das Intervall von 1 bis 50 zeigt.

1, 2, 3, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 40
4, 6, 9, 13, 19, 27, 38 ..
8, 12, 17, 24, 34, 48 ...
11, 16, 23, 33, 47 . .
15, 21, 30, 42 ...
18, 26, 37 ...
22, 31, 44 .
25, 35, 49 .
29, 41 . .
32, 45 ...
36 ..
39 .
43 ..
46 .
50 .

§ 5. Die Buschesche Lösung des mathematischen Problems.

Aus dem in § 3 (S. 156) angegebenen Schema, das dort der Ermittelung von e aus v diente, aber offenbar umgekehrt auch der Bestimmung von v zu gegebenem e zu dienen vermag, leitete E. Busche mit Hilfe des Begriffes „Oberreihe" den folgenden Satz her:

Die Nummer v des Punktes, der unter n Punkten bei Abzählungen bis d als der e-te ausscheidet, ist gleich dem Überschuß von $de+1$ über das größte Glied der Oberreihe $\left(1, n-e, \frac{d}{d-1}\right)$, das noch kleiner als $de+1$ ist.

In dem Beispiel des § 3, für das ja $n = 15$, $d = 7$ war und $e = 5$ zu $v = 9$ ermittelt wurde, würde also die Oberreihe

$$\left(1,\ 10,\ \frac{7}{6}\right) = 1,\ 13,\ 27,\ 44\ \ldots$$

in Betracht kommen; das letzte Glied dieser, das noch kleiner als $de+1 = 36$ ist, ist 27 und der Überschuß von 36 über dieses $= 9$, so daß also nach dem vorstehenden, vorläufig noch unbewiesenen Satze Busches sich — umgekehrt wie in § 3 — $v = 9$ zu $e = 5$ ergeben würde — Sprechen wir im folgenden von den beiden Reihen des in § 3 gegebenen Schemas, die nicht mit unseren „Oberreihen" verwechselt werden dürfen, als der „Reihe I", worunter wir die obere, und der „Reihe II", worunter wir die untere der beiden verstehen, so ergeben sich, wenn wir jetzt — statt wie dort von v — von e als gegebener Größe ausgehen, die Zahlen der Reihe II aus denen von I offenbar in der Weise, daß man unter die Zahl $(n-e)$ von I zunächst 0 schreibt und dann hierzu von Zahl zu Zahl in der Richtung von rechts nach links je d addiert, wobei jedesmal, wenn die Zahl von II größer als die darüberstehende von I werden würde, die letztere so oft von der ersteren abzuziehen ist, bis die Zahl der Reihe II gleich oder kleiner als die darüberstehende von I, aber > 0 ist. Dabei scheint zunächst noch jedes Kriterium zu fehlen, das uns ermöglichte, von vornherein, d. h. ohne Ausführung dieser einzelnen Operationen, anzugeben, welche Zahlen von I hierbei zu subtrahieren sind, bzw. wie oft dies mit den einzelnen zu geschehen hat; jedoch werden wir sehen, daß jedes Glied unserer Oberreihe $\left(1, n-e, \frac{d}{d-1}\right)$, in dem Falle unseres Beispiels also der Oberreihe $\left(1, 10, \frac{7}{6}\right)$, um ihr Anfangsglied 1 vermindert, gerade gleich der Summe aller derjenigen aus der Reihe I genommenen Zahlen

ist, die in dem dortigen Schema — von rechts nach links gerechnet — bis zu der betreffenden Stelle insgesamt schon subtrahiert sein müssen, damit man das betreffende Glied der Reihe II bekommt. Danach gäbe uns die obenstehende Oberreihe unseres Beispiels also an, daß zunächst (rechts) in dem zugehörigen Schema $13 - 1 = 12$ subtrahiert wird, was auch tatsächlich der Fall ist $(7 + 7 - 12 = 2)$; das nächste Glied der Oberreihe, vermindert um 1, also 26, gäbe uns die Summe dieser 12 und der dann zu subtrahierenden Zahl, d. h. also 14, was wiederum unser Schema bestätigt Man brauchte also nur die Differenzen von je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der Oberreihe zu nehmen und erhielte so alle Zahlen der Reihe I, die subtrahiert werden müssen, damit die Zahlen der Reihe II erhalten werden Sind l Differenzen der Oberreihe hintereinander $= k$, so würde dies bedeuten, daß das l-fache der Zahl k der Reihe I zu subtrahieren ist. Da nun in unserer Oberreihe das erste Glied mit sich selbst natürlich die Differenz 0 hat, andererseits aber, wenn wir in der Reihe II auch noch die 0 unter dem $(n - e)$ der Reihe I mitrechnen, jedenfalls unsere Aussage für diese erste Differenz der Oberreihe erfüllt ist, weil ja von der 0 in II stets 0 zu subtrahieren ist, so liegt es nahe, den Versuch eines Beweises durch Schluß von n auf $n + 1$ zu machen

Wir wollen und dürfen daher annehmen, daß man die Differenzen der Oberreihe bereits bis zu der Zahl $n - e + \lambda$ der Reihe I exkl. in Übereinstimmung mit dem Verfahren des § 3 gefunden hat $(\lambda \geqq 1)$. Die Zahl der Reihe II, die für den Platz unter $n - e + \lambda$ bisher berechnet ist, sei in der Form $d \cdot \lambda - (t - 1)$ geschrieben, weil ja d bereits λ-mal addiert ist; dann ist $t - 1$ die Summe aller bisher subtrahierten Zahlen der Reihe I, also nach unserer Annahme t das betreffende Glied der ja mit 1 beginnenden Oberreihe. Wir haben nun zwei Falle zu unterscheiden, nämlich 1) daß man, um das betreffende Glied der Reihe II zu bekommen, $n - e + \lambda$ ein- oder mehrere Male zu subtrahieren hat, und 2) daß eine solche Subtraktion nicht stattfindet Dabei soll es in dem ersten dieser Fälle, den wir jetzt zunächst behandeln wollen, unentschieden bleiben, ob bereits eine ein- oder mehrmalige Subtraktion von $n - e + \lambda$ erfolgt ist; wir setzen nur voraus, daß die fragliche Zahl jetzt immer noch großer ist als $n - e + \lambda$, also jedenfalls mindestens noch einmal um diese Große verkleinert werden muß, so daß offenbar also, wofern unser Satz richtig ist, das nächste Glied der Oberreihe, d. h

$$t' = \left[(n - e + t)\frac{d}{d - 1}\right]$$

um $n - e + \lambda$ größer als t sein müßte. Wir setzen nun $t = d(\lambda - 1) + r$; dann ist, weil $\left[u\frac{d}{d - 1}\right]$ offenbar $= u + \left[\frac{u}{d - 1}\right]$ bei ganzzahligem u ist.

$$t' = n - e + t + \left[\frac{n - e + t}{d - 1}\right]$$
$$= n - e + t + \left[\frac{n - e + d(\lambda - 1) + r}{d - 1}\right],$$

also $$t' - t = n - e + \lambda - 1 + \left[\frac{n - e + \lambda - 1 + r}{d - 1}\right],$$

und es handelt sich somit nur noch um die Bestimmung dieses Klammerausdrucks, der sich, wenn unsere Behauptung $t' - t = n - e + \lambda$ richtig sein soll, $= 1$ ergeben müßte. Es ist nun nach unserer Annahme

$$d\lambda - (t - 1) > n - e + \lambda$$

oder $$d\lambda + 1 - d(\lambda - 1) - r > n - e + \lambda$$

oder $$d > n - e + \lambda - 1 + r$$

Andererseits ist der größtmögliche Wert von $d\lambda - (t - 1)$, nämlich dann, wenn $n - e + \lambda$ noch gar nicht subtrahiert ist, gleich dem rechts vorhergehenden Glied der Reihe II, vermehrt um d; das vorhergehende Glied der Reihe II ist aber $\leqq n - e + \lambda - 1$, also

$$d\lambda - (t - 1) < n - e + \lambda - 1 + d$$

oder $$d + 1 - r < n - e + \lambda - 1 + d$$
$$1 \leqq n - e + \lambda - 1 + r$$

Der Wert $n - e + \lambda - 1 + r$ liegt mithin zwischen den Grenzen 1 und d, und zwar mit Einschluß der unteren Grenze 1 und mit Ausschluß der oberen Grenze d; dann ist aber

$$\left[\frac{n - e + \lambda - 1 + r}{d - 1}\right] = 1,$$

womit für unseren ersten Unterfall der gewünschte Beweis erbracht ist. Man findet also jedenfalls die in Reihe II unter $n - e + \lambda$ stehende Zahl mittelst der Oberreihe und zwar, indem man das größte Glied derselben, das noch $< d\lambda + 1$ ist, von $d\lambda + 1$ subtrahiert. Ist dieses Glied etwa $t^{(\varrho)}$, also $0 < d\lambda + 1 - t^{(\varrho)} < n - e + \lambda$, so ist, da die Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der Oberreihe jedenfalls nicht abnehmen (s. S. 157)[1] und die Differenz zwischen $t^{(\varrho)}$ und dem vorhergehenden Gliede $t^{(\varrho-1)}$ bereits $= n - e + \lambda$ ist, das auf $t^{(\varrho)}$ folgende Glied der Oberreihe, nämlich $t^{(\varrho+1)}$, mindestens um $n - e + \lambda$ größer als $t^{(\varrho)}$; es würde also

$$d\lambda + 1 - t^{(\varrho+1)}$$

1) Die dort gemachten Voraussetzungen $a = 0$, $s \geqq 0$, $q > 1$ sind ja für unsere Oberreihe erfüllt.

schon negativ resp. höchstens $=0$ sein und, wenn man andererseits das vorhergehende Glied $t^{(\varrho-1)}$ nähme, die Differenz

$$d\lambda + 1 - t^{(\varrho-1)} > n - e + \lambda \quad \text{sein.}$$

Gehen wir jetzt zu dem zweiten der beiden Unterfälle über, daß nämlich das mit Hilfe des Gliedes t der Oberreihe noch richtig bestimmbare Glied der Reihe II, d. h. also $d\lambda - (t-1)$, schon kleiner als $n - e + \lambda$ ist und daß man dann noch $\sigma \geqq 0$ weitere Glieder der Reihe II durch einfache Addition von d hieraus bilden kann, ohne eine der darüberstehenden Zahlen abziehen zu müssen, so daß also unter

$$n-e+\lambda \qquad n-e+\lambda+1 \quad .. \quad n-e+\lambda+\sigma$$

die Zahlen

$$d\lambda+1-t \qquad d(\lambda+1)+1-t \; . \; . \qquad d(\lambda+\sigma)+1-t\text{[1]}$$

zu setzen sind, daß aber das dann folgende Glied

$$d(\lambda+\sigma+1)+1-t > n-e+\lambda+\sigma+1$$

ist, so wird unsere Aufgabe offenbar darin bestehen, zu zeigen, daß das auf t folgende Glied unserer Oberreihe gerade um $n-e+\lambda+\sigma+1$ größer ist als t Nennen wir dasselbe wieder t', so haben wir, wie oben:

$$t'-t = n-e+\lambda-1+\left[\frac{n-e+\lambda-1+r}{d-1}\right]$$

Nun war ja $\qquad d(\lambda+\sigma)+1-t \leqq n-e+\lambda+\sigma,$

jedoch $\qquad d(\lambda+\sigma+1)+1-t > n-e+\lambda+\sigma+1$

Diese beiden Ungleichungen nehmen aber, da $t = d(\lambda-1)+r$ gesetzt war, die Form an:

$$d(\sigma+1)-\sigma \leqq n-e+\lambda-1+r$$

und $\qquad d(\sigma+2)-\sigma-1 > n-e+\lambda-1+r,$

also $\qquad d(\sigma+1)-\sigma \leqq n-e+\lambda-1+r < d(\sigma+2)-\sigma-1$

oder $(d-1)(\sigma+1)+1 \leqq n-e+\lambda-1+r < (d-1)(\sigma+2)+1,$

also $\qquad \left[\frac{n-e+\lambda-1+r}{d-1}\right] = \sigma+2,$

d. h $\qquad t'-t = n-e+\lambda+\sigma+1$

Damit ist offenbar der Beweis für die Richtigkeit des Buscheschen Satzes geliefert

1) Im Vergleich mit dem Schema in § 3 ist hier die Reihenfolge der Glieder gerade die umgekehrte, also hier von links nach rechts geschrieben, was dort von rechts nach links folgt

§ 6. Das Verfahren Schuberts. — Die Untersuchungen Eulers und Taits.

Zur Bestimmung der Zahl v aus der Platznummer e gebraucht E. Busche, wie wir im vorigen § sahen, die Oberreihe

$$\left(1,\ n-e,\ \frac{d}{d-1}\right);$$

bei dieser Bestimmung waren wesentlich die Unterschiede zwischen den benachbarten Gliedern der Oberreihe, und wir können daher auf Grund unseres Satzes I in § 4 (S. 157) uns diese Oberreihe ersetzt denken durch eine andere, deren aufeinanderfolgende Glieder dieselben Differenzen haben, bei der aber der Summand den für die Rechnung bequemsten Wert 0 hat. Nach dem erwähnten Satze ist dies die Oberreihe

$$\left(d(n-e)+1,\ 0,\ \frac{d}{d-1}\right).$$

Da alle Glieder jetzt um $d(n-e)$ größer sind als zuvor, so werden wir nicht mehr, wie im vorigen §, den Überschuß von $de+1$ über das größte, noch unterhalb $de+1$ liegende Glied der Oberreihe, sondern jetzt den von

$$de+1+d(n-e)=dn+1$$

über das größte Glied der Oberreihe, das noch unterhalb dieser Zahl liegt, zu bilden haben. Wir erhalten so folgende weitere, von Schubert[1]) angegebene Vorschrift:

Die Nummer v des Punktes, der aus n Punkten durch Abzählen bis d als der e-te ausscheidet, ist gleich dem Überschuß von $dn+1$ über das größte Glied der Oberreihe

$$\left(d(n-e)+1,\ 0,\ \frac{d}{d-1}\right),$$

das noch kleiner als $dn+1$ ist.

Für unser obiges Beispiel $n=15$, $d=7$, $e=5$ ist also die Oberreihe

$$\left(71,\ 0,\ \frac{7}{6}\right)=71,\ 83,\ 97,\ 114\ \ldots$$

zu bilden, und das größte, unterhalb $dn+1=106$ liegende Glied, also 97, unterscheidet sich hiervon um 9, so daß wieder $v=9$ sich ergibt.

1) Siehe Schubert, „Zwölf Geduldspiele“ (1895), p 129/130; Busche, Mathem. Annal., Bd 47, p. 111

Wenn es sich um die Bestimmung der Werte v zu den verschiedenen $e = 1, 2, \ldots n$ bei demselben d handelt, so sind hierfür mithin die Oberreihen

$$\left(d(n-1)+1,\ 0,\ \frac{d}{d-1}\right),\quad \left(d(n-2)+1,\ 0,\ \frac{d}{d-1}\right),\ \ldots \left(1,\ 0,\ \frac{d}{d-1}\right)$$

zu bilden; in jeder ist dann das größte Glied aufzusuchen, das noch unterhalb der für alle diese Fälle gleichen Zahl $dn+1$ liegt, und dieses alsdann jedesmal von $dn+1$ zu subtrahieren. Als Postulat ergibt sich also, daß in diesen Oberreihen jedenfalls die Zahlen dn, $dn-1$, $\ldots$ $dn-(n-1)$ alle gerade einmal auftreten müssen, da ja jeder der n Punkte bei dem Abzählverfahren einmal ausscheidet In der Tat wissen wir nach Satz II [1]) des § 4 (S 159), daß in diesen n Oberreihen jedenfalls schon alle Zahlen von 1 bis dn inkl. einmal, aber auch nur einmal, vorkommen. — Zugleich sieht man auch, daß, wenn eine dieser Zahlen $dn-i$; $i = 0, 1, \ldots (n-1)$, in einer Oberreihe auftritt, sie dort auch die größte noch unterhalb $dn+1$ gelegene Zahl ist Die nächste Zahl der betreffenden Oberreihe wäre nämlich $\left[(dn-i)\frac{d}{d-1}\right]$, und dieser Ausdruck besitzt seinen kleinsten Wert offenbar dann, wenn i seinen größten Wert hat, d. h. für $i = n-1$ Dieser kleinste Wert von $\left[(dn-i)\frac{d}{d-1}\right]$ für $i = n-1$ ist aber, wie eine einfache Rechnung zeigt, bereits $dn+2$ — Dies zur Verifikation des vorstehenden Schubertschen Satzes!

Es mag ferner noch darauf hingewiesen werden, daß für einen besonderen Fall, nämlich $d = 2$, unsere Oberreihe $\left((dn-e)+1,\ 0,\ \frac{d}{d-1}\right)$ eine gewöhnliche geometrische Reihe wird, weil dann $\frac{d}{d-1}$ ganzzahlig, nämlich $= 2$, wird.

Die durch den obigen Satz Schuberts gegebene Methode zur Ermittelung der Platznummer v zu gegebenem e ist die ursprünglich von Schubert gefundene, die dann Busche den Weg zu seinem Verfahren gewiesen hat. [2]) Schubert wiederum ist zu ihr, wie schon oben bemerkt wurde, durch ein induktiv gefundenes Rekursionsgesetz gelangt, das sich, wie schon oben gesagt, bereits bei Euler findet und das sich jetzt a posteriori leicht folgendermaßen ergibt: Bezeichnen wir das zu den Werten n, e, d zugehörige v durch $v(n, e, d)$, so wird die Bestimmung unseres v nach dem obigen Satze von Schubert durch die Oberreihe

$$\left(d(n-e)+1,\ 0,\ \frac{d}{d-1}\right)$$

---

1) Es kommt nur der dort in Anm 1 erwähnte Spezialfall: $m - p = 1$ des Satzes in Betracht.

2) Siehe Busche, l. c. (Math Ann.), p. 112

geleistet. Dieselbe Oberreihe gehört aber auch zu $v(n+1, e+1, d)$ und allgemein zu $v(n+i, e+i, d)$, nur daß man, um $v(n+1, e+1, d)$ zu finden, das betreffende Glied der Oberreihe nicht von $dn+1$, sondern von $d(n+1)+1$ abzuziehen hat, so daß für $v(n+1, e+1, d)$ sich zunächst also jedenfalls ein Plus von d gegenüber $v(n, e, d)$ ergibt. Da nun die Oberreihen für $v(n, e, d)$ und $v(n+1, e+1, d)$ übereinstimmen, so sind also die Zahlen $n-e+1, n-e+2, \ldots n$ in dem Sinne des in § 3 gegebenen Schemas in beiden Fällen gleich oft abzuziehen, nur endigt in dem zweiten Falle die Reihe I links erst mit $n+1$, statt mit n, und es ist daher möglich, daß auch diese Zahl noch ein- oder mehrere Male abzuziehen ist, mithin in der Oberreihe jetzt noch ein späteres Glied in Betracht käme als zuvor Es ergibt sich hieraus offenbar, daß

$$v(n+1, e+1, d) = v(n, e, d) + d - \varepsilon(n+1)$$

ist, wo ε eine ganze Zahl $\geqq 0$ ist.

In Worten ausgesprochen, bedeutet diese Rekursionsformel:

Die Nummer v des Punktes, der unter n Punkten durch Abzählen bis d als der e-te ausscheidet, gibt, wenn man d dazu addiert und, falls diese Summe großer als $n+1$ ist, letztere Zahl so oft subtrahiert, daß ein positiver Rest $\leqq n+1$ bleibt, die Nummer v des Punktes, der unter $n+1$ Punkten durch Abzahlen bis d als der $(e+1)$-te ausscheidet [1])

Unser obiges Beispiel hatte uns gezeigt, daß als 5-ter Punkt unter 15 durch Abzählen bis 7 der Punkt 9 ausscheidet, wir sehen hieraus jetzt sofort, daß unter 16 Punkten durch Abzählen bis 7 als 6-ter Punkt der Punkt $9+7=16$ ausscheidet

Noch einige weitere Bemerkungen wollen wir an unsere Rekursionsformel knüpfen, um so zu zeigen, wie sich die vorwiegend induktiven Betrachtungen, die der bekannte englische Physiker P. G Tait

1) Siehe Schubert, „Zwölf Geduldspiele" (1895), p 125. Bei L. Euler (Novi Comment. Acad. Petrop. XX, 1775) siehe — bezüglich des Rekursionsgesetzes für beliebige Werte von e — insbesondere l. c. p. 127/128, Ende von § 5, und p. 132, Ende von § 9. Für einen, übrigens auch von Euler vorwiegend betrachteten Spezialfall, nämlich für $e=n$, war das Rekursionsgesetz — unabhängig von Schubert — auch von H Delannoy (Interméd. des mathém., t. II, 1895, p. 120/121) und Moreau (ibidem, t. II, 1895, p 229) angegeben worden — Neuerdings führte der Fragesteller der Question 3103 im „Intermédiaire", t. XIII, 1906, p. 190 unsere Rekursionsformel an und wünschte an ihrer Stelle ein „direkteres Verfahren"; die Antwort kann nur in einem Hinweis auf die Arbeiten von Schubert und Busche bestehen

in einer kleinen Arbeit[1]) über unser Problem angestellt hat, in den Rahmen der hier entwickelten Theorie fügen: Wenn man für $n=8$, $d=3$, festgestellt hat, daß die Punkte 1, 2, .. 8 in der Reihenfolge ausscheiden, die in dem Schema

$$\begin{matrix} 3 & 5 & 1 & 7 & 4 & 2 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix}$$

durch die obere Reihe der Zahlen angegeben wird, so folgt nach unserer Rekursionsformel sofort, daß für $n=9$, $d=3$ beispielsweise als 5-ter ausscheidet der Punkt, den wir erhalten, wenn wir zu der Nummer des jetzt als 4-ter ausscheidenden, d. h. zu 5, $d=3$ addieren, also Punkt 8. Gehen wir also von $n=8$ zu $n=9$ über, so muß das Schema so geändert werden, daß die oberen Zahlen alle um 1 vergrößert und um $d=3$ Plätze zyklisch[2]) nach rechts verschoben werden; wir erhalten so:

$$\begin{matrix} 9 & 7 & 1 & 4 & 6 & 2 & 8 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

Die Verschiebung um d Plätze ist offenbar illusorisch, wenn $d=n+1$ ist, da dann jede Zahl wieder auf denselben Platz gelangt wie zuvor. Im Sinne unserer Rekursionsformel gesprochen, liegt die Besonderheit dieses Falles darin, daß für alle Werte von e das $\varepsilon=1$ zu setzen ist, so daß die Rekursionsformel also lautet:

$$v(n+1,\ e+1,\ n+1)=v(n,\ e,\ n+1),$$

in Worten:

Der Punkt, der unter insgesamt n Punkten bei Abzahlungen zu $(n+1)$ als e-ter ausscheidet, scheidet unter $(n+1)$ Punkten, bei Abzahlungen gleichfalls zu $(n+1)$, als $(e+1)$-ter aus.

Noch eine weitere Bemerkung sei an die Rekursionsformel geknüpft: Eine besondere Bedeutung in dem geschichtlichen Werdegang unseres Problems besitzt, wie wir wissen, die Frage: **Welcher Punkt bleibt als letzter übrig?** Tait und ebenso schon Euler[3]) stellten sich nun die Aufgabe, diese Frage auch für größere Werte von n zu beantworten, nachdem man zuvor — bei demselben d — für kleinere Werte von n die betreffenden Platznummern irgendwie ermittelt habe. Aus unserer Rekursionsformel folgt sofort: *Die Nummer v des Punktes, der*

---

1) P. G. Tait, „On the Generalization of Josephus' Problem", Proc. of the Royal Society of Edinburgh 22, 1897/99, p. 165—168

2) Ist man hierbei rechts bis ans Ende gekommen, so fährt man (vgl. die Rekursionsformel) links vorn fort; ein Platz bleibt dann zum Schluß noch frei, der für die Zahl 1

3) Euler, l. c. p 134ff. Vgl. übrigens auch die Anm. der vorigen Seite

unter n Punkten bei Abzählungen nach d als letzter übrig bleibt, gibt, um d vermehrt und eventuell um ein Vielfaches von $(n+1)$ vermindert, die Nummer des Punktes, der unter $n+1$ Punkten bei Abzählungen nach d als letzter übrig bleibt. Weiß man z. B. — s. das Schema der vorigen Seite —, daß bei $d=3$ unter 9 Punkten der Punkt 1 als letzter übrigbleibt, so folgt sofort, daß unter 10 Punkten bei $d=3$ der letzte Punkt $1+3=4$ ist. Das ε unserer Rekursionsformel ist bei diesem Übergang von n zu $n+1$ Null und wird diesen Wert vielleicht auch noch bei den weiteren Übergängen beibehalten. Demgegenüber stelle die Punktezahl $9+x$ den ersten Fall dar, bei dessen Erreichung ein von 0 verschiedenes ε auftrete; dann ist also unter $9+x$ Punkten der zuletzt übrigbleibende der Punkt

$$1+3x-(9+x)=2x-8.$$

Dieser Ausdruck muß >0 und $<d$ sein (wäre er $\geqq d$, so hätten wir offenbar schon bei Erreichung von $9+(x-1)$ Punkten ein von 0 verschiedenes ε gehabt), und daher ist $x=5$. Unter 14 Punkten bleibt also Punkt 2 zuletzt übrig, unter 15 darauf Punkt 5, bei 16 Punkten Punkt 8 usw., bis wieder ein $\varepsilon=1$ auftritt. Dies geschehe zuerst für $14+y$; dann wäre für diesen Fall der zuletzt übrigbleibende Punkt

$$2+3\,y-(14+y)=2y-12.$$

y ist also $=7$, d. h. bei 21 Punkten bleibt Punkt 2 zuletzt übrig So geht man weiter und findet z. B als nächste Stufe, daß bei 31 Punkten Punkt 1 zuletzt übrigbleibt, darauf bei 47 Punkten Punkt 2, sodann: bei 70 Punkten Punkt 1 usw. So entsteht leicht eine Tabelle, und die Zwischenglieder sind darin ohne weiteres zu ergänzen.

Nehmen wir als zweites Beispiel $d=10$, so ist zunächst für $n=2$ offenbar der Punkt 1 der zuletzt übrigbleibende, daraus folgt dann, daß es bei 3 Punkten der Punkt $1+10-3\cdot 3=2$ ist Setzt man dies Verfahren weiter fort, so ergeben sich als die zuletzt übrigbleibenden Punkte die in dem folgenden Schema in der unteren Reihe aufgeführten, während die obere Reihe die betreffende Gesamtzahl der Punkte angibt:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	2	4	4	2	5	7	8	8	7	5	2	12	7	1	11	3	13	3	13	1

Daß gerade der Punkt 1 bei Abzählungen nach 10 der zuletzt übrigbleibende ist, kommt somit zunächst bei 2 Punkten und dann erst wieder bei 16 Punkten, darauf bei 22 Punkten usw vor Der Fall der 16 Punkte ist also, abgesehen von dem trivialen Fall der 2 Punkte, der kleinste dieser Art, und diesen Fall der 16 Punkte resp der 16 Kinder (1 Stiefkind, 15 leibliche Kinder) hatten wir gerade in dem japanischen Problem (vgl. S. 144), so daß wir hier nunmehr die dort versprochene mathematische Begründung für diese Wahl gerade der Zahl 15 gewonnen haben.

Kapitel XVI

Brücken und Labyrinthe.

Je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geometrique ou lineaire qui nous exprime directement situm, comme l'algebre exprime magnitudinem.

Leibniz, Brief an Huygens vom 8 IX. 1679 (Mathem. Schriften, herausg. v Gerhardt, Abt I, Bd. II, Berlin 1850, p 19).

Der berühmte Leibnitz besaß viel wirkliche Einsichten, wodurch er die Wissenschaften bereicherte, aber noch viel größere Entwürfe zu solchen, deren Ausführung die Welt von ihm vergebens erwartet hat Ob die Ursache darin zu setzen, daß ihm seine Versuche noch zu unvollendet schienen, eine Bedenklichkeit, welche verdienstvollen Männern eigen ist, und die der Gelehrsamkeit jeder Zeit viel schätzbare Fragmente entzogen hat, oder ob es ihm gegangen ist, wie Boerhave von großen Chemisten vermuthet, daß sie öfters Kunststücke vorgaben, als wenn sie im Besitze derselben wären, da sie eigentlich nur in der Überredung und dem Zutrauen zu ihrer Geschicklichkeit bestanden, daß ihnen die Ausführung derselben nicht mißlingen konnte, wenn sie einmal dieselbe übernehmen wollten, das will ich hier nicht entscheiden. Zum wenigsten hat es den Anschein, daß eine gewisse mathematische Disciplin, welche er zum voraus Analysin situs betitelte und deren Verlust unter Andern Buffon bei Erwägung der Zusammenfaltungen der Natur in den Keimen bedauert hat, wohl niemals etwas mehr, als ein Gedankending gewesen sei

Kant, „Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume" Werke, herausgeg. v G Hartenstein, II, 1867, p. 385.

Leibnitz promit un calcul des Situations, et mourut sans rien publier. C'est un sujet où tout reste à faire, et qui mériteroit bien qu'on s'en occupât

Vandermonde, „Remarques sur les problèmes de situation" Mém. de l'Acad des Sciences (de Paris) 1771 (1774), p. 567.

Dieser bisher fast ganz brach liegende Gegenstand, über den wir nur einige Fragmente von Euler und einem von mir sehr hochgeschätzten Geometer Vandermonde haben, muß ein ganz neues Feld eröffnen und einen ganz eigenen hochst interessanten Zweig der erhabenen Größenlehre bilden.

Gauss an Olbers, Braunschweig, 12 Oktober 1802 („Wilhelm Olbers Sein Leben und seine Werke", herausg v C Schilling, Bd II, 1 Abt., Berlin 1900, p 103)

Gauss scheint sich viel mit dieser Geom Situs noch in der allerletzten Zeit beschäftigt zu haben

C G J. Jacobi an P H v Fuss, 1848 („Der Briefwechsel zw Jacobi u. Fuss", herausg v P Stäckel u. W Ahrens, Leipzig 1908, p 65)

Eine außerordentliche Hoffnung setzte Gauss auf die Ausbildung der Geometria Situs, in der weite gänzlich unangebaute Felder sich befänden, die durch unsern gegenwärtigen Calcul noch so gut wie gar nicht beherrscht werden könnten

Sartorius v Waltershausen, „Gauss zum Gedächtniss", 1856, p 88.

Mit diesem von Leibnitz, wenn auch vielleicht nicht ganz in derselben Bedeutung, gebrauchten Namen [Analysis situs] darf wohl ein Theil der Lehre von den stetigen Größen bezeichnet werden, welcher die Größen nicht als unabhängig von der Lage existirend und durcheinander meßbar betrachtet, sondern von den Maßverhältnissen ganz absehend, nur ihre Orts- und Gebietsverhältnisse der Untersuchung unterwirft "

B Riemann, „Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien", Journ f Math., Bd 54, 1857, p. 105 = Werke, herausg. von H Weber, 2. Aufl. 1892, p. 91.

§ 1. Liniensysteme.

In diesem und den folgenden Paragraphen werden uns, bevor wir zu dem eigentlichen Gegenstande des Kapitels (§§ 5—7) kommen, einige sehr einfache, allgemeinere Betrachtungen aus der „Analysis situs“ beschäftigen müssen, einem Gebiete, an das übrigens schon Leibniz, wie die vorstehenden Zitate besagen, gedacht haben soll, wenn auch wohl seine Ideen und Pläne nicht ganz in derselben Richtung lagen[1]) wie das, was man heute unter Analysis situs versteht.

Als ein „Liniensystem“[2]) sei definiert eine Mannigfaltigkeit von beliebig geformten Linien im Raume von der Beschaffenheit, daß es möglich ist, von jeder beliebig auf einer Linie des Systems angenommenen Stelle zu irgendeiner anderen solchen Stelle zu gelangen auf einem Wege, der ausschließlich aus Linien des Systems besteht. Während man im allgemeinen von einer Stelle in dem System in zwei verschiedenen Richtungen ausgehen kann, sind diejenigen Stellen ausgezeichnet, von denen aus dies nur in einer oder andererseits in 3 resp. mehr Richtungen möglich ist. Wir bezeichnen diese ausgezeichneten Stellen des Systems kurz als seine „Punkte“ und zwar diejenigen, die man nur in einer Richtung verlassen kann, als „Endpunkte“ und diejenigen, von denen man in 3 oder mehr Richtungen ausgehen kann, als „Knotenpunkte“. Ein System ohne Endpunkte wollen wir ein „ge-

---

1) Vgl. das vorstehende Wort Riemanns, sowie M Dehn und P Heegaard, „Analysis situs“ in Encyklop. der math. Wiss. III. 1, p 154, Fussn 2

2) Diese Bezeichnung, die u a Lippich, „Bemerkung zu einem Satze aus Riemann's Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe“, Wiener Sitzungsber Bd LXIX, Abt II, 1874, p. 91 ff. gebraucht, erscheint mir zweckmäßiger als die von Listing, „Vorstudien zur Topologie“ in Gottinger Studien, red. von A. B Krische, 1847, Abt. I, p. 867 eingeführte „Linearkomplexion“, da man bekanntlich unter „linearem Komplex“ jetzt etwas wesentlich anderes versteht; charakteristisch und brauchbar wäre auch „Linienkontinuum“. Ein anderer, zumal von Mathematikern englischer Zunge, gebrauchter Name ist „Graph“; vgl. dazu Kap. XVIII, S. 220/221, Anm 2.

schlossenes“ nennen. Genetisch können wir hiernach ein Liniensystem offenbar auch definieren als eine Mannigfaltigkeit von „Punkten“, die durch beliebig geformte Linien miteinander verbunden sind, so zwar, daß von jedem dieser „Punkte“ mindestens 3 Linien oder aber nur eine ausgehen und man von einem beliebigen dieser „Punkte“ durch die Linien des Systems zu jedem anderen „Punkte“ des Systems gelangen kann. Wir verstehen alsdann unter einer „Linie“ immer nur das Stück von einem „Punkte“ des Systems bis zum nächsten und bezeichnen einen „Punkt“, in dem $p \geqq 3$ Linien münden, als einen Knotenpunkt $(p-2)$-ter Ordnung und einen solchen, von dem nur eine Linie ausgeht, als einen Endpunkt. Besteht ein System nun aus e Endpunkten, k_3 Knotenpunkten erster Ordnung, k_4 solchen zweiter Ordnung, ... k_l von der $(l-2)$-ten Ordnung, so ist offenbar die Anzahl n der Linien des Systems gegeben durch die Formel:

(1)
$$n = \frac{e + \sum_{3}^{l} i k_i}{2},$$

während

(2)
$$m = e + \sum_{3}^{l} k_i$$

die Gesamtanzahl der „Punkte“ (End- und Knotenpunkte) angibt.

Aus der Formel (1) schließt man leicht, daß in jedem Liniensystem *die Anzahl der Endpunkte und der Knotenpunkte ungerader Ordnung zusammengenommen stets eine gerade Zahl sein muß.* — Man erkennt dies auch leicht durch folgenden Schluß, der freilich im Grunde von dem aus Formel (1) nicht verschieden ist: Das Liniensystem der n Linien können wir uns entstanden denken aus n einzelnen, völlig voneinander getrennten Linien; in diesem Anfangszustande besitzen die n Linien $2n$ „Punkte“, die sämtlich Endpunkte sind. Nun denken wir uns die Linien aneinandergeschoben und zwar so, daß schließlich unser „Liniensystem“ entsteht. Dabei gehen Endpunkte verloren und entstehen Knotenpunkte. Jedesmal, wenn ein Knotenpunkt von gerader Ordnung entsteht, geht eine gerade Anzahl End-

punkte verloren. Da die Zahl der Endpunkte nun anfänglich gerade ($= 2n$) war, so würde sie, wenn nur Knotenpunkte gerader Ordnung entstehen, auch gerade bleiben. Jedesmal aber, wenn ein ungerader Knotenpunkt entsteht, z. B. ein Knotenpunkt von 5 Linien, so verschwinden — so wollen wir sagen — zunächst 4 Endpunkte, allgemein also eine gerade Zahl von Endpunkten, und an die Stelle des 5. Endpunktes, der als solcher ja auch verschwindet, denken wir uns den neugebildeten Knotenpunkt gesetzt. Bei dieser Auffassung bleibt also die Zahl der Punkte, die anfänglich gerade war, auch jetzt gerade, und man sieht: Nimmt man die Anzahl der Endpunkte und der Knotenpunkte ungerader Ordnung zusammen, so ergibt sich stets eine gerade Zahl, w. z. b. w.

Für „geschlossene Systeme“, mit denen wir es in erster Linie hier zu tun haben, lauten die obigen Formeln:

$$n = \frac{1}{2} \sum_{3}^{l} {}_{i}\, i k_i \tag{1a}$$

$$m = \sum_{3}^{l} {}_{i}\, k_i . \tag{2a}$$

Sind die Ordnungszahlen der m Punkte des geschlossenen Systems bzw. $r_1, r_2 \ldots r_m$, wo dann natürlich unter diesen r gleiche Zahlen vorkommen können, so ist offenbar:

$$n = \sum_{1}^{m} {}_{p} \frac{(r_p + 2)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{m} {}_{p}\, r_p + m, \tag{1b}$$

eine Formel, die unter Umständen bequemer ist als die obige.

§ 2. Bäume.

Wenn es möglich ist, durch Fortnahme einer Linie ein Liniensystem so zu verändern, daß man nicht mehr von jedem Punkte des Systems zu jedem anderen gelangen kann, so sagen wir: „das System zerfällt durch Fortnahme der Linie“ und nennen diese Linie dann eine „Brücke“ des Systems. Wir erhalten durch Fortnahme einer solchen Brücke 2, aber auch nicht mehr ge-

trennte Teile, die, jeder für sich, wieder Liniensysteme sind; allgemein kann durch Fortnahme von a Linien ein Liniensystem höchstens in $a+1$ getrennte Teile zerfallen, die dann, jeder für sich, Liniensysteme sind. Wir wollen nun, beginnend in einem beliebigen Punkte des Systems, von den von diesem Punkte ausgehenden Linien so viele wie möglich entfernen, ohne daß das System zerfällt, d. h. also z. B, wenn von diesem Punkte keine Brücke ausgeht, alle Linien bis auf eine. Alsdann gehen wir längs der übrigbleibenden Linien zu den Nachbarpunkten und machen hier dasselbe usw. Schließlich wird das System den, wie wir sagen wollen, „baumförmigen Typus“[1]) angenommen haben,

1) Diese geometrischen Gebilde sind vor allem behandelt von Cayley, der sie „Trees“ nennt (Phil. Mag. XIII, 1857; XVIII, 1859; XLVII, 1874; British Association Report 1875; Amer Journ. of Mathem. IV, 1881; Johns Hopkins Univ. Circulars 1879—82 (1882); Quart. Journ of Math XXIII, 1889; vgl. auch Philosoph Transactions of the Royal Soc, vol 158, 1868, p. 75 ff), und zwar machte er den ersten Gebrauch hiervon (in der vorstehend genannten Arbeit von 1857) zu dem Zwecke, um den Algorithmus einer Reihe von Differentiationsprozessen geometrisch anschaulich zu gestalten. — Außer den Namen „Trees“ resp. „Bäume“, „Arbres“, sind hier noch die Bezeichnungen „arborescence“ und „ramification“ zu erwähnen; s. Sylvester, Educ Times Repr. 30, 1878 (1879), p. 81 und 40, 1883 (1884), p 25 (arborescence), sowie ibid 33, 1880, p 96 (Unterschied zwischen „ramification“ und „tree“ resp „arborescence“). — Von weiterer Literatur nenne ich: C. Jordan (Journ. f. Math. 70, 1869), Sylvester (Educ Times Repr. 30, 1878, p 52), S Tebay (Educ Times Repr 30, 1878, p. 81), C. de Polignac (Bull de la soc. mathém de France VIII, 1880 und IX, 1881), W J C Sharp (Educ Times Repr. 40, 1883, p 25), Lucas („Récréat math“, t I, 2ieme éd, p. 51), Mac Mahon (London Mathem. Soc Proc XXII, 1890/91), S Roberts (London Math Soc. Proc. 34, 1902, p 259). — Eine interessante Anwendung von den „Trees“ auf die Theorie der chemischen Konstitutionsformeln machte Cayley, s außer den oben zitierten Arbeiten auch Phil. Magaz (5) III, 1877, p. 34; vgl. a Sylvester und Tebay, l. c. (Educ. Times Repr. 30, 1878, p. 81—85). Man vergleiche weiter Delannoy, „Sur les arbres géométriques et leur emploi dans la théorie des combinaisons chimiques“ Assoc franç XXIII, Congrès de Caen 1894, t II (Paris 1895), p. 102—116 und „Sur le nombre d'isomères possibles dans une molécule carbonée.“ Bull de la soc. chimique de Paris (3) XI, p. 239—248 (Die „Berichte der deutschen chemischen Gesellsch.“ referieren über Cayleys

d. h. eine Form, bei der das System noch zusammenhängt, so daß man nach wie vor von einem Punkte des Systems zu jedem anderen gelangen kann, bei der es aber unmöglich ist, auch nur eine geschlossene, zum Ausgangspunkt zurückführende Bahn zu beschreiben. Es ist nun leicht ersichtlich, daß zwischen m Punkten höchstens $m-1$ Verbindungslinien existieren dürfen, ohne daß eine geschlossene Bahn besteht, daß aber in dem Falle eines „Baumes", wie wir fortan kurz sagen wollen, auch gerade diese Maximalzahl erreicht wird, mithin, um das ursprüngliche System in diese Form überzuführen, $n-m+1$ Linien desselben fortgenommen werden müssen, eine für das Liniensystem besonders charakteristische Konstante, die wir im folgenden immer mit μ bezeichnen wollen und die nach § 1 (1^b) zweckmäßig nach der Formel

$$\mu = \frac{1}{2}\sum_{1}^{m}{}_p r_p + 1$$

berechnet wird

Die Operation der Überführung eines beliebigen Liniensystems in den baumförmigen Typus kann natürlich auf sehr viele verschiedene Arten ausgeführt werden. Die Größe μ jedoch, die die Anzahl der hierfür zu entfernenden Linien angibt, ist für jedes System eine Invariante

Hiernach sagen wir:

Satz I: *Um ein Liniensystem von n Linien und m Punkten in den baumförmigen Typus überzuführen, mussen $\mu = n - m + 1$ Linien des Systems entfernt werden.*

Satz II: *Entfernt man aus einem System μ Linien, ohne daß dasselbe zerfällt, so wird es ein „Baum".*[1])

Arbeiten im Jahrg VIII, 1875, p. 1056 und über Delannoys im Jahrg XXVII, 1894, Bd. IV, p 725) Siehe auch Brunel, Mém. de la soc des sc. phys. et natur. de Bordeaux (4) 4 (1894), Procès-verbaux, p. XVIII—XX 5 (1895), Procès-verbaux, p. XXXIX—XL Vgl auch „Encyklopadie der mathem Wissensch" V 1, p. 387—390 (E Study, Anhang zu F W. Hinrichsen u. L. Mamlock, „Chemische Atomistik", 1905)

1) Siehe von dem Verf: „Über das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung." Math. Annal Bd. 49, 1897,

Wir schließen diese Entwickelungen nicht, ohne zuvor noch eine wichtige Beziehung herzuleiten. Die verschiedenen Linien eines geschlossenen Systems teilen das ganze, eine Ebene bzw. krumme Fläche bildende Gebiet des Liniensystems in eine Anzahl kleinster, nicht weiter zerteilter Gebietsteile. Die Anzahl dieser so von den Linien des Systems eingefaßten Gebietsteile nimmt offenbar durch Fortnahme je einer Linie immer um 1 ab und ist somit, da es beim „Baum" solche allseitig begrenzten Gebiete nicht mehr gibt, $= \mu$.

Satz III: *In einem Liniensystem von n Linien und m Punkten gibt es $\mu = n - m + 1$ von den Linien des Systems allseitig begrenzte und nicht weiter zerteilte Gebiete.*

§ 3 Polyeder.

Die über Liniensysteme hergeleiteten Sätze lassen leicht Anwendungen auf Polyeder zu, wenn wir uns das Polyeder durch ein geschlossenes Liniensystem ersetzt denken, so zwar, daß an die Stelle der Kanten des Polyeders Linien treten und demgemäß an die Stelle einer Polyederecke, in der k Kanten zusammenstoßen, ein Knotenpunkt $(k - 2)$-ter Ordnung, schließlich an die Stelle der Flächen des Polyeders die am Ende des vorigen § besprochenen kleinsten Gebiete, wobei dann allerdings eine der Polyederflächen durch das als eben angenommene Gebiet des

---

p. 315. Listing („Der Census räumlicher Komplexe" Gottinger Abhandl. 10, 1861/62, p. 130) bezeichnet die Konstante μ als „cyklomatische Ordnungszahl". Es sei hier noch nebenbei bemerkt, daß Untersuchungen, die mit den obigen verwandt sind, wenn auch in wesentlich anderer Darstellung und Terminologie und im Hinblick auf ein anderes Ziel, nämlich zwecks Anwendung auf Substitutionentheorie, von P. Hoyer angestellt sind („Über den Zusammenhang in Reihen . . ", Math Ann. 42; „Über Riemann'sche Flächen mit beschränkt veranderlichen Verzweigungspunkten", Math. Ann. 47; sowie besonders „Über Reihen, Liniengebilde und Substitutionen", Progr. d. Gymnas. z. Burg 1897). Ferner mag bei dieser Gelegenheit hingewiesen werden auf die umfangreichen Untersuchungen über die Topologie Riemannscher Flächen von Riemann, J. Lüroth, A. Clebsch, H. Durège, F. Lippich, W. K Clifford, E. Bertini, J H. Graf, H. Kasten, A. Hurwitz u. a.

ganzen Systems dargestellt gedacht werden muß. Bezeichnen wir die Anzahlen der Flächen, Ecken, Kanten des Polyeders bzw. mit F, E, K, so entsprechen offenbar die Größen $F-1$, E, K den Größen μ, m, n in Satz III (§ 2), d. h. es ist

$$(F-1) = K - E + 1 \quad \text{oder} \quad F + E = K + 2.$$

Es ist dies der bekannte Eulersche Satz:

Satz IV: *In jedem konvexen Polyeder ist die Anzahl der Flächen und Ecken zusammen um 2 größer als die der Kanten.*[1])

---

1) L. Euler, „Elementa doctrinae solidorum". Novi comment. Petropol. IV (ad annum 1752/53) 1758, p. 119. Wie R. Baltzer („Zur Geschichte des Euler'schen Satzes von den Polyëdern." Monatsbër. d. Berl. Akad 1861, p. 1043—1046) bemerkt hat, stammt dies Theorem jedoch schon von Descartes (s. „Oeuvres inédites", herausgeg. v. Foucher de Careil, Paris 1860, t. II, p. 214). Zahlreiche, aber nicht immer wesentlich verschiedene Beweise sind für diesen Satz gegeben worden, u. a. von Legendre, „Éléments de géométrie", 2ième éd., Jahr VIII (der Revolution), p. 252/253 (Livre VII, Propos. XXV); J. Steiner, Crelles Journal I, 1826, p. 364—367; J. A Grunert, Crelles Journal II, 1827, p. 367; Gergonne, Annales de mathém XIX, 1828/29, p. 333—338; A. Langer, Progr Staatsgymn. Leitmeritz 1872/73; Kirkman u. Booth, Educ. Times Reprints XX, 1873, p 26—28; H. Schubert, Archiv der Math u. Phys. Bd. 63, 1879, p 93—100; M. Dehn, Math. Ann. 61, 1905, p 561—576 (für 3, 4 u. 5 Dimens); E. Sós, Unterrichtsbl. f. Mathem. u Naturw. 15, 1909, p 110—111 etc. etc Mit Erweiterungen des Eulerschen Satzes und der Feststellung seines Gültigkeitsbereiches beschäftigen sich S L'huilier, Annales de math (Gergonne), III, 1812/13, p 169—189; Cauchy, Journ. de l'éc polytechn 1813, p. 76; Gergonne, Annales de mathém. IX, 1818/19, p. 321—345; J F Chr. Hessel, Crelles Journal VIII, 1832, p. 13—20; B Listing, Göttinger Abhandl 1861—1862; Cayley, Phil Magaz. (4) 21, 1861, p. 424 und Messenger of Mathem. 2, 1873; W Godt, Progr. Lübeck 1881; H Durège, „Elem. d Theorie d Funkt" (3. Aufl, Leipzig 1882), p. 226—229; G Halsted, Annals of Mathematics I. 1885, p. 138—139, vgl a. Mathesis VI, 1886, p 121; R. Perrin, Comptes rendus (Paris), t. 110, 1890, p 273—275; V Eberhard, Math Ann. Bd. 36, 1890, p 121—133; Poincaré (Ausdehnung auf n Dimensionen), Journ. de l'éc. polytechn. (2) I, 1895, p. 1—123 etc. Weitere ausführliche Angaben über die Literatur des Eulerschen Satzes findet man bei Max Brückner, „Vielecke und Vielflache" (Leipzig 1900), p. 58—66; s. a Encyklop. der math. Wissensch. III. 1, p. 199, Fußn. 99 (M. Dehn und P. Heegaard). Topologische Betrachtungen über Gebilde der physischen Geographie unter Benutzung

Es sei nun f_i die Anzahl derjenigen Seitenflächen des Polyeders, die i-Ecke sind, und e_i die Anzahl seiner i-kantigen Ecken, so daß also

$$F = \sum_3^i f_i$$

(1)

$$E = \sum_3^i e_i \text{ und}$$

(2)
$$2K = \sum_3^i i \cdot f_i = \sum_3^i i \cdot e_i$$

oder, in anderer Form geschrieben:

$$2K = f_3 + f_5 + f_7 + \cdot \quad + 2(f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 3f_6 + 3f_7 + \cdot\cdot)$$
$$= e_3 + e_5 + e_7 + \cdot \quad + 2(e_3 + 2e_4 + 2e_5 + 3e_6 + 3e_7 + \cdot\cdot)$$

ist. Hieraus ergibt sich das — im wesentlichen schon oben, im Abschnitt der „Liniensysteme", in entsprechender Einkleidung erhaltene — Resultat:

Satz V: *Die Ecken, von denen eine ungerade Anzahl von Kanten ausgeht, sind stets in gerader Anzahl an einem Polyeder vertreten. Die Anzahl der Seitenflächen von ungerader Seitenzahl ist stets eine gerade.*

Wir wenden uns jetzt speziell zu denjenigen Polyedern, die seit jeher das größte Interesse erweckt haben, den regulären; sie werden begrenzt von lauter unter sich kongruenten regulären Polygonen, und auch ihre sämtlichen Ecken sind regulär und lassen sich untereinander zur Deckung bringen. Indem wir von der oben (S. 177) abgeleiteten Eulerschen Relation

$$F + E = K + 2$$

Gebrauch machen, gelingt es uns leicht, die verschiedenen Typen regulärer Polyeder aufzufinden Stoßen in jeder der kongruenten

---

des Euler-Listingschen Satzes haben angestellt Cayley („On Contour and Slope Lines." Philosophical Magaz. (4) XVIII, 1859, p. 264—268 = Collect. Pap. IV, p 108—111) und Clerk Maxwell („On Hills and Dales." Philosoph. Magaz (4), vol. XL, 1870, p. 421—427 = Scientific papers, Cambridge 1890, II, p 233—240), um Relationen zwischen den Anzahlen der Berge, Täler, Pässe etc eines Kontinents oder einer Insel zu gewinnen.

Ecken a Kanten zusammen und ist jede Fläche ein b-Eck, so ist offenbar

$$aE = bF = 2K,$$

also nach der Eulerschen Relation

$$2K\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = K + 2$$

$$K\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}-1\right) = 2.$$

Aus dieser Gleichung[1]) folgt, daß a und b jedenfalls nicht beide $\geqq 4$ sind, und, da sie andererseits ihrer Bedeutung nach auch nicht < 3 sein können, so muß wenigstens eins von ihnen $= 3$ sein. Ist aber das eine $= 3$, so muß das andere < 6 sein, weil ja $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} > \frac{1}{2}$ sein muß.

Wir haben hiernach nur folgende verschiedene Fälle:

1)	$a = 3$,	$b = 3$:	$K = 6$,	$E = 4$,	$F = 4$:	Tetraeder
2ᵃ)	$a = 3$,	$b = 4$:	$K = 12$,	$E = 8$,	$F = 6$:	Hexaeder
2ᵇ)	$a = 4$,	$b = 3$:	$K = 12$,	$E = 6$,	$F = 8$:	Oktaeder
3ᵃ)	$a = 3$,	$b = 5$:	$K = 30$,	$E = 20$,	$F = 12$:	Dodekaeder
3ᵇ)	$a = 5$,	$b = 3$:	$K = 30$,	$E = 12$,	$F = 20$:	Ikosaeder.

Bezüglich der Diagramme, durch die wir uns diese 5 Körper veranschaulichen können, verweisen wir

für das Tetraeder auf Fig. 8, Kap XVII (S 208),
„ „ Hexaeder „ „ 9, „ XVII (S 209),
„ „ Oktaeder „ „ 10, „ XVII (S. 210),
„ „ Dodekaeder „ „ 2, „ XVII (S. 198)
(vgl. dazu auch den Text von S. 197)
bzw auf Fig. 7, Kap. XVIII (S. 221),
für das Ikosaeder „ „ 8, „ XVIII (S. 222)

1) Zu dieser unbestimmten — „Diophantischen“, wie man fälschlich zu sagen pflegt, — Gleichung vgl. in Bd I: Kap V, S. 127.

§ 4. Geschlossene Kreise.

Geht man von einem „Punkte“ eines Liniensystems aus und kehrt, nachdem man mehrere andere Punkte des Systems, jeden jedoch nur einmal, passiert hat, wieder zu dem Ausgangspunkt zurück, so heiße der so beschriebene Weg ein „geschlossener Kreis.“

Soll ein solcher geschlossener Kreis, wie dies z. B. für den Fall eines speziellen Liniensystems im nächsten Kapitel (Hamiltonsches Dodekaederspiel) gefordert werden wird, der Reihe nach durch alle „Punkte“ des Systems, und zwar durch jeden einmal, hindurchführen, so dürfen zunächst natürlich unter den „Punkten“ keine Endpunkte sich befinden, das System muß also, wie wir oben sagten (S. 171/172), „geschlossen“ sein. Aber auch in einem geschlossenen System braucht natürlich keineswegs stets ein durch alle Knotenpunkte gerade einmal hindurchgehender geschlossener Kreis zu existieren, wie denn z. B., um nur eins anzuführen, das Vorhandensein einer „Brücke“ einen solchen Kreis natürlich sofort unmöglich macht.

Doch nicht von einem solchen alle Knotenpunkte eines Liniensystems gerade einmal passierenden Wege soll hier die Rede sein, sondern wir wollen hier die dualistisch entsprechende Frage aufwerfen, nämlich die nach **einer geschlossenen, alle Linien des Systems gerade je einmal umfassenden Bahn mit beliebig wiederholten Durchgängen durch die „Punkte“**. Man erkennt bald, daß eine solche Bahn stets dann und nur dann existiert[1]), wenn alle Knotenpunkte des Systems von gerader Ordnung sind und Endpunkte fehlen.

Um dies einzusehen, nehmen wir ein System mit „Punkten“ von ausschließlich geraden Ordnungszahlen an, gehen von einem beliebigen dieser Punkte aus und schreiten längs einer Linie fort bis zu einem zweiten Punkte, verlassen diesen wieder auf einer

1) Bei Gelegenheit des Dominospiels (Kap. XX, §§ 4 u 5) werden wir übrigens ein Abzählverfahren zur Ermittelung der Anzahl der untereinander verschiedenen geschlossenen Bahnen dieser Art kennen lernen.

seiner Linien usf., wobei wir uns jede bereits passierte Linie sogleich entfernt denken. Dadurch verliert dann ein Punkt jedesmal, wenn er passiert wird, 2 seiner Linien. Da nun alle Punkte von gerader Ordnung sein sollten, so besitzen mithin alle Punkte immer eine gerade Anzahl resp. 0 Linien; ausgenommen allein ist der Ausgangspunkt, der eine ungerade Anzahl von Linien besitzt. Wir müssen daher notwendig zu dem Ausgangspunkte schließlich zurückkommen, da jeder andere Punkt, zu dem wir gelangen, uns auch die Möglichkeit bietet, ihn wieder zu verlassen. So bekommen wir zunächst jedenfalls eine geschlossene Bahn und behalten dann im allgemeinen noch eine Anzahl von Linien übrig, die noch nicht durchlaufen sind; diese bilden dann ein oder mehrere Liniensysteme, jedoch mit Punkten von ausschließlich geraden Ordnungszahlen. Da ursprünglich das ganze System zusammenhing, so muß in jedem der übrigbleibenden getrennten Teile mindestens ein Punkt vorkommen, der bereits auf unserer Bahn passiert wurde. Es sei A ein solcher Punkt. Zu ihm mögen wir auf unserer ersten Wanderung längs der Linie a_1 gekommen sein und ihn längs a_2 wieder verlassen haben; wir gehen nun jetzt in dem übriggebliebenen System von dem Punkt A auf einer seiner übriggebliebenen Linien aus und beschreiben wieder irgendeine geschlossene, zu A zurückkehrende Bahn, was natürlich wegen der geraden Ordnung aller Punkte stets möglich sein muß. Diese zweite geschlossene Bahn denken wir uns in die erste eingefügt, indem wir die erste zunächst in unveränderter Weise durchwandern, bis wir längs der Linie a_1 den Punkt A erreichen, worauf wir diesen aber nicht, wie zuvor, auf a_2 verlassen, sondern jetzt erst jene zweite geschlossene Bahn durchlaufen, die uns ja zu A zurückführt, und dann erst von A aus in die Linie a_2 einbiegen, um nun den Rest der ersten Bahn zu beschreiben und zum Ausgangspunkt zurückzukehren. In derselben Weise fahren wir dann fort, und so gelingt es offenbar, alle etwa noch undurchlaufenen Linien des Systems sukzessive einzufügen.

Besitzt unser System dagegen Punkte ungerader Ordnung, so sind es nach § 1 (S. 172) deren mindestens 2. Nehmen wir also

deren 2 an und gehen wir von einem derselben aus, so müssen wir schließlich offenbar zu dem anderen als dem einzigen Punkt, der noch von ungerader Ordnung ist, hinkommen. Haben wir damit noch nicht alle Linien des Systems durchlaufen, so enthält der Rest jedenfalls nur noch Punkte gerader Ordnung, da die beiden Punkte ungerader Ordnung eine ungerade Anzahl, alle anderen aber eine gerade Anzahl von Linien verloren haben. Wir können also den Rest wieder in lauter geschlossene Bahnen zerlegen und diese dann der ersten ungeschlossenen Bahn passend angliedern, so daß wir auch jetzt noch einen alle Linien des Systems gerade einmal umfassenden Linienzug erhalten, der zwar nicht mehr geschlossen ist, sondern in dem einen ungeraden Punkte seinen Anfang und in dem anderen sein Ende nimmt. — Haben wir allgemein $2s$ Punkte ungerader Ordnung (die Anzahl ist ja nach S. 172 stets gerade), so lassen sich offenbar alle Linien des Systems nur in s voneinander getrennten und ungeschlossenen Linienzügen durchlaufen. — Stellt man sich dagegen die Aufgabe, alle Linien des Systems je zweimal zu durchwandern, so sind stets alle Punkte als von gerader Ordnung anzusehen, und die Durchwanderung ist dann immer in einem geschlossenen Zuge möglich.

Wir fassen unsere Resultate folgendermaßen zusammen:

In einem geschlossenen Liniensystem mit Knotenpunkten von ausschließlich geraden Ordnungszahlen laßt sich stets eine geschlossene Bahn so angeben, daß jede Linie des Systems gerade einmal passiert wird; enthält ein System neben beliebig vielen Knotenpunkten gerader Ordnung zwei und nur zwei Punkte ungerader Ordnung (Knotenpunkte oder Endpunkte), so lassen sich auch jetzt noch alle Linien zu einem zusammenhängenden, wenn auch nicht mehr geschlossenen Linienzug verbinden[1]*; bei $2s$ Punkten ungerader Ordnung lassen sich stets s getrennte Linienzüge so angeben, daß jede Linie des Systems insgesamt gerade einmal durchlaufen*

1) Euler, „Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis". Commentarii Academiae Petropolitanae VIII, 1736 (1741), p 128 bis 140

wird.[1]) — ***Bei je zweimaliger Durchwanderung aller Linien ist stets eine geschlossene, alle Linien des Sytems umfassende Bahn möglich.***

§ 5. Das Eulersche Brückenproblem.

Le curieux qui, après avoir remarqué à Koenigsberg les sept ponts établis entre les deux branches de la rivière Pregel et l'île Kneiphof, demandait s'il était possible de les traverser successivement sans revenir deux fois sur le même; celui qui voulait savoir comment doit se mouvoir le cavalier pour parcourir les soixante-quatre cases de l'échiquier, sans revenir deux fois sur la même case, entraient dans cette geométrie de situation, déjà entrevue par Leibnitz, et qui ne fait jamais usage des grandeurs des quantités.

Arago, Oeuvres II, p. 22/23.

Von der Geometria situs, die Leibnitz ahnte, und in die nur einem Paar Geometern (Euler und Vandermonde) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts

Gauss, Werke V, p. 605.

Der Pregel bildet bei Königsberg durch Gabelung eine Insel, die „Kneiphof" heißt (A in Fig. 1). Über den Fluss führen an dieser Stelle im ganzen 7 (in der Fig. 1 mit ihren Namen be-

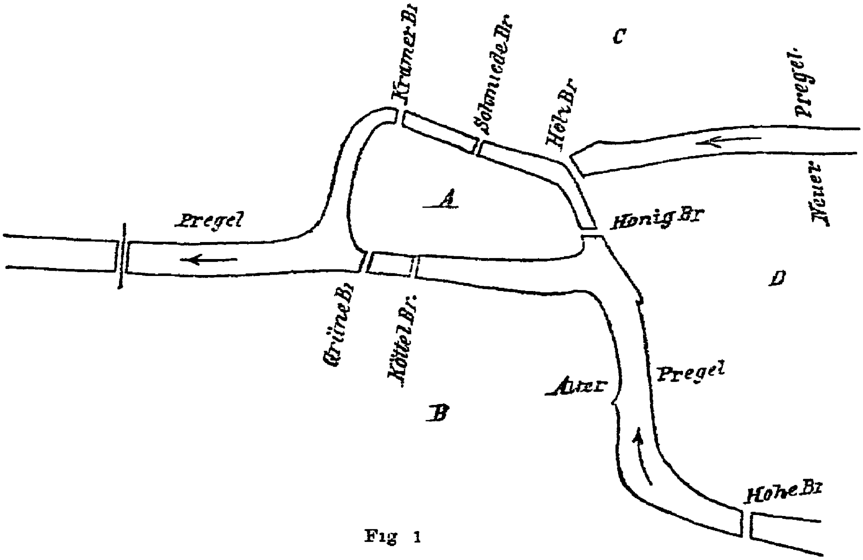


Fig 1

1) Siehe B. Listing, l c (Göttinger Studien 1847, 1 Abt), p 867/8 und C. Hierholzer, Math. Ann VI, 1873, p 30—32; vgl a Th Clausen, Astron. Nachr. XXI, 1844, No 494, col. 216, sowie J. Cook Wilson, „On the Traversing of Geometrical Figures" (Oxford 1905).

zeichnete) **Brücken**, davon 5 auf die Insel selbst. In den dreißiger Jahren des achtzehnten Jahrhunderts wurde nun die Frage aufgeworfen, ob es möglich sei, **die 7 Brücken hintereinander, jede aber nur einmal, zu passieren.** Diese Fragestellung wurde für Euler, der davon hörte, die Veranlassung zu den hier bereits am Ende des vorigen § zitierten allgemeineren Betrachtungen, die er der Petersburger Akademie im Jahre 1735 vorlegte und die wir jetzt als die ersten Anfänge einer Analysis situs ansehen dürfen.

Was zunächst die spezielle Königsberger Aufgabe betrifft, so sieht man leicht, daß diese nicht lösbar ist. Ersetzen wir nämlich die Gebiete A, B, C, D durch Punkte und die Brücken durch Linien, so erhalten wir das Diagramm der Fig. 2. Da 5 Linien von A ausgehen und von B, C und D je 3, so sind alle 4 „Punkte" von ungerader Ordnung, und wir wissen aus dem vorigen §, daß alsdann für die Durchlaufung der 7 Linien mindestens 2 Linienzüge erforderlich sind. Besteht dagegen auch noch eine Verbindung zwischen B und C, wie solche in neuerer Zeit tatsächlich durch eine in der Fig. 1 links (ohne Namen) verzeichnete Eisenbahnbrücke hergestellt ist, so lassen sich diese 8 Brücken in einem zusammenhängenden Zuge passieren. Es sind alsdann nämlich die Punkte B und C (s. Fig. 3) mit je 4 Linien von gerader und nur A und D mit 5 resp. 3 Linien von ungerader Ordnung und letztere daher Anfangs- und Endpunkt des Linienzuges. Ein solcher Linienzug ist z. B. der durch die Fig. 3 angegebene, wo die beigesetzten Ziffern aussagen, in welcher Reihenfolge die Linien zu durchlaufen sind.[1] [2]

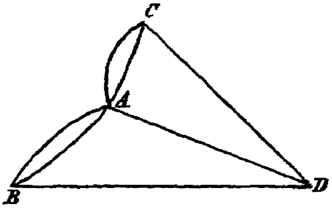


Fig. 2

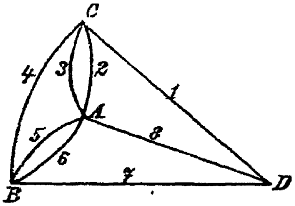


Fig. 3

1) Dieselben Dienste wie jene Eisenbahnbrücke (Linie 4 der Fig. 3) würde für unsere Aufgabe auch eine noch neuere Brücke, die „Kaiserbrücke", leisten, durch die heute die Gebiete B und D noch — etwa

Um noch einige weitere Beispiele anzuführen, so erkennt man sofort, daß die Seiten und Diagonalen eines Quadrats sich nicht in einem, sondern erst in 2 Zügen durchlaufen lassen, weil wir (s. Fig. 4) hier 5 Punkte haben, von denen 4 je 3 Linien aussenden, also von ungerader Ordnung sind. Dagegen läßt sich ein 5-Eck mit allen seinen Diagonalen in einem Zuge durchlaufen, weil alle Punkte von gerader Ordnung sind (s. Fig. 5); diese Bahn ist sogar eine in sich geschlossene, da hier, wie gesagt, keinerlei Punkte ungerader Ordnung vorkommen. Eine solche geschlossene Bahn ist z. B.:

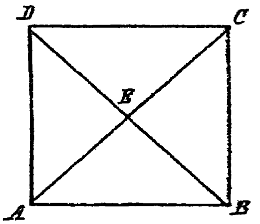


Fig. 4.

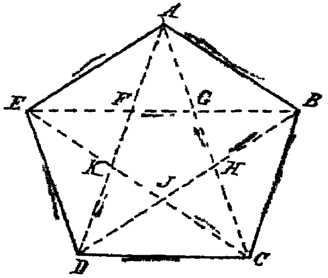


Fig 5.

$$A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,B\,H\,J\,D\,K\,F\,A\,G\,H\,C\,J\,K\,E\,A.$$

Ebenso, wie für das 5-Eck mit allen seinen Diagonalen, existiert eine solche geschlossene, alle Linien umfassende Bahn auch für die entsprechende Figur des 7-Ecks, da von allen 7 Ecken

---

in der Gegend, wo in unserer Fig. 1 der Name „Alter Pregel" steht — verbunden sind. Die Endpunkte des Linienzuges wären alsdann offenbar A und C — Auch bei Berucksichtigung von allen, nunmehr 9 Brucken ist das Problem lösbar, und zwar mit A und B als Anfangs- und Endpunkt der Wanderung

2) Ein anderes Beispiel bieten die zahlreichen Seinebrucken in Paris, etwa vom Pont d'Austerlitz bis zum Pont des Arts, also auf der Strecke, auf der die verschiedenen Flußarme die Inseln Ile Saint-Louis und Ile de la Cité bilden; beide Inseln sind unter sich durch eine Brucke und zudem mit jedem der beiden Seineufer durch eine Reihe von Brücken verbunden. Außerhalb der genannten Strecke, weiter stromabwärts, liegt dann im Pariser Stadtgebiet noch eine dritte Seineinsel die Ile des Cygnes, die gleichfalls mit beiden Ufern durch Brücken in Verbindung steht. Es ergeben sich somit hier mehrere dem Königsberger Problem analoge Aufgaben, die jedoch gegenüber jenem etwas prinzipiell Neues nicht bieten und daher hier nicht weiter erörtert werden mögen.

des 7-Ecks je 6 Linien ausgehen; ferner für die analoge Figur des 9-Ecks usw., dagegen nicht für die entsprechenden Figuren des 6-Ecks, 8-Ecks usw. (vgl. dazu auch Kap. XX, S. 268/269, 272 und 264). Die geschlossenen Bahnen selbst sind, nachdem wir für einen Fall, den der Fig. 5, eine solche angegeben haben, leicht zu bilden; denn angenommen eine solche Bahn ist für ein $(2n-1)$-Eck mit all seinen Diagonalen bereits angegeben, so ergibt sich daraus sofort die entsprechende Bahn für das $(2n+1)$-Eck, das durch Hinzutreten zweier neuer Eckpunkte — nennen wir sie A und B — aus dem ersteren entsteht. Sind nämlich 1, 2, 3, ... $2n-1$ die Ecken des $(2n-1)$-Ecks und durchlaufen wir diese Figur mit all ihren Diagonalen auf einer Bahn, die bei 1 beginnt, und, weil „geschlossen", auch zu 1 zurückführt, so brauchen wir an diese Wanderung nur die folgende anzuschließen:

$$1\,A\,2\,B\,3\,A\,4\,B\,5\,A\,6\,\ldots\,A\,(2n-2)\,B\,(2n-1)\,A\,B\,1.$$

Damit sind dann auch von der Figur des $(2n+1)$-Ecks alle Seiten und Diagonalen durchwandert, und zwar ist auch diese Bahn, wie man sieht, geschlossen.

Könnte eine Spinne in dem durch Fig. 6 dargestellten Stück Mauerwerk sämtliche Fugen in einem Zuge, jede gerade einmal, durchwandern? Die Antwort lautet offenbar „nein", weil alle Knotenpunkte von ungerader Ordnung sind. — Ebenso läßt sich auch das Gitter eines Schachbretts (Randlinien der 64 Felder; s. in Bd I: Fig. 1, S. 172) nicht in einem zusammenhängenden Zuge durchwandern, sondern erfordert, da es neben den inneren Knotenpunkten, die sämtlich von gerader Ordnung sind, 28 äußere Knotenpunkte ungerader Ordnung aufweist, mindestens 14 ungeschlossene Linienzüge. — Dagegen läßt sich die geforderte Wanderung für das Liniensystem der Figur 7, das nur 2 Punkte

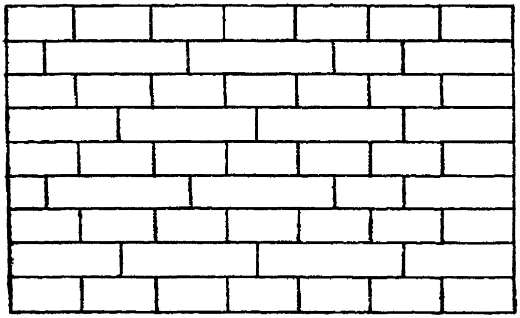


Fig 6

ungerader Ordnung, nämlich *A* und *O*, enthält, ausführen.[1]) Bei der praktischen Ausführung einer solchen Durchlaufung hat man nur darauf zu achten, daß, wenn man sich die bereits durchlaufenen Linien fortgenommen denkt, die nächste Linie niemals so gewählt wird, daß durch ihre Fortnahme eine Zerfällung des Systems eintritt, vielmehr zuvor alle anderen von dem betreffenden Punkt ausgehenden Linien durchlaufen werden.

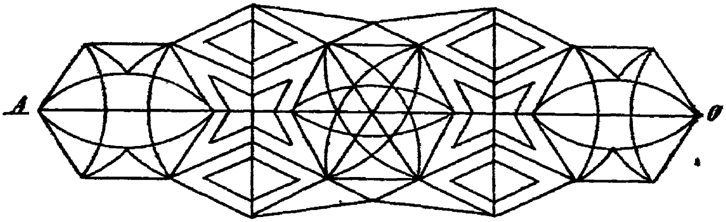


Fig. 7

Bei der oben angegebenen Durchlaufung der Fig. 5 durchwanderten wir zunächst 4 der Fünfecksseiten, darauf alle gestrichelt gezeichneten inneren Linien und zum Schluß die letzte Fünfecksseite. Diese gestrichelten Linien für sich bilden eine allgemeinbekannte Figur, die in der Geschichte des Aberglaubens, als Talisman zur Abwendung von allerlei Unheil, eine bedeutsame Rolle gespielt hat und die man wohl in die Wiegen der Kinder einschnitt, in das frischgebackene Brot einkritzelte oder an die Türen der Viehställe zeichnete: es ist das „Pentagramma“ der Pythagoräer, das „Pentalpha“ der Kabbalisten, in Deutschland „Drudenfuß“ (Druidenschuh) oder „Alpfuß“, bei den Mohammedanern „Siegel Salomos“[2]), in Indien „Swastika“ genannt. Die Figur, die wir als Fig. 8 nochmals für sich allein angeben, entsteht, indem man die Ecken eines 5-Ecks, allerdings nicht in der gewöhnlichen Reihenfolge, sondern jeweils mit Überspringung einer Ecke, verbindet, ist also, da die Figur bei diesem Verfahren wegen der Ungeradzahligkeit von 5 erst nach Durch-

1) Die Figur ist entnommen Listings schon mehrfach zitierten „Vorstudien zur Topologie“, Göttinger Studien 1847, Abt. I, p 870 (Fig. 19).

2) „Salomonis Schlüssel“ heißt es bekanntlich auch im „Faust“ neben „Drudenfuß“ und „Pentagramma“

wanderung aller 5 Ecken sich wieder schließen kann, jedenfalls in einem Zuge zu durchlaufen, wie wir ja auch schon oben sahen. — In der Terminologie unserer Liniensysteme gesprochen, sind nur die inneren, in Fig. 8 mit großen Buchstaben bezeichneten Punkte als „Punkte“ (von gerader Ordnung) anzusehen, während die durch kleine Buchstaben bezeichneten in diesem Sinne überhaupt keine „Punkte“ sind (dasselbe gilt übrigens in dem oben

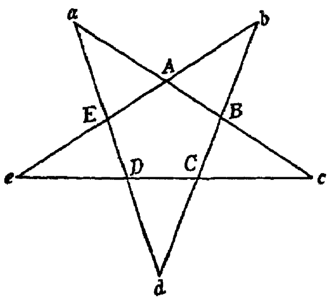


Fig 8

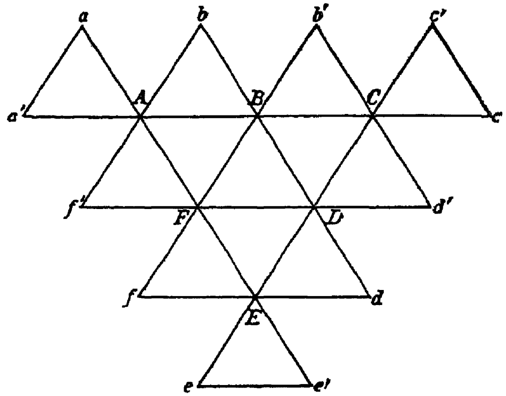


Fig 9

betrachteten Beispiele des Schachbretts von dessen 4 Eckpunkten, die daher dort auch gar nicht berücksichtigt wurden). — Auch in der Fig. 9, die, mit der Forderung der Durchlaufung in einem Zuge, in Dänemark als volkstümlich verbreitetes Rätsel vorkommt[1]), sind die von uns mit kleinen Buchstaben bezeichneten Punkte keine „Punkte“ in unserem Sinne, sondern nur die Punkte der großen Buchstaben sind als solche anzusehen. Da sie sämtlich von gerader Ordnung sind, so muß die Durchlaufung der Figur in einem Zuge möglich sein, und in der Tat ergibt sich leicht die folgende Durchwanderung:

$$A\,B\,C\,c\,c'\,C\,D\,E\,e\,e'\,E\,F\,A\,a\,a'\,A\,b\,B\,D\,d\,E\,f\,F\,B\,b'\,C\,d'\,D\,F\,f'\,A.$$

Wir haben in dieser Figur nicht nur, wie übrigens auch in Fig. 8

1) Siehe Jens Kamp, „Danske Folkeminder, Æventyr, Folkesagn, Gaader, Rim og Folketro, samlede fra Folkemunde“ (Odense 1877), p. 323 (ebendort, p 323—325, noch verschiedene andere Aufgaben oder Volksrätsel dieser Art).

und in Fig. 7, die Verbindung zweier Punkte, z. B. A und B, durch je zwei einfache Linien (die eine ist AbB), sondern wir haben auch „Schleifen", d. h. Linien, die von einem Knotenpunkte ausgehen und zu diesem selben zurückkehren, ohne einen anderen Knotenpunkt berührt zu haben (z. B.: $Aaa'A$).

Zum Schluß werfen wir noch folgende Frage auf: „Für welche der regulären Polyeder lassen sich in einem Zuge alle Kanten, jede gerade einmal, hintereinander durchwandern?" Zu dem Ende betrachten wir die oben, S. 179, gegebene Tabelle der regulären Polyeder (Zahlwerte von a) oder aber die in Kap. XVII, Fig. 2, 8, 9, 10 und Kap. XVIII, Fig. 8 gegebenen Diagramme und sehen ohne weiteres, daß für Tetraeder, Hexaeder, Dodekaeder und Ikosaeder alle Punkte von ungerader Ordnung sind, so daß daher für sie bzw. mindestens 2, 4, 10, 6 Linienzüge erforderlich sind, während für das Oktaeder, in dessen Ecken ja je 4 Kanten zusammenlaufen, die Aufgabe lösbar ist. Da nun Oktaeder und Hexaeder dualistisch verwandt sind, insofern die Ecken des einen den Flächen des anderen und vice versa entsprechen, so folgt sogleich, daß für das Hexaeder die dualistisch entsprechende Aufgabe lösbar sein muß, nämlich: Über die Flächen des Körpers hin, und zwar bei beliebig oft wiederholter Durchwanderung der einzelnen Fläche, eine solche Bahn zu beschreiben, daß dabei jede Kante gerade einmal überschritten wird. Für das Oktaeder wiederum ist diese Aufgabe natürlich nicht lösbar, ebensowenig für die anderen 3 Körper, vielmehr sind hierfür am Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder bzw mindestens 2, 4, 6, 10 Linienzüge erforderlich.

§ 6. Labyrinthe.

Man kennt die sagenhaften Erzählungen von den Labyrinthen des Altertums[1]), wie dem des Minos auf Kreta oder dem zu den sieben Weltwundern gerechneten ägyptischen Labyrinth, jenen gewaltigen Bauwerken, in die man wohl leicht eintrat, in denen man aber bei den zahllosen Kammern und Gängen sich

1) Eine Aufzählung der als „Labyrinthe" bezeichneten Bauwerke des Altertums findet sich beim älteren Plinius, Historia naturalis XXXVI, 13.

ebenso leicht verirrte und aus denen man bei den wenigen Ausgängen nur schwer wieder hinaus fand. Auch in Gartenanlagen sind oft solche Labyrinthe geschaffen, wie z. B. der Pariser Jardin des Plantes bekanntlich eins besitzt, und schließlich sprechen wir ja schon bei einem komplizierteren Straßen- oder Eisenbahnnetz nicht ohne Grund von einem „Labyrinth“.[1]) Da erhebt sich nun die Frage nach **einer beim Durchwandern zu beobachtenden einfachen Regel, die ein Verirren unter allen Umständen zu verhindern und somit den Ariadnefaden zu er-**

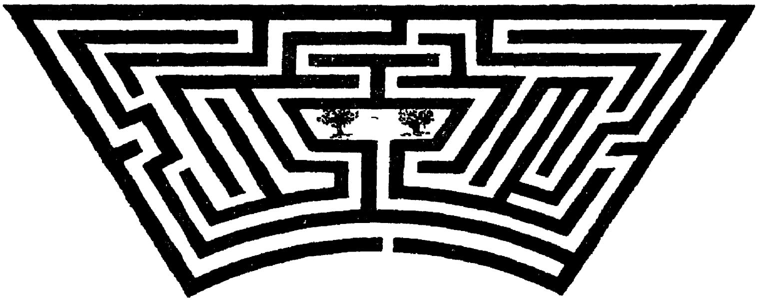


Fig. 10.

setzen geeignet wäre. Fig. 10 gibt uns zunächst ein Beispiel eines solchen Labyrinths: das aus dem Garten des Palastes von Hampton Court in der Nähe von London[2]), das unter der Regierung Wilhelms III. (1689—1702) angelegt wurde; dabei bedeuten die schwarz gezeichneten Teile Hecken aus Buchen, Eiben usw., während die weißen Teile Alleen sind Das von diesem Labyrinth eingenommene Areal mißt mehr als $^1/_4$ Acre, also etwa 11 Ar. In der Mitte des Labyrinths befindet sich ein Ruheplatz mit zwei Sitzen unter den in der Figur angegebenen Bäumen. Als Schlüssel, um diesen Platz sicher zu erreichen, gibt unsere in Anm. 2 genannte Quelle an: man durchwandere die Alleen so, daß man mit der rechten Hand von Anfang an beständig an

1) Es sei hier übrigens auch der verschiedenen Irrgarten-Spiele gedacht, z B. Deutsche Reichspatente Nr. 60253 und 93441 (Patentkl 77, beide gelöscht)

2) Siehe Encyclopaedia Britannica (9 Ausg.) XIV, p. 181 (Thomas Moore).

der Hecke vorbeistreift. Statt der rechten Hand könnte, wie man leicht erkennt, auch ebensogut die linke gewählt werden, und weiter reicht die Befolgung dieser Regel auch aus, um über den Ruheplatz hinweg direkt wieder zum Ausgang zurückzukommen. In dem letzteren Falle streift man dann im Laufe der Wanderung an jedem Teil der Heckenanlagen, und zwar an jeder der beiden Seiten einer Hecke, gerade je einmal vorbei, außer an einer im Innern gelegenen kleineren Heckenanlage, die mit den übrigen Hecken gar nicht zusammenhängt und deren Hecken auf unserer Wanderung überhaupt nicht „gestreift" werden. Denken wir uns diese besondere Heckenanlage fort, wodurch gewisse jetzt getrennte Alleen zu einer vereinigt werden würden, so würde bei Befolgung der obigen Vorschrift jetzt jede Allee gerade zweimal, und zwar in verschiedenen Richtungen, durchwandert werden.

Die hiermit schon angedeutete Regel, um unter allen Umständen zum Ausgang zurück zu gelangen, dürfte in allgemeiner Fassung zuerst von Chr. Wiener[1]) ausgesprochen sein, dessen Vorschrift folgendermaßen lautet: *Beim Eintritt in das Labyrinth wähle man einen der beiden Ränder des Eintrittsweges aus und verfolge fortgesetzt diese Randlinie; man muß dann notwendig nach außen gelangen.* — Man sieht, daß alsdann in jedem Knotenpunkte die Fortschreitungsrichtung eindeutig bestimmt ist; ferner, daß man zu jedem Punkt immer nur auf einem Wege gelangen kann, wobei freilich zwei an demselben Wege an gegenüberliegenden Rändern gelegene Punkte als wesentlich verschieden gelten müssen. Ein schon einmal passierter Punkt kann daher nie wieder erreicht werden, bevor nicht der Ausgangspunkt der Wanderung wieder erreicht ist. Man kommt also zum Eingang des Labyrinths zurück oder gelangt zu einem von dessen etwaigen sonstigen Ausgängen; will man gerade zu dem Eintrittspunkt zurück, so braucht man sich ja nur alle anderen Ausgänge verschlossen zu denken und sie unter Beobachtung der allgemeinen Regel zu passieren; dann muß man schließlich zu dem gewünschten Punkt kommen.

1) Chr. Wiener, „Über eine Aufgabe aus der Geometria situs". Math Annal. Bd. VI, 1873, p 29 u. 30.

§ 7. Durchwanderung aller Wege eines Labyrinths.

Das Verfahren Wieners dient nur dazu, unter allen Umständen wieder aus einem Labyrinth herauszuführen, führt dabei den Wanderer aber, wie schon im vorigen § bei dem Beispiel der Fig. 10 gezeigt wurde, keineswegs mit Notwendigkeit durch alle Gänge des Labyrinths hindurch. Wie aber, wenn dies gerade die mit der Wanderung verbundene Absicht wäre, wenn z. B. in irgendeinem Gange ein Gegenstand verloren wäre, den wiederzufinden das Motiv der Wanderung wäre? Für diesen Fall dient eine andere, von Trémaux[1]) angegebene Methode, dessen Regeln folgendermaßen lauten:

1. *Von dem Ausgangspunkt gehe man längs eines beliebigen Weges weiter, bis man an einen Endpunkt oder Knotenpunkt kommt. Im ersteren Falle kehre man um, im zweiten Falle dagegen schreite man auf einem beliebigen der übrigen Wege fort, wobei jedesmal — wie auch weiterhin stets — der gewählte Weg ein Zeichen erhält. Diese Regel befolge man so lange, wie man noch zu Knotenpunkten kommt, die man noch nicht passiert hatte.*

2. *Kommt man zu einem schon passierten Knotenpunkte und zwar auf einem Wege, der erst zum ersten Male durchlaufen wird, so kehre man längs desselben um. Wurde der Weg dagegen schon zum zweiten Male durchwandert, so schreite man auf einem anderen, noch nicht passierten Wege oder, wenn ein solcher nicht mehr vorhanden, auf einem erst einmal passierten fort.*

Unsere Forderung einer zweimaligen Durchwanderung aller Wege involviert (s. S. 182f.), daß man zum Ausgangspunkt zurückkehren muß Nachdem ein Knotenpunkt zum ersten Male passiert ist, müssen von seinen Wegen zwei mit je einem Zeichen versehen sein. Kommt man ein zweites Mal zu ihm, so kehrt man entweder auf dem Wege, auf dem man gekommen, um, derselbe erhält dann 2 Zeichen und scheidet ganz aus, und es bleiben noch die beiden vorher einmal gezeichneten Wege — oder aber man war auf einem dieser beiden gekommen, hatte ihn also

1) Siehe Lucas, „Récréat. math.", t I, p. 47—50.

zum zweiten Mal durchschritten, womit er ausscheiden würde, und schlägt nun einen noch unpassierten oder, wenn ein solcher nicht vorhanden, den anderen schon einmal passierten Weg ein, so daß nachher wieder 2 einmal gezeichnete Wege oder kein solcher vorhanden ist. Dasselbe gilt für weitere Durchgänge; jeder Knotenpunkt besitzt daher nach einem Durchgang stets 2 oder 0 einmal gezeichnete Wege, nur der Ausgangspunkt besitzt deren bis zum Schluß gerade einen. Es sei nun Z der Punkt, von dem aus man zum letzten Male zum Ausgangspunkt A gelangt, ohne dann diesen nochmals wieder verlassen zu können; dann müssen also zum Schluß alle von A ausgehenden Wege zweimal passiert sein, darunter auch AZ. Zu Z ist man nun zuvor entweder von A oder von einem dritten Punkt Y aus gekommen. — In dem ersteren Falle hatte man also die Wanderung mit einer zweimaligen Durchlaufung von AZ geschlossen und war vorher auch in A gewesen; wir denken uns dann einfach den zuletzt zweimal passierten Weg AZ gestrichen und berücksichtigen nur den Rest der Wanderung, die dann gleichfalls in A endet, so zwar, daß dort dann alle Linien auch zweimal passiert sind. Wir kommen somit stets auf den zweiten Fall, daß man nämlich zu Z von einem dritten Punkt Y aus kommt (Fig. 11). In diesem Falle müssen alle Wege von Z zweimal durchlaufen sein,

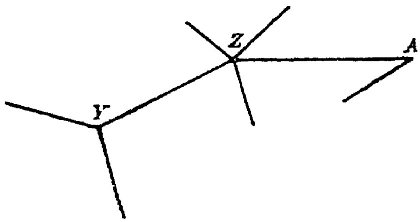


Fig. 11

da man sonst durch die Wanderung von Y über Z nach A unsere Regeln verletzt hätte. Denn, da der Weg ZA vorher schon einmal passiert war, so war also auch der Knotenpunkt Z schon passiert; jetzt zuletzt kam man von Y an und mußte, wenn dieser Weg nicht vorher schon einmal passiert war, wieder (der zweiten Regel zufolge) zu Y zurückkehren; war aber in Z ein noch gar nicht passierter Weg, so hätte dieser gewählt werden müssen. Wenn also ZA gewählt wurde, so war dies nur möglich, indem alle Wege von Z bereits vor diesem letzten Anrücken auf Z zweimal passiert waren und nur noch ZY und ZA erst je ein-

mal; denn mehr als 2 einmal passierte Wege kann Z nach Obigem nicht haben. Nach dieser letzten Wanderung YZA sind dann alle Wege von Z zweimal passiert.

Man sieht, daß uns dies Räsonnement durch den Schluß von n auf $n+1$ zu dem Resultate führen wird, daß alle Linien je zweimal passiert sind. Nehmen wir nämlich an, daß die Wanderung in der angegebenen Weise vom Ende aus so weit rückwärts verfolgt ist, daß die Punkte $A, A', \ldots A^{(k)}$ berührt sind, und daß von den Linien dieser Punkte bereits durchweg nachgewiesen ist, daß sie je zweimal passiert sind, so gilt dies auch von denjenigen Linien, die das System der $A, A', \ldots A^{(k)}$ mit den übrigen Punkten verbinden, Linien, die jedenfalls existieren, da ja das ganze System zusammenhängend sein soll. Es sei daher Z der Punkt, von dem aus man zuletzt in das System der $A, A', \ldots A^{(k)}$ eingetreten ist, um dieses dann bis zum Schluß nicht wieder zu verlassen, und zwar mag man von Z zu $A^{(i)}$ gekommen sein. Zu Z wieder ist man dann entweder von $A^{(i)}$ gekommen oder aber von einem dritten Punkte Y, der entweder einer der anderen A außer $A^{(i)}$ ist oder überhaupt nicht zu dem System der Punkte A gehört. Im ersteren Falle würde man also $\ldots A^{(i)} Z A^{(i)} \ldots$ gewandert sein, und dies war nur zulässig, wenn Z entweder ein Endpunkt oder aber schon vorher passiert war; auf jeden Fall dürfen wir uns dann die Linie $ZA^{(i)}$ ganz fort denken, ohne daß dadurch ein anderer Punkt als höchstens der etwaige Endpunkt Z in seinem Zusammenhange mit dem übrigen System beeinträchtigt wird. Diese zweimalige Durchwanderung von $ZA^{(i)}$ hintereinander ist ja nämlich, wenn Z kein Endpunkt ist, nur dann zulässig, wenn man bereits vorher zu Z gekommen war und zwar auf einem anderen Wege; es ist daher ausgeschlossen, daß $ZA^{(i)}$ eine „Brücke" (s. S. 173) ist, durch deren Fortnahme das System zerfallen würde. Wir kommen dann jedenfalls wieder auf den zweiten Fall, daß nämlich die Wanderung ging: $\ldots YZA^{(i)} \ldots$, und dann folgt offenbar ganz ebenso wie oben (voriger Absatz), daß auch alle Wege von Z je zweimal passiert sind, womit aber der versprochene Beweis erbracht ist.

Zum Schluß sei noch eine andere, von G. Tarry[1]) angegebene Vorschrift, von der die obige eine weitere Spezialisierung ist, erwähnt, nämlich folgende:

Der Weg, auf dem man zu einem Knotenpunkt zuerst gekommen ist, wird — bei diesem oder späterem Verlassen des betreffenden Knotenpunkts — erst dann wieder eingeschlagen, wenn alle von diesem Knotenpunkt sonst noch ausgehenden Wege bereits zweimal passiert sind.

1) G. Tarry, „Le problème des labyrinthes". Nouv. ann. de mathém., 3ième série, XIV, 1895, p. 187—190.

Kapitel XVII.

Das Hamiltonsche Dodekaederspiel.

Les matieres de Géométrie sont si sérieuses d'elles-mêmes, qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre un peu divertissantes

BLAISE PASCAL, „Suite de l'Histoire de la Roulette“ etc Oeuvres, t 5, 1779, p 200.

Je voudrois qu'un habile homme traitât en Mathématicien et en physicien de toute sorte de jeux L'esprit humain brille dans les jeux, presque plus qu'en tout autre chose.

LEIBNIZ an Nicolas Remond. Wien, Juli 1714. Siehe „Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz“, herausg. v C. I. Gerhardt, Bd III, (Berlin 1887), p 621

§ 1. Geschichte und Wesen des Spiels.

Der berühmte englische Mathematiker William Rowan Hamilton gab, angeregt durch eine Bemerkung T. P. Kirkmans[1]), zwei Spiele heraus unter dem Titel: *The Travellers Dodecahedron or a voyage round the world, invented by Sir William Rowan Hamilton, Royal Astronomer of Ireland, forming a new and highly amusing game for the drawing room, particularly interesting to students in mathematics of illustrating the principles of the Icosian Calculus. Published by John Jaques and son, Hatton Garden; London 1859.*[2])

---

1) Siehe T P Kirkman, „On the Partitions of the *R*-Pyramid, being the first class of *R*-gonous *X*-edra“ Philosoph. Transactions of the Roy. Soc. of London 1858, vol 148 (London 1859), p 160; s. a Kirkman in Educ. Times Reprints, vol 35, 1881, p. 115. Vgl a Tait in Trans. of the Roy. Soc. of Edinburgh, vol. 29, 1880, p. 657

2) Vgl. a. Hamilton, „Memorandum respecting a new System of Roots of Unity.“ Philos Mag. (4) XII, 1856, Juli—Dez., p. 446 und von demselben: „On the Icosian Calculus.“ British Association Report 1857, Notices and abstracts, p. 3; sowie A. S. Herschel, „Sir Wm. Hamilton's

Wir werden später sehen, daß die beiden Spiele Hamiltons, das Dodekaeder- und das Ikosaederspiel, auf dasselbe hinauslaufen, und wollen uns daher zunächst auf das eine derselben, das Dodekaederspiel, beschränken. Unter „Dodekaeder" versteht man bekanntlich einen Körper, der von 12 Flächen begrenzt ist, so zwar, daß jede Fläche ein 5-Eck ist, die Zahl aller Kanten daher = 30 und die aller Ecken, in deren jeder 3 Kanten zusammenstoßen, = 20 ist (s. Kap. XVI, S. 179). Eine anschauliche Vorstellung von diesem Körper erhält man am besten, wenn man sich in Fig. 1 um das mittlere 5-Eck die anderen 5 so herumgebogen denkt, daß je zwei benachbarte sich längs einer Fünfecksseite aneinander anschließen. Hierdurch entsteht ein nach einer Seite hin offener Korb, gebildet von sechs 5-Ecken, mit einem oberen Rand, der sich aus 10 Kanten (Fünfecksseiten) zusammensetzt. Stülpt man nun auf diesen Korb einen zweiten kongruenten Korb so, daß die 10 Randkanten des einen sich auf die des anderen legen, so schließen beide Körbe zusammen allseitig einen Raum ab und bilden einen Körper, den man „Dodekaeder" nennt

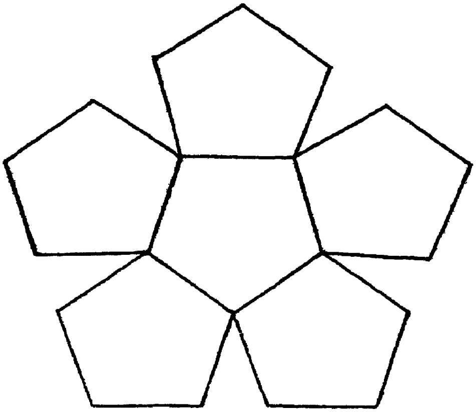


Fig 1

Hamiltons Aufgabe verlangte nun, auf einer Wanderung längs der Kanten des Dodekaeders alle 20 Ecken und zwar jede

Icosian Game" Quart. Journ 5, 1862, p. 305. Der Erfinder des Quaternionenkalkuls mußte an diesem Spiel besonderes Interesse nehmen, da er durch dasselbe zu einer Art von Kalkul gefuhrt wurde, der, wenn auch von dem der Quaternionen verschieden, doch einige Analogien hierzu bot („having some general analogy thereto", Philos Mag. 1856 l c.) — Ein auch als Dodekaederspiel bezeichnetes Orakelspiel (vgl z. B. Jean de Meun, Le plaisant jeu du Dodechedron, revu par Gruyet, Lyon 1580) hat mit dem Hamiltonschen nichts gemein

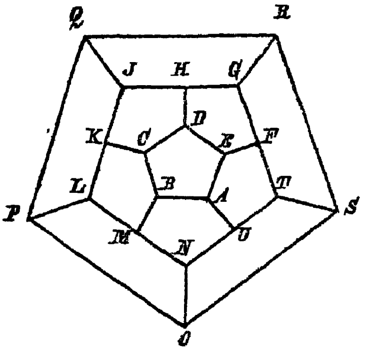


Fig 2
Diagramm des Dodekaeders

nur einmal zu passieren, wobei die 5 ersten Stationen vorgeschrieben sein sollten. Da es nun offenbar nicht darauf ankommt, daß die Wanderung auf einem räumlichen Gebilde ausgeführt wird, so können wir an die Stelle unseres Dodekaeders ein ebenes Diagramm (s. Fig. 2) setzen und dieses der weiteren Betrachtung zugrunde legen.[1])

§ 2. Wanderungen ohne Vorschriften über Reihenfolge der Stationen.

Stellen wir uns zunächst die einfachere Aufgabe, die 20 Stationen in beliebiger Reihenfolge zu durchwandern, ohne uns um die Vorschrift bezüglich der 5 ersten Stationen zu bekümmern, so erhalten wir in folgender Weise leicht eine Lösung: Wegen der überall gleichmäßigen Struktur des Körpers ist offenbar keine Ecke vor einer anderen bevorzugt, und dasselbe gilt natürlich auch von allen Kanten und Flächen des Körpers Dann sind aber natürlich auch in dem von uns substituierten Diagramm alle 5-Ecke und ebenso sämtliche Eckpunkte („Knotenpunkte", vgl. S. 171), wie auch alle Linien des Diagramms, untereinander völlig gleichberechtigt; die inneren Elemente der Figur z. B mit den gleichartigen äußeren[2]) usw.

---

1) Hamilton hatte in dem von ihm herausgegebenen Spiel auch ein ebenes Diagramm gewählt; die Dodekaeder-Ecken waren durch Löcher markiert, in die elfenbeinerne Pflocke gesteckt wurden, sobald man die betreffenden Ecken passiert hatte (s hierüber die Angaben in Brit Assoc. Rep 1857, l. c.)

2) Auch längs der äußeren Linien des Diagramms, z. B längs *PQ*, stoßen, wie längs der inneren, je zwei „5-Ecke" zusammen: man hat natürlich *OPQRS* als solches mitzurechnen. Nur so auch ergibt sich als Anzahl der „5-Ecke" des ebenen Diagramms 12, wie es doch sein muß

Wenn wir daher irgendeine bei einem beliebigen Punkte, beispielsweise bei A, beginnende Bahn hätten, die entsprechend den Bedingungen der Aufgabe durch alle Punkte je einmal hindurchführte, so würden wir, wenn wir in irgendeinem anderen Punkte, z. B. in G oder S, begönnen und unsere Wanderung nach denselben Grundsätzen ausführten wie die erste, gleichfalls alle Punkte je einmal passieren. Dies ist eine unmittelbare Folge der völligen Gleichmäßigkeit in der Struktur des Systems. Wir gehen daher versuchsweise von einem ganz beliebigen Punkt aus und wandern längs einer seiner 3 Linien bis zu deren Endpunkt. Für die weitere Fortsetzung stehen uns dann 2 Wege offen, einer rechts und einer links. Bezeichnen wir das Einschlagen des rechten Weges durch ein r und das des linken durch ein l, so führt, wie wir uns leicht überzeugen, die Befolgung der von Hamilton angegebenen Vorschrift

$$r\,r\,r\,l\,l\,l\,r\,l\,r\,l\,r\,r\,r\,l\,l\,l\,r\,l\,r\,l$$

uns durch alle Punkte je einmal und darauf wieder zum Ausgangspunkt zurück. Gilt dies für einen Ausgangspunkt, so nach dem oben Gesagten für jeden anderen Bei einer solchen Wanderung werden natürlich 20 Linien durchlaufen, während die übrigen 10 unbenutzt bleiben. Um dies noch deutlicher zu machen, geben wir in dem nebenstehenden Beispiel der Fig. 3 in ausgezogenen Linien eine solche Bahn an, während die dabei nicht durchlaufenen Linien nur punktiert sind. Der Anfangspunkt ist durch $*$ bezeichnet.[1] Von den 3 von jedem Punkte ausgehenden Linien werden immer 2 durchlaufen, während die

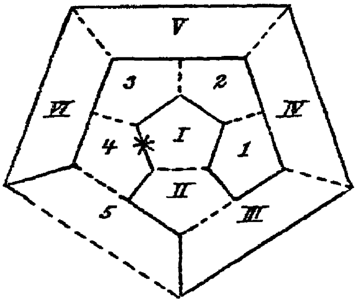


Fig 3

1) Bezeichnet man die Operation der Umkehrung einer Linie in ihrer Richtung, also den Übergang von AB zu BA (s. Fig 2), mit i, so ist offenbar $l = r i r$; denn, anstatt z B. von AB direkt zu BM vermöge l überzugehen, konnten wir auch erst vermöge r von AB zu BC, von hier vermöge i zu CB und dann vermöge r zu BM übergehen. Offenbar führt eine fünfmalige Anwendung der Operation r hinter-

dritte unbenutzt bleibt. Die Aufgabe unseres Spiels läßt sich also auch dahin fassen: **Von den 30 Linien des Diagramms sind 10 so auszuwählen, daß niemals zwei dieser 10 in einem Punkte zusammenstoßen und durch Ausscheidung der gewählten 10 der Zusammenhang des Liniensystems nicht aufgehoben wird.**

Der französische Artillerieoffizier Hermary hat eine andere Regel zum Auffinden der Lösungen angegeben[1]), die jedoch nur auf einer anderen Bezeichnung beruht: Wählen wir die beiden ersten Punkte beliebig und schreiten wir dann links oder rechts fort, so kommen wir zunächst zu einem dritten Punkt. Diese 3 Punkte gehören stets zu einem unserer 5-Ecke, und wir werden nun von dem dritten Punkt ab entweder auf dem Umfang dieses 5-Ecks fortschreiten oder auf ein anderes 5-Eck übergehen. Ersteres oder das „Bleiben" im 5-Eck wollen wir fortan durch b bezeichnen; es wird offenbar dann und nur dann eintreten, wenn wir nach

---

einander zu der ursprunglichen Linie zurück, und ebenso bringt eine zweimalige Anwendung von i keinerlei Änderung hervor; es ist also $r^5 = i^2 = 1$. Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen wird das obige Hamiltonsche Schema, wenn man für l überall rir setzt, identisch $= 1$, was natürlich die Bedeutung hat, daß eine Wanderung nach dieser Hamiltonschen Vorschrift stets zu ihrem Ausgangspunkt zurückführen muß, gleichgültig wo dieser liegt. Die Operation ri führt offenbar nach dreimaliger Anwendung wegen der 3 in jedem Punkte zusammenstoßenden Linien zum Ausgangselement zurück, so daß $(ri)^3 = 1$ ist. Fur das räumliche Dodekaeder bedeutet r eine Drehung um die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen und zwar eine solche um 72°, i eine Drehung um die Verbindungslinie der Mitten zweier gegenüberliegender Kanten (um 180°) und ri eine solche um eine Körperdiagonale (um 120°); diese Drehungen nebst ihren Iterationen und Kombinationen stellen offenbar alle Drehungen dar, die das Dodekaeder in sich überführen. Unsere 3 Gleichungen $r^5 = 1$, $i^2 = 1$, $(ri)^3 = 1$ charakterisieren die Morphologie des Dodekaeders und des ihm dualistisch entsprechenden Ikosaeders vollkommen (Hamilton, Phil. Magaz 1856, p. 446); andererseits sind dies auch die definierenden Relationen der Substitutionengruppe von der Ordnung 60, von der die algebraische Auflösung der allgemeinen Gleichung 5ten Grades abhängt (s Dyck, „Gruppentheor. Studien", Math Ann. XX, 1882, p. 35) und die daher auch den Namen „Ikosaedergruppe" führt.

1) Publiziert durch Lucas, „Récréat.", t. II, 1896, p 216.

einem Schema verfahren, das mit *r r* oder *l l* beginnt, während dagegen der „Wechsel" des 5-Ecks, durch *w* bezeichnet, für die Anfänge *r l* und *l r* eintritt. Übertragen wir nun so das obige Hamiltonsche Schema in diese neue Bezeichnungsweise, so erhalten wir offenbar statt dessen:

$$b\,b\,w\,b\,b\,w\,w\,w\,w\,w\,b\,b\,w\,b\,b\,w\,w\,w\,w\,w.$$

Denken wir uns längs einer solchen alle Punkte umfassenden geschlossenen Bahn einen Schnitt geführt, so wird natürlich die Oberfläche des Dodekaeders zerteilt und zwar in 2 Teile, aber auch nicht in mehr, da die Bahn sich ja vor dem Ende nicht schloß. Jeder dieser beiden Teile besteht aus einer gewissen Anzahl von 5-Ecken, da andere Begrenzungsflächen ja nicht vorkommen, und zwar ist jeder dieser beiden Teile so beschaffen, daß jedes 5-Eck darin höchstens an 2 andere 5-Ecke grenzt. Würde ein 5-Eck nämlich an 3 oder mehr andere grenzen, so müßte sich mindestens an zwei aufeinanderfolgende von seinen Seiten je ein neues 5-Eck anlegen. Dies ist aber nicht möglich; denn wir hätten alsdann — in Form eines ebenen Diagramms gezeichnet — eine Konfiguration wie in Fig. 4, und der Punkt A wäre somit auf unserer Wanderung gar nicht passiert. Wir erhalten also stets Figuren von der Form der Fig 5, und zwar besteht offenbar jeder der beiden Teile, in die das Dodekaeder vermöge unseres Schnitts zerfällt, aus 6 Fünfecken, weil sonst die Umgrenzung des Gebietes sich nicht aus 20 Seiten zusammensetzen würde, wie es ja für unsere Bahnkurve der Fall sein muß. So stellen nämlich die mittleren 4 Fünfecke, von deren Seiten je zwei zur Anheftung dienen, je drei ihrer Seiten für die Bahnkurve und die beiden äußeren 5-Ecke deren je vier,

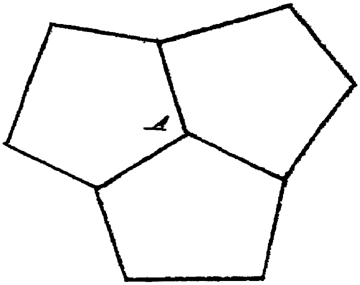


Fig 4

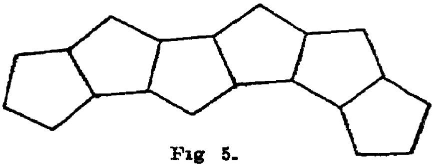


Fig 5.

zusammen also 20. Wir haben in Fig. 3 die 5-Ecke der beiden Teile durch römische bzw arabische Ziffern kenntlich gemacht, wobei als das Fünfeck 6 natürlich die Fläche des ganzen Diagramms anzusehen ist.

§ 3. Wanderungen bei vorgeschriebenen Anfangsstationen.

Wir erhielten nach dem Hamiltonschen Schema des vorigen §, das übrigens in 2 einander gleiche Hälften zerfällt, eine geschlossene, alle 20 Punkte umfassende Bahn. Da wir nun diese Bahnkurve, so wie sie „geschlossen" fertig vorliegt, auch ebensogut in umgekehrter Richtung, sowie auch von irgendeinem anderen ihrer 20 Punkte aus, durchlaufen können, so sieht man, daß unsere obige Vorschrift ein Zyklus sein muß, den wir daher auch in der Kreisform der Fig. 6 schreiben wollen, und daß wir eine richtige Lösung (bei beliebigem Ausgangspunkt) stets erhalten, wenn wir unserem Zyklus an beliebiger Stelle einen Einschnitt geben und dann den von ihm vorgeschriebenen Weg beschreiben

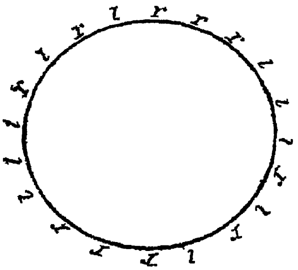


Fig. 6

Legen wir nun jetzt die Hamiltonsche Form des Problems zugrunde, nehmen wir also an, daß die ersten 5 Stationen der Wanderung vorgeschrieben sind, so liegt darin offenbar weiter nichts, als eine Bestimmung darüber, an welcher Stelle der obige Zyklus (Fig. 6) begonnen werden soll. Sind diese 5 Stationen z. B. A, B, C, K, L (s. Fig. 2), so würde dies bedeuten, daß wir zunächst von A nach B, dann r nach C, darauf l nach K und sodann l nach L gehen, also den Zyklus mit $r\,l\,l$ beginnen sollen. Die Bedingung der vorgeschriebenen 5 ersten Stationen involviert also stets die Bedingung eines der folgenden Anfänge:

1) $r\,r\,r$ 2) $r\,r\,l$ 3) $r\,l\,r$ 4) $l\,r\,r$

5) $r\,l\,l$ 6) $l\,r\,l$ 7) $l\,l\,r$ 8) $l\,l\,l$,

die alle in unserem Zyklus leicht zu erhalten sind. Erstreben wir nämlich den Anfang *r r r*, so können wir an den in der Fig. 7 mit 1^a und 1^b bezeichneten Stellen beginnen, so zwar, daß wir den Zyklus von 1^a ab im Uhrzeigersinne, von 1^b ab im umgekehrten Uhrzeigersinne durchlaufen. Ein Einschnitt an jener zweiten Stelle des Zyklus, die gleichfalls die Kombination *r r r* aufweist, würde offenbar keine neue Lösung mehr liefern. Wir erhalten in diesem Falle also 2 Lösungen, und man sieht ohne weiteres, daß für den Anfang 8) dasselbe gelten muß. Dabei haben wir also unter „*Lösung*", wie auch weiterhin stets in diesem §, eine geschlossene, alle 20 Punkte umfassende Bahn, die zugleich der Nebenbedingung der vorgeschriebenen 5 Anfangsstationen genügt, zu verstehen. Für den Anfang 2) bekommen wir die Einschnitte 2^a und 2^b und auch nur diese 2 Lösungen; ein gleiches gilt für 7), das aus 2) durch eine Vertauschung von *r* mit *l* hervorgeht, eine Vertauschung, die offenbar allgemein einer Umkehrung der Durchlaufungsrichtung des Zyklus gleichkommt. Die gleiche Anzahl von Lösungen erhalten wir für den Fall 4), nämlich 4^a und 4^b, und ebenso auch für den dazu reziproken Fall 5). Für den Anfang 3) ergeben jedoch die Einschnitte 3^a, 3^b, 3^c, 3^d, — die beiden ersteren mit einem Umlauf im Uhrzeigersinne, die beiden letzteren mit einem im umgekehrten Sinne — 4 voneinander verschiedene Lösungen, die folgende Anfänge haben

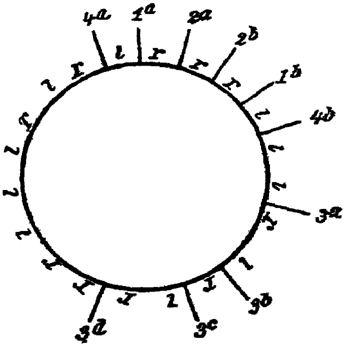


Fig. 7.

3^a) *r l r l r r ..*

3^b) *r l r r r ..*

3^c) *r l r l l .*

3^d) *r l r l r l ..*

Das Entsprechende gilt natürlich für den reziproken Fall 6)

Bei vorgeschriebenen 5 ersten Stationen ist die Aufgabe also jedenfalls stets lösbar und zwar entweder auf 2 oder auf 4 Arten.

Diese Methode gestattet aber auch, für diejenigen Fälle, in denen eine andere Anzahl von Anfangsstationen vorgeschrieben ist, die Zahl der Lösungen zu bestimmen. Nehmen wir zunächst einmal an, daß nur die beiden ersten Stationen bestimmt sind; dann brauchen wir, nachdem wir die erste Linie durchlaufen haben, die Fortsetzung nur nach unserem Zyklus zu machen, dürfen denselben jedoch an beliebiger Stelle beginnen, was offenbar wegen der zwei unter sich gleichen Hälften des Zyklus 10 und zwar untereinander verschiedene Möglichkeiten gibt. Da nun für jeden Einschnitt der Zyklus auch noch in zwei verschiedenen Richtungen durchlaufen werden kann, so erhält man im ganzen 20 Lösungen, die alle, wie man sich leicht überzeugt, voneinander verschieden sind. Von diesen 20 verschiedenen Lösungen beginnen, wie bei der völligen Symmetrie des ganzen Systems von vornherein einleuchtet, ebenso viele mit l wie mit r, so daß wir also, wenn die 3 ersten Stationen, d. h. also der erste Buchstabe des Zyklus, vorgeschrieben ist, noch 10 Lösungen haben.

Ist dagegen nur der Ausgangspunkt vorgeschrieben, so können wir denselben zunächst in 3 verschiedenen Richtungen längs der 3 von ihm ausgehenden Linien verlassen und von dem nächsten Punkt ab haben wir dann für die weitere Bahn noch je 20 verschiedene Möglichkeiten. Von diesen 60 Bahnen fallen jedoch offenbar immer je 2 zusammen; nennen wir nämlich die 3 von dem Ausgangspunkt ausgehenden Linien a, b, c, so fällt eine Bahn, die mit a beginnt und mit b endigt, mit einer anderen, mit b beginnenden und mit a endigenden, zusammen usw. Es gibt also für unser Spiel auch insgesamt nur 30 verschiedene geschlossene Bahnen; denn in dem vorgeschriebenen Anfangspunkt ist eine Beschränkung natürlich nicht enthalten, wenn die Bahn geschlossen sein soll. — Sind die 4 ersten Stationen vorgeschrieben, d. h. also die beiden ersten Zeichen des Zyklus festgesetzt, so sind 2 Fälle zu unterscheiden: entweder soll der Zyklus mit $r\,r$ resp. dem dazu reziproken $l\,l$ beginnen; dann haben wir, wie leicht zu sehen, 4 verschiedene Lösungen, — oder aber der Zyklus beginnt mit $r\,l$ resp. $l\,r$, dann gibt es 6 Lösungen. — Der Fall der 5 vorgeschriebenen Anfangsstationen ist oben bereits er-

ledigt. — Schreibt man 6 oder mehr Anfangsstationen vor, so existiert eine Lösung nicht mehr unter allen Umständen. Sind nämlich die 6 ersten Stationen, d. h. also die 4 ersten Zeichen des Zyklus, vorgeschrieben, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) *r r r r* . . .
2) *r r r l* . . .
3) *r r l r* . . .
4) *r l r r* . . .
5) *l r r r* . . .
6) *r r l l* . . .
7) *r l r l* . . .
8) *r l l r* . . .

und ebensoviele dazu reziproke. Da die Kombinationen 1) und 8) in unserem Zyklus (Fig 6) nicht vorkommen, so besitzen diese Fälle keine Lösungen, wie übrigens auch leicht aus dem Diagramm der Fig 2 sich ergibt[1]). Die Fälle 3), 4), 6) besitzen je eine Lösung, 2) und 5) je 2 Lösungen und 7) schließlich deren 3, nämlich

a) *r l r l r r* . . .
b) *r l r l l l* . . .
c) *r l r l r l* . .

— Ist auch noch der 7-te Punkt vorgeschrieben, so gibt es 3 Lösungen überhaupt nie mehr, sondern höchstens noch 2, da von den 3 Lösungen des vorstehenden, lösungreichsten Falles 7) nur noch 2, nämlich *a*) und *c*), in dem 5-ten Zeichen übereinstimmen. — Schreibt man schließlich die 8-te Station auch noch vor, so gibt es höchstens noch eine Lösung, wie man bei näherer Betrachtung der Fälle 2), 5), 7) als der einzigen, für die bei 6 vorgeschrie-

1) Beginnt man die Wanderung z. B. mit AB, so führt die Vorschrift *rllr* durch den Weg $ABCKLP$, und es gibt schon jetzt keine Möglichkeit mehr, den Punkt M, von dessen 3 Nachbarpunkten bereits zwei, B und L, passiert sind, zu erreichen und wieder zu verlassen, wie es doch für eine geschlossene Bahn unerläßlich wäre.

benen Anfangsstationen mehr als eine Lösung existierte, leicht erkennt. Wir schließen diese Betrachtung mit einer tabellarischen Zusammenstellung der erhaltenen Resultate:

Zahl der vorgeschriebenen Stationen:	Zahl der Lösungen.
1	30
2	20
3	10
4	6 oder 4
5	4 oder 2
6	3, 2, 1 oder 0
7	2, 1 oder 0
8 oder mehr	1 oder 0

§ 4. Weitere Aufgaben Hamiltons.

Hamilton stellte noch verschiedene weitere Aufgaben über das Dodekaederspiel. Eine zweite Aufgabe verlangte: Bei vorgeschriebenen 3 ersten und vorgeschriebener letzter Station sollen alle Ecken je einmal passiert werden. Da als Endstation jede beliebige soll vorgeschrieben werden dürfen, so ist es im allgemeinen natürlich nicht möglich, von ihr zum Ausgangspunkt zurückzukehren; auf eine geschlossene Bahnkurve dürfen wir somit jetzt im allgemeinen nicht mehr rechnen. Wir geben im folgenden einige Beispiele[1]) für diese Aufgabe, die *0, 1, 2, 4 oder 6 Lösungen* besitzt:

1) A, B, C seien die 3 ersten, Q die letzte Station (s. Fig. 2). Die einzige Lösung ist

$$A\,B\,C\,D\,E\,F\,T\,U\,N\,M\,L\,K\,J\,H\,G\,R\,S\,O\,P\,Q$$

2) Dieselben Anfangsstationen, die Endstation sei R. Es gibt 2 Lösungen, nämlich:

$$A\,B\,C\,K\,L\,M\,N\,U\,T\,S\,O\,P\,Q\,J\,H\,D\,E\,F\,G\,R$$
$$A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,J\,K\,L\,M\,N\,U\,T\,S\,O\,P\,Q\,R.$$

1) Vgl. Lucas, „Récréat.“, t. II, p 220.

3) Dieselben Anfangsstationen, *O* Endstation. 4 Lösungen, nämlich:

A B C D E F G H J K L M N U T S R Q P O
A B C K J H D E F G R Q P L M N U T S O
A B C K J Q P L M N U T F E D H G R S O
A B C K L M N U T S R G F E D H J Q P O.

4) Dieselben Anfangsstationen, *K* Endstation. Die Aufgabe ist unlösbar, desgleichen, wenn die Endstation eine der Ecken *D*, *F*, *M*, *N*, *P*, *T* ist.

5) Nehmen wir ferner den Fall, daß die vorgeschriebene Endstation der Anfangsstation benachbart ist, z. B.: *A B C* der Anfang und *U* die Endstation, ein Fall, für den wir übrigens auf § 3 rekurrieren können[1]), so erhalten wir folgende 6 Lösungen:

A B C D E F G H J K L M N O P Q R S T U
A B C D E F T S O P Q R G H J K L M N U
A B C K L M N O P Q J H D E F G R S T U
A B C K J Q R G H D E F T S O P L M N U
A B C K J Q P L M N O S R G H D E F T U
A B C K J H D E F G R Q P L M N O S T U.

Eine weitere Fragestellung Hamiltons verlangt: Bei gewissen vorgeschriebenen Anfangsstationen nach einer weiteren vorgeschriebenen Anzahl von Stationen so weit zu kommen, daß dann kein weiterer Punkt mehr zu erreichen ist. Wir beschränken uns auf ein Beispiel, nämlich daß man bei dem Anfang *A B C D E* nach 6 weiteren Stationen festsitzen soll Die Lösung ist leicht.

A B C D E F G R Q J H.

Man erreicht also im ganzen nur 11 Stationen — Die Minimalzahl von Stationen übrigens, die man stets erreicht, bevor ein Festsitzen eintreten kann, ist 8; Beispiel: *C K L M N U A B.*

---

1) Knüpft man das Ende *U* an den Anfang *ABC*, so erhält man *UABC* und damit die Vorschrift lr, die nach § 3 (S. 204) sechs Fortsetzungen besitzt.

Ein viertes Hamiltonsches Problem geht dahin, **alle Stationen mit Ausnahme einer bestimmten zu passieren und zwar, indem etwa die beiden ersten und die beiden letzten Stationen vorgeschrieben sind.** Sind z. B. A, B als die beiden ersten und N, O als die vorletzte und letzte Station vorgeschrieben und soll M gemieden werden, so erhält man folgende Lösung:

$$A\ B\ C\ K\ L\ P\ Q\ J\ H\ D\ E\ F\ G\ R\ S\ T\ U\ N\ O$$

§ 5. Das Ikosaederspiel. Die übrigen regulären Polyeder.

Die Aufgabe des zweiten Hamiltonschen Spiels (vgl. § 1), des Ikosaederspiels, besteht darin, die Oberfläche des Ikosaeders so zu durchwandern, daß jede Fläche gerade einmal passiert wird, wobei man von einer Fläche zur anderen nur über die Schnittkante beider gehen darf. Da das Ikosaeder das dualistisch entsprechende Gebilde zum Dodekaeder ist, so zwar, daß die 20 Ecken des Dodekaeders den 20 Flächen des Ikosaeders und die 12 Flächen jenes den 12 Ecken dieses entsprechen, während die 30 Kanten beider Körper sich gegenseitig zugeordnet sind, so kommt die Aufgabe dieses Ikosaederspiels offenbar genau auf dasselbe hinaus wie die oben behandelte des Dodekaederspiels. Wir brauchen daher auf dieses zweite Hamiltonsche Spiel nicht näher einzugehen. Dagegen wenden wir uns noch kurz zu den übrigen regulären Polyedern und unterwerfen auch sie der Forderung des Dodekaederspiels.

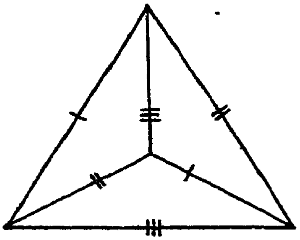


Fig. 8
Diagramm des Tetraeders.

Zunächst das Tetraeder: Um eine geschlossene, alle 4 Ecken umfassende Bahn zu erhalten, sind 2 Kanten passend zu entfernen. Hierfür ergeben sich 3 Möglichkeiten, nämlich die 3 Paare der in Fig 8 in gleicher Weise: mit 1, 2 oder 3 Strichen, gezeichneten Linien, so daß wir also 3 Lösungen hier haben. Das Lösungsschema in der obigen Bezeichnungsweise lautet hier $r\,l\,r\,l$.

Beim Würfel, bei dem 4 Linien zu entfernen sind, ergeben

sich hierfür, wie wir sogleich sehen werden, 6 passende Kombinationen. Bei der Gleichberechtigung aller Linien untereinander dürfen wir zunächst ohne Beschränkung annehmen, daß unter den 4 auszuscheidenden Linien sich Linie 1 (s. Fig. 9) befindet. Dann dürfen die Linien 2, 9, 4, 12 nicht entfernt werden, und es kommen also hierfür nur noch in Betracht: 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11. Wir unterscheiden nun weiter zwei Fälle: 1) neben Linie 1 wird Linie 3 ausgeschieden; 2) Linie 3 wird nicht ausgeschieden. In dem ersten Falle sind, wie man leicht sieht, nur folgende zwei Kombinationen von 4 auszuscheidenden Linien, von denen keine zwei in einem Punkte zusammenstoßen, möglich:

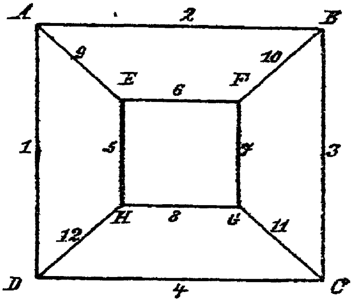


Fig. 9. Diagramm des Hexaeders (Würfels).

1, 3, 5, 7 und
1, 3, 6, 8.

Von diesen beiden Kombinationen nun bleibt die erste, weil die Ausscheidung dieses Quadrupels von Linien den Zusammenhang des Liniensystems aufheben würde, außer Betracht, so daß von Fall 1) nur der Unterfall: 1, 3, 6, 8 verbleibt. Befindet sich nun zweitens neben Linie 1 die Linie 3 nicht unter den fortgenommenen, so müssen die Linien 10 und 11 entfernt werden, weil *B* und *C* andere Linien nicht verlieren können, und es bleibt nur die Kombination 1, 5, 10, 11. Wir haben im ganzen also 2 passende Kombinationen mit Linie 1, insgesamt mithin $\frac{2 \cdot 12}{4} = 6$ Kombinationen von 4 zu entfernenden Linien und ebenso viele Lösungen unseres Problems. Das Lösungsschema lautet hier *r r l l r r l l* Bei einem vorgeschriebenen Anfangspunkt gibt es, wie gesagt. 6 Lösungen; bei vorgeschriebenen 2 ersten Stationen liefert das Schema noch 4 Fortsetzungen, nämlich einsetzend mit *r r*, *l l*, *r l* und *l r*. Sind die 3 ersten Punkte vorgeschrieben, so gibt es noch 2 Lösungen und bei 4 nur noch eine. Sind die 5 ersten Stationen vorgeschrieben, so hört die unbedingte Lösbarkeit über-

haupt auf; so ist z. B. der Anfang $AEFGC$ offenbar unzulässig (die ihm entsprechende Folge lrl kommt in dem Zyklus nirgends vor). Wir bekommen also folgende Tabelle:

Zahl der vorgeschriebenen Anfangspunkte:	Zahl der Lösungen:
1	6
2	4
3	2
4	1
5 oder mehr	1 oder 0.

Das Oktaeder (s. Fig. 10) ist das dualistische Analogon zum Würfel; stellen wir also hier die Aufgabe des zweiten Hamiltonschen Spiels, so erledigt sich diese ohne weiteres durch die über den Würfel soeben gemachten Ausführungen. Es sei jedoch weiter noch kurz bemerkt, daß, wenn die Forderung des ersten Hamiltonschen Spiels für das Oktaeder erhoben wird, man in jedem der 6 Punkte des Diagramms natürlich zwei Linien zu entfernen hat und sich bei Festsetzung der beiden ersten Stationen 8 Lösungen, d. h. 8 durch alle Ecken hindurch- und zum Ausgangspunkte zurückführende Wanderungen, ergeben, bei einer vorgeschriebenen Anfangsstation also $\frac{8 \cdot 4}{2} = 16$ solche Wanderungen.

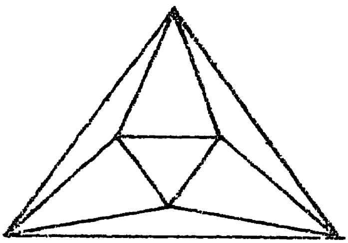


Fig. 10. Diagramm des Oktaeders.

Kapitel XVIII.

Das Farben-Karten-Problem.

I have not succeeded in obtaining a general proof.
Cayley. Collect. Papers XI, p. 8.

§ 1. Wesen und Geschichte des Problems.

Auf geographischen Karten pflegt man bekanntlich die Konturen eines Landes oder auch das ganze Land durch eine einheitliche Farbe zu kennzeichnen und hierbei zwei benachbarte Länder durch verschiedene Farben zu unterscheiden. Unter „benachbarten" Ländern wollen wir dabei nur solche verstehen, die längs einer Strecke aneinander grenzen, wollen also in dem Ausnahmefalle, daß zwei Länder nur in einem Punkte zusammenstoßen, diese nicht als „benachbart" ansehen. Wir denken uns nun weiter der Einfachheit halber, daß auf unserer Karte nur solche Länder vorkommen, die aus je einem zusammenhängenden Stücke, also nicht etwa aus mehreren voneinander völlig getrennten Gebietsteilen[1]), bestehen, und wir erheben nun die Frage: Läßt sich eine Mindestanzahl von Farben angeben, die unter den vorgenannten Bedingungen, gleichgültig wie im übrigen die Karte beschaffen ist, sicher stets ausreichen, um die Karte so auszuführen, daß zwei „benachbarte" Länder stets verschiedenfarbig dargestellt sind?

Bei näherer Betrachtung überzeugt man sich bald, daß 4 Farben in vielen Fällen unerläßlich sind (wir werden Beispiele dafür in § 2 kennen lernen), jedoch gelingt es andererseits auch nicht, einen Fall, der unseren allgemeinen Bedingungen entspricht, so zu konstruieren, daß mehr als 4 Farben notwendig wären. *Vier wäre also,* wenn dies empirische Resultat sich bestätigen sollte, *die von uns gesuchte Zahl,* die *„chromatische Zahl"*,

1) Siehe jedoch unten § 4

wie man sie neuerdings genannt hat[1]); mit 4 Farben, wie blau, rot, gelb und grün, wäre somit jede Karte in der verlangten Weise auszuführen. Den Kartographen soll diese Erfahrungstatsache seit langem geläufig sein. Der erste jedoch, der in dieser Frage ein interessantes mathematisches Problem erkannte, war wohl Francis Guthrie (etwa 1850), damals eben noch Student und nachmals Professor der Mathematik in Kapstadt, und sein Bruder, der nachmalige Professor der Chemie und Physik, Frederick Guthrie, der in jener Zeit die Vorlesungen Augustus De Morgans besuchte, machte dem Lehrer von diesem Theorem des Bruders Mitteilung.[2]) Durch De Morgan, der dieser Frage großes Interesse entgegenbrachte, und durch seine Vorlesungen sind wohl weitere Kreise von britischen Mathematikern für dies Problem interessiert worden[3]), und später hat insbesondere der berühmte Mathematiker Arthur Cayley die Aufmerksamkeit der Londoner mathematischen[4]), sowie der königlichen geographischen Gesellschaft[5]), auf diese Frage gelenkt, wobei er mit den unserem Kapitel vorausgeschickten Worten seinen Mißerfolg bei den Bemühungen, einen allgemeinen Beweis für den Vierfarbensatz zu finden, bekannte. Auch ein von A. B. Kempe[6]) gegebener Beweis ist nicht ausreichend, wie P. J. Heawood[7])

1) Der Name rührt her von P. Wernicke; s. Mathem. Annal 58, 1904, p. 413.

2) Siehe Frederick Guthrie, „Note on the Colourings of Maps“. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh X, 1878—80, p. 728.

3) Siehe außer der in Anm. 2 zitierten Stelle noch die im gleichen Bande der „Proceedings“ befindliche Abhandlung von P. G. Tait, p. 501.

4) 13. Juni 1878; s. London Math Soc. Proc 9, 1877—1878, p. 148.

5) Cayley, „On the colouring of maps“ Proc. of the Royal Geograph. Soc. I, 1879, p. 259—261 = Cayley, Collected Papers XI, p. 7—8.

6) A B Kempe, „On the Geographical Problem of the Four Colours.“ Amer. Journ of Mathem. t. II, 1879, p 193—200; vgl. auch W. E. Story, „Notes on the preceding paper“, ibid. p. 201—204. Siehe auch Kempes Artikel in Nature XXI, 1880, p. 399—400 und den Auszug daraus in London Mathem. Soc. Proc. X, 1878—1879, p. 229—231.

7) P. J. Heawood, „Map-colour theorem“ Quarterly Journ. of Math. XXIV, 1890, p. 332—338 und „On the four-colour map theorem“, ibid. XXIX, 1898, p 270—285.

gezeigt hat, und dasselbe gilt von anderen, neueren Beweisen[1]), so daß auch heute eine endgültige mathematische Erledigung unserer Frage, so sicher auch die Tatsache an sich zu sein scheint[2]), noch aussteht.

§ 2. Nachbargebiete auf einfach zusammenhängenden Flächen.

Eine Frage, die mit unserem Problem eng znsammenhängt, ist die folgende: **Wieviel Länder sind höchstens möglich in der Art, daß jedes Land jedes andere längs einer Linie berührt?** — Offenbar wären solche Gebiete, die wir mit L. Heffter als „Nachbargebiete" bezeichnen wollen, im Sinne unseres Farbenproblems alle in verschiedenen Farben darzustellen. Die Zahl der „Nachbargebiete" ist somit jedenfalls eine untere Grenze für die in der Fragestellung des § 1 gesuchte chromatische Zahl, ohne daß jedoch — worauf zuerst Heffter[3]) hingewiesen hat — beide Zahlen identisch sein müssen.[4])

1) Über einen Beweis von Temple s. J Cook Wilson, „On a supposed solution of the 'four-colour-problem'", The Mathematical Gazette 3, p. 338—340 (ich zitiere nach dem Jahrb. über die Fortschr. d. Math. 37, 1906, p. 495). Auch der Beweis von P. Wernicke (Math. Ann. 58, 1904, p. 413 ff.) wird in der „Encyklop der mathem. Wissensch." III 1, p 177, Fußn. 60 (M. Dehn u. P. Heegaard) als „nicht ausreichend" bezeichnet. — Außer der an der letztgenannten Stelle aufgeführten Literatur über unser Problem nenne ich hier noch: C. de Polignac, „On elements connected each to each by one or the other of two reciprocal relations," Amer. Journ. of Mathem 26, 1904 (p. 361—414), p 401 ff ; G D. Birkhoff, „The reducibility of maps", Bull. of the Amer Mathem Soc. (2) 18, 1912, p. 489 und Amer. Journ. of Mathem. 35, 1913, p. 115—128; auch die unter Nr. 734 (1912) des literar Index aufgeführte Abh. von O Veblen betrifft das Farbenproblem.

2) Allerdings ist auch die tatsächliche Richtigkeit des Satzes in Zweifel gezogen worden von J. Petersen (Intermédiaire des mathématiciens, t. VI, 1899, p. 38); vgl. hierzu S. 223 nebst Anm. 1 dort.

3) L Heffter, „Über das Problem der Nachbargebiete." Mathem. Annal. Bd. 38, 1891, p. 477.

4) Dies war angenommen bei R Baltzer, Leipziger Ber., Math.-phys Kl., Bd. 37, 1885, p 6 und bei F. Dingeldey, „Topologische Stu-

Schon Kempe[1]) und später Heffter[2]) haben darauf aufmerksam gemacht, daß die Frage nach den „Nachbargebieten" ein dualistisches Analogon besitzt in derjenigen nach den „Nachbarpunkten", d. h. der Maximalzahl der Punkte, deren jeder mit jedem anderen durch eine Linie so verbunden ist, daß keine dieser Linien eine der anderen schneidet. Beide Fragestellungen, die nach den Nachbargebieten und die nach den Nachbarpunkten, sind völlig koinzident. Um dies zu erkennen, denken wir uns n Nachbargebiete und nehmen in jedem derselben einen Punkt an; von einem dieser Punkte ziehen wir dann an die Grenzen der $n-1$ angrenzenden Gebiete je eine Linie und setzen diese Linien über die Grenzen hinaus fort bis zu den in den betreffenden angrenzenden Gebieten angenommenen Punkten. Der erste Punkt ist dann mit allen $n-1$ anderen Punkten durch je eine Linie verbunden, und durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man offenbar n Nachbarpunkte. Man erkennt so leicht, daß, wenn man umgekehrt von n Nachbarpunkten ausgeht, man zunächst die Punkte durch kleine Flächen ersetzen und diese dann so weit ausdehnen kann, daß sie sich alle längs gewisser Linien berühren, und man in dieser Weise n Nachbargebiete erhält. Diese Betrachtungen sind offenbar ganz unabhängig davon, auf was für einer Fläche die Nachbargebiete bzw. Nachbarpunkte verzeichnet sind.

Die Anzahl der Nachbargebiete in einer „einfach zusammenhängenden", d. h. nur von einer in sich zurücklaufenden Randlinie begrenzten Fläche war bereits von Adolph Weiske, einem Freunde des berühmten Mathematikers A. F. Moebius, zu 4 angegeben.[3]) Unsere Fig. 1 zeigt uns 4 solche Nachbargebiete

---

dien über die aus ringförmig geschlossenen Bändern durch gewisse Schnitte erzeugbaren Gebilde" (Leipzig 1890), p. 8.

1) L. c. p. 200.

2) L. c. p. 477 u. 485.

3) Siehe R. Baltzer, „Eine Erinnerung an Moebius und seinen Freund Weiske" Leipz. Ber., Math.-phys. Kl., Bd. 37, 1885, p 2 In diesem, in Moebius' Nachlaß vorgefundenen und jedenfalls vor 1840 zu datierenden Konzept Weiskes findet sich auch zuerst der Begriff der Nachbargebiete, die dort „spatia confinia" heißen.

1, 2, 3, 4, während die Punkte I, II, III, IV 4 Nachbarpunkte sind. Wenn also Moebius in einer Vorlesung vom Jahre 1840, wie Baltzer erzählt[1]), die Aufgabe stellte: „Ein indischer König wollte sein Reich unter seine 5 Söhne so teilen, daß das Gebiet jedes Sohnes mit denen der 4 anderen eine Grenzlinie, nicht bloß einen Punkt, gemein habe; wie war die Teilung auszuführen?" — so wollte Moebius von seinen Schülern die Antwort haben, daß die Aufgabe unlösbar sei.

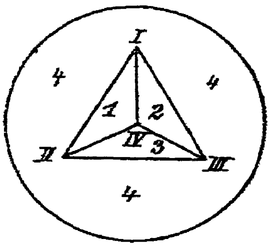


Fig. 1

Mit Angabe eines einzigen Beispiels von 4 Nachbargebieten ist zugleich erwiesen, daß die chromatische Zahl mindestens = 4 ist, mit anderen Worten, daß im allgemeinen für die Herstellung einer Karte im Sinne unseres Problems vier verschiedene Farben, wo nicht eine größere Zahl, erforderlich sind. Man überzeugt sich nun freilich, wie schon in § 1 gesagt wurde, auch ohne den noch fehlenden strengen Beweis, leicht, daß 4 Farben auch stets ausreichend sein werden. Zur Illustration geben wir in Fig. 2 ein Beispiel mit Angabe der 4 Farben *a*, *b*, *c*, *d*; zwei nur in einem Punkte zusammenstoßende Gebiete sind hier, wie ja gestattet, in derselben Farbe (*a* resp. *b*) gehalten, dagegen niemals 2 Gebiete mit gemeinsamer Grenzlinie.

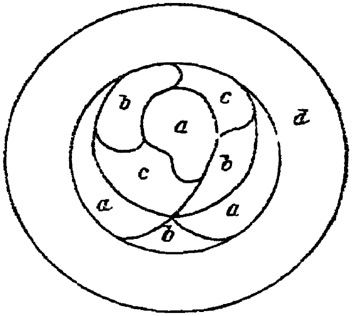


Fig 2

Wenn auch im allgemeinen 4 Farben erforderlich sind, so wird man doch in besonderen Fällen oft schon mit weniger auskommen So genügen z. B. nach einer Bemerkung Taits[2]) für Gebietseinteilungen, bei denen in jedem Knotenpunkt immer nur 3 Gebiete zusammenstoßen, auf alle Fälle schon 3 Farben; dabei bezeichnen wir mit dem Worte „Knotenpunkt", einem Ausdruck,

1) Baltzer, l c p 1.

2) Tait, „On the Colouring of Maps". Proceedings of the Royal Society of Edinburgh X, 1878—1880, p 502/503 Siehe a. die Nachträge hier S. 361/362

der uns ja übrigens bereits aus Kap XVI geläufig ist, alle die Punkte, in denen mehr als zwei verschiedene Gebiete zusammenstoßen. Ist die vorgelegte Karte gar so beschaffen, daß in jedem ihrer „Knotenpunkte“ ohne Ausnahme eine gerade Anzahl von Ländern (4, 6, 8. usw.) zusammenstößt, so genügen bereits 2 Farben[1]); das in 2 Farben ausgeführte Schachbrett ist das einfachste Beispiel dieser Art.

Es liegt nahe zu fragen, auf wieviele verschiedene Arten nun in 4 vorgegebenen Farben, etwa rot, blau, grün und gelb, eine bestimmte Karte den Forderungen unseres Problems gemäß sich ausführen läßt. A. C. Dixon hat diese Frage untersucht und hat für diese Möglichkeiten-Anzahl, die er mit φ bezeichnet, gewisse Reduktionsformeln hergeleitet.[2]) Aus diesen Formeln ist übrigens nicht zu ersehen, daß die Größe φ stets positiv ($\geqq 1$) sein muß; ein Beweis für den Vierfarbensatz wird also auch durch diese Untersuchungen nicht erbracht.

§ 3. Nachbargebiete auf der Ringfläche.

Gehen wir nun von einer einfach zusammenhängenden Fläche über zu einer Fläche von höherem Zusammenhang, also zu einer „Fläche vom Geschlecht 1“, wie man, im Gegensatz zu der vorher betrachteten als einer „Fläche vom Geschlecht 0“, die nächste Stufe zu nennen pflegt, so ist jetzt die Anzahl der Nachbargebiete eine größere als zuvor. Als Repräsentantin dieser Flächen denken wir uns eine Ringfläche, also etwa die Fläche, die durch Rotation eines Kreises um eine außerhalb desselben gelegene Achse entsteht. Es genügt nämlich, da die Zahl der Nachbargebiete nur vom Geschlecht der Fläche abhängt, einen Repräsentanten für jede Geschlechtszahl herauszugreifen, wie es ja bei der

1) Siehe Tait an der soeben zitierten Stelle, p. 501.

2) A. C. Dixon, „On map colouring“, The Messenger of Mathem. 32, 1902—1903 (London 1903), p. 81—83. — Siehe auch eine (mir nicht zugängliche) Arbeit von G. D Birkhoff, „A determinant formula for the number of ways of coloring a map“, Annals of Mathem. (2) 14, 1912, p. 42—46, sowie Bull. of the Amer. Math. Soc (2) 18, 1912, p. 489—490, und ferner B N. Cama, Educ. Times Reprints 72, 1900, p. 103—104 (Question 14149).

einfach zusammenhängenden Fläche offenbar auch ganz gleichgültig war, ob wir diese eben, kugelförmig oder sonstwie gekrümmt voraussetzten. Für die Ringfläche ist nun die Anzahl der Nachbargebiete, wie Heawood[1]) zuerst bemerkt hat, sieben. Fig. 3 veranschaulicht uns diese 7 Nachbargebiete der Ringfläche.

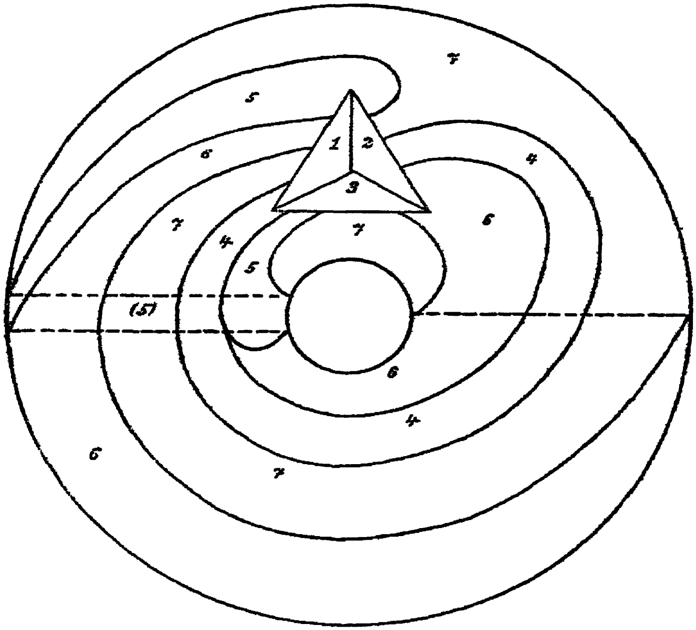


Fig. 3.

1) In der oben zitierten Arbeit von 1890, p. 334 Kempe hatte (l c p. 196) nur sechs Nachbargebiete angenommen; auch bei Ed Lucas, „Récréat. mathém.", t. IV, p. 170 resp. Revue scientifique (3) 6, 1883, p. 13 ist diese Zahl irrtümlicherweise angegeben. — Sechs ist übrigens, wie H Tietze („Einige Bemerkungen über das Problem des Kartenfärbens auf einseitigen Flächen", Deutsche Mathem.-Verein. Jahresber. 19, 1910, p. 155—159) gezeigt hat, die Anzahl der Nachbargebiete für das „Moebius'sche Blatt" (s. über dieses A F Moebius, „Gesammelte Werke", Bd II, herausg. von F Klein, Lpz. 1886, p 484f oder etwa M. Brückner, „Vielecke und Vielflache", Lpz. 1900, p. 54f.; über die Zeit der Entdeckung der einseitigen Polyeder durch Moebius s Curt Reinhardt in Moebius' Werken, l. c. p. 519 und für die gleichzeitige Entdeckung durch J. B. Listing s. P. Stäckel, „Die Entdeckung der einseitigen Flächen", Math. Ann. 52, 1899, p. 598—600).

Dabei müssen wir uns den inneren Kreis ausgeschnitten und an die gezeichnete Kreisringfläche unten noch ein gleiches Papierblatt angeheftet denken, so zwar, daß beide Blätter überall längs des äußeren und des inneren Grenzkreises zusammenhängen. Das auf der Fläche gezeichnete Liniensystem gibt dann eine Eintei-

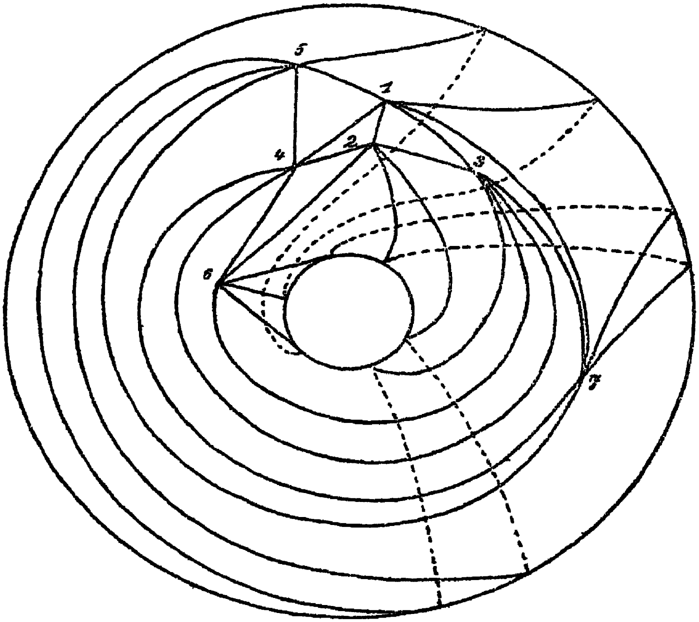


Fig. 4

lung der Fläche in 7 Nachbargebiete 1, 2, ... 7, wobei die punktierten Linien und ebenso der mit eingeklammerter Zahl bezeichnete Gebietsteil (5) als auf dem unteren Papierblatt liegend zu denken sind Abgesehen von diesem Gebiet (5) gehört von dem unteren Blatt die „südliche" Hälfte zum Gebiet 6 und die „nördliche" zum Gebiet 7. In derselben Darstellungsweise gibt Fig. 4 sieben Nachbarpunkte 1, 2, . . . 7 auf einer Ringfläche.

Für die Anzahl der Nachbargebiete auf Flächen vom Geschlecht $\geqq 1$ hat Heawood a. a. O. eine obere Grenze bestimmt und auch gezeigt, daß eine gleiche Anzahl von Farben für das Farbenproblem jedenfalls hinreichend ist; im Anschluß hieran hat dann Heffter in der oben zitierten Arbeit für eine große

Zahl von Fällen, die insbesondere die Flächen vom Geschlecht 1—7 einschließen[1]), den Beweis erbracht, daß jene Heawoodschen Maximalzahlen auch in der Tat erreicht werden, mithin so viele Farben auch wirklich nötig werden können. Dürften wir uns also etwa den Saturnring als eine feste, zusammenhängende Masse vorstellen und eine politische Einteilung seiner Oberfläche im Sinne unseres Problems voraussetzen, so würde die kartographische Darstellung dieser Ringoberfläche eventuell 7 verschiedene Farben erheischen, doch müßte diese Zahl jedenfalls ausreichend sein.

Damit ist denn das Farbenproblem für eine ganze Anzahl von Flächen höheren Geschlechts als erledigt anzusehen, während für den scheinbar einfachsten Fall, den der einfach zusammenhängenden Fläche, ein Beweis noch aussteht.

§ 4. Eine Verallgemeinerung des Kartenproblems.

Erheblich schwieriger gestaltet sich unser Problem, wenn der in § 1 ausgeschlossene Fall eintritt, daß verschiedene, ganz voneinander getrennte Gebietsteile zu derselben politischen Gemeinschaft gehören und infolgedessen gleichfarbig dargestellt werden sollen Die erforderliche Anzahl von Farben wird alsdann natürlich von der Anzahl der verschiedenen Teile abhängen So ist z. B im Falle der Fig 5 — Gebietseinteilung in 6 Staaten 1, 2, … 6, deren jeder aus 2 Landesteilen besteht, — offenbar für jeden Staat eine besondere Farbe erforderlich, weil jeder Staat an jeden der anderen 5 irgendwo längs einer Linie angrenzt.

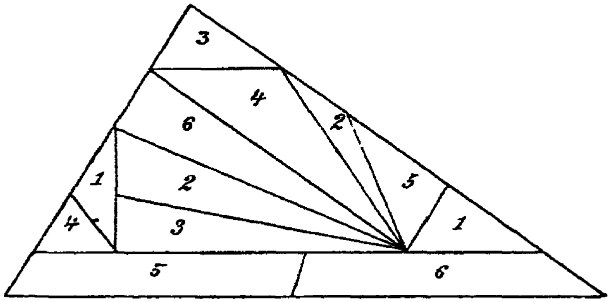


Fig. 5.

1) Bezüglich des Falles p (Geschlecht) $= 7$ s. H. Tietze, l c., p 158, Anm. 3

§ 5. Ein Satz von Tait.

The theorem has this provoking interest, that it mocks alike at doubt and proof.

T. P. Kirkman. Educ Times Reprints 35, 1881, p. 113

Probably the proof of this curious proposition has hitherto escaped detection from its sheer simplicity Habitual stargazers are apt to miss the beauties of the more humble terrestrial objects.

P. G. Tait Philos Mag. 1884, I, p 42.

In engstem Zusammenhange mit unserem Problem steht ein von P. G. Tait[1]) aufgestellter Satz, der so lautet: *Die Linien eines Liniensystems, dessen sämtliche „Punkte" von der Ordnung 1 sind und das keine „Brücke" besitzt, lassen sich so in 3 Klassen teilen, daß von jedem Punkt eine Linie aus jeder der 3 Klassen ausgeht.*[2]) In dem Beispiel der Fig. 6 haben wir die 3 Klassen bzw. durch 1, 2 und 3 Striche gekennzeichnet; von jedem Punkt geht dort eine „eingestrichene", eine „zweigestrichene" und eine „dreigestrichene" Linie aus.

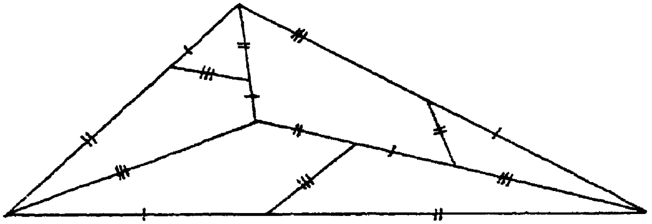


Fig. 6

Der Zusammenhang dieses Satzes mit dem Farbenproblem ist leicht zu erkennen: Sieht man die Fläche des Liniensystems

1) P. G. Tait, „Remarks on the previous Communication" Edinb. Roy. Soc. Proc. 10, 1878—1880 (1880), p. 729; Tait, „Note on a Theorem in Geometry of Position". Edinb. Roy. Soc. Trans 29, 1880, p. 657; Tait, „Listing's Topologie". Philosoph Magazine (5) 17, 1884, I, p. 40. — Siehe eventuell auch G. Brunel in den Mém de la soc. des sciences phys. et naturelles de Bordeaux (3) 5 (1890), Extraits des procès-verbaux, p. LXXXIX (5. VI. 1890).

2) Wir geben den Satz nicht mit Taits Worten, sondern in der von uns in Kap. XVI eingeführten Terminologie; man vgl. wegen derselben insbesondere S. 172 u. 173. — In der von J. Petersen („Die Theorie der regulären graphs." Acta mathem. 15, 1891, p. 193—220) und anderen benutzten Terminologie, die statt unseres „Liniensystems" den

als eine geographische Karte an und stellt sie in 4 Farben *a*, *b*, *c*, *d* dar[1]), so ergibt sich aus dieser Darstellung in 4 Farben eine Einteilung der Linien in 3 Klassen in Taitschem Sinne. Bezeichnet man nämlich eine Grenzlinie mit 1 Strich, wenn in ihr zwei Gebiete in den Farben *a* und *b* oder zwei in den Farben *c* und *d* zusammenstoßen, dagegen mit 2 Strichen, wenn die betreffenden Farben *a*, *c* oder *b*, *d*, und mit 3 Strichen, wenn sie *a*, *d* oder *b*, *c* sind, so erhält man notwendig in jedem Punkte eine Linie von jeder der 3 Klassen. Denn in jedem Punkt stoßen 3 Länder von verschiedenen Farben, sagen wir *a*, *b*, *c*, zusammen, und das gibt nach unseren Festsetzungen 3 verschieden gestrichene Grenzlinien.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß hiernach natürlich bei denjenigen Polyedern, die nur dreifache Ecken besitzen, — also unter den regulären beim Tetraeder, Würfel und Dodekaeder, — die Kanten sich so in 3 Klassen teilen lassen, daß die in irgendeiner Ecke zusammenstoßenden 3 Kanten stets von 3 verschiedenen Klassen sind. Für das Dodekaeder veranschaulicht Fig 7 dies, während für die beiden übrigen Körper die Verhältnisse so einfach liegen, daß eine nähere Erläuterung überflüssig ist (für das Tetraeder in Kap XVII, Fig. 8 angegeben). Beim Ikosaeder lassen sich übrigens, wie auch gleich bemerkt sein mag, die Kanten in 5 Klassen teilen derart, daß die 5 Kanten jeder Ecke verschiedenen Klassen angehören (s. Fig. 8, in der die Linien auch wieder je nach ihrer Klasse

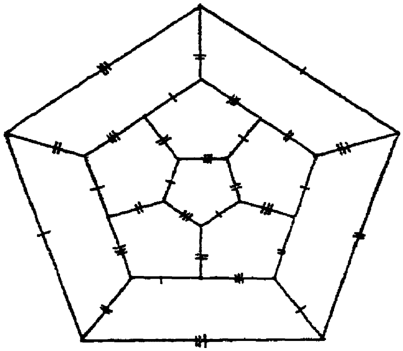


Fig. 7 Diagramm des Dodekaeders

von Clifford und Sylvester verwandten Ausdruck und Begriff „Graph" gebraucht, würde der Satz so lauten: „Ein Graph dritten Grades ohne Blätter kann in 3 Graphs ersten Grades zerlegt werden"; so z. B. in London Math. Soc. Proc. 34, 1902, p 267 (S. Roberts, „Networks").

1) Tatsächlich läßt sich ja dieser Fall, wie bereits oben (S 215) bemerkt, schon mit 3 Farben erledigen

durch 1 bis 5 Striche gekennzeichnet sind und außerdem jede Kante und die ihr gerade gegenüberliegende durch einen gleichen Buchstaben bezeichnet sind). Beim Oktaeder mit seinen

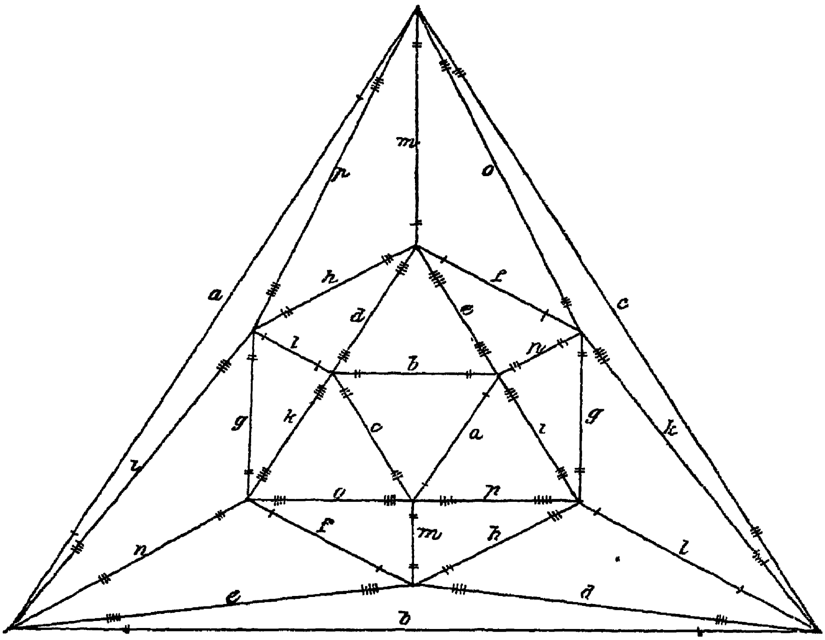


Fig 8. Diagramm des Ikosaeders

vierkantigen Ecken ist eine entsprechende Klasseneinteilung so leicht auszuführen, daß weitere Angaben unnötig sind.

Es mag weiter bemerkt werden, daß, wenn wir in Fig. 7 abwechselnd eine eingestrichene und eine zweigestrichene Linie durchlaufen, eine Lösung des Hamiltonschen Dodekaederproblems (s. Kap. XVII) sich ergibt; ebenso, wenn wir zwischen ein- und dreigestrichenen oder zwischen zwei- und dreigestrichenen Linien abwechseln. Für das Tetraeder hatten wir bereits in Kap. XVII, S. 208 nach dieser Methode Hamiltonsche Rundreisen konstruiert. Allgemein ergibt sich eine solche Rundreise für ein entsprechendes Liniensystem aus der Taitschen Dreiklasseneinteilung der Linien durch Fortnahme der Linien einer Klasse, wofern nicht hierdurch das Liniensystem in mehrere Teile zerfällt. — Umgekehrt liefert eine auf andere Weise hergeleitete

Hamiltonsche Rundreise für ein solches Liniensystem eine Taitsche Dreiklasseneinteilung der Linien. Denn bei einer solchen Rundreise bleibt von den je 3 Linien eines Punktes je eine unbenutzt; denken wir uns diese also überall fortgenommen, so reduziert sich das ganze Liniensystem auf eine geschlossene Kurve, gebildet von Linien des Systems. Versehen wir diese Linien abwechselnd mit 1 und 2 Strichen und die vorher fortgenommenen alle mit 3 Strichen, so haben wir eine Taitsche Klasseneinteilung.

Wie das 4-Farben-Theorem, so harrt auch dieser Taitsche Satz noch eines Beweises, ja er bedarf sogar noch weiterer Restriktionen; denn, auf beliebige Liniensysteme im Raume angewandt, ist er zweifellos nicht richtig. Ein Beispiel, für das der Satz nicht mehr gilt, hat J. Petersen angegeben[1]): Man denke sich ein 5-Eck $abcde$ und ein zweites $a'c'e'b'd'$ im Raume und nun immer je 2 gleichbenannte Ecken (a, a' usw.) durch eine Gerade verbunden, so entsteht ein räumliches Liniensystem von 10 Punkten, die alle von der ersten Ordnung sind. Bezeichnet man die 3 Linien eines beliebigen Punktes durch ein, zwei und drei Striche, so sind für die weitere Fortsetzung der Strichelung nur noch einige wenige Fälle möglich, jedoch wird man in jedem derselben bald auf die Unmöglichkeit einer Taitschen Klasseneinteilung geführt. Zweifellos richtig ist der Taitsche Satz nach Obigem dagegen stets, wenn das Liniensystem eine Hamiltonsche Rundreise gestattet.[2])

---

1) J. Petersen, Intermédiaire des mathématiciens, t V, 1898, p. 225—227, s a. v. dems. ibid. t VI, 1899, p. 36—38. Vgl. a. „Encyklop. der mathem Wissensch." III. 1, p. 177 (Dehn u. Heegaard) — Eine Figur zu diesem Petersenschen Beispiel, die wir hier für unnötig erachteten, gibt S Roberts in London Math. Soc. Proc. 34, p. 268 Übrigens versucht Roberts dort, die Taitsche Fassung des Satzes durch besondere Interpretation eines Wortes zu retten, doch darf diese Auslegung wohl als gezwungen und somit der Rettungsversuch als mißlungen bezeichnet werden; vor allem würde dadurch auch der Geltungsbereich des Taitschen Satzes wohl wesentlich stärker eingeschränkt als geboten ist.

2) Hierauf hat zuerst C. de Polignac ausdrücklich aufmerksam gemacht („Sur le théorème de Tait". Bull. soc mathém. de France XXVII, 1899, p. 142—145). — Siehe auch hier S. 362f.

§ 6. Das Problem im dreidimensionalen Raume.

Schon Frederick Guthrie[1]) hatte seinen Bruder Francis mehrfach dazu angetrieben, sein Farbentheorem auf dreidimensionale Verhältnisse auszudehnen, d.h. also, in unserer Ausdrucksweise gesprochen, die chromatische Zahl des dreidimensionalen Raumes zu bestimmen. Auch hier sind natürlich von wesentlichster Bedeutung die „Nachbargebiete“, worunter wir jetzt offenbar zu verstehen haben ein System von dreidimensionalen Gebieten von der Art, daß jedes dieser Gebiete mit jedem anderen eine Grenzfläche (nicht etwa nur eine Grenzlinie oder einen Grenzpunkt) gemein hat. Schon Frederick Guthrie sagt in seiner mehrfach zitierten Note, daß, ohne besondere Restriktionen, die mögliche Zahl solcher Nachbargebiete unbegrenzt groß sein würde, und erläutert dies näher. Nachmals hat dann P. Stäckel durch ein Beispiel dargetan, daß man im dreidimensionalen Raume Nachbargebiete in jeder gewünschten Anzahl konstruieren kann.[2]) Ein anderes, besonders glücklich gewähltes Beispiel hierfür gab H. Tietze[3]); es ist so einfach, daß wir einer Figur dabei völlig entraten können: Man denke sich eine Lage Balken, d. h. eine Reihe von Balken, von denen jeder unmittelbar neben den anderen gelegt ist; die Balken mögen alle denselben quadratischen Querschnitt haben und mögen so hingelegt sein, daß ihre Längsachsen gerade die Richtung Nord-Süd einnehmen Sodann legen wir auf diese erste Balkenlage eine zweite genau ebensolche mit dem einzigen Unterschiede, daß die Längsachsen dieser Balken die Richtung O—W haben sollen. Wir haben dann zwei Schichten von Balken, und jeder Balken der einen Schicht berührt jeden Balken der anderen Schicht und zwar in einer quadratischen Berührungsfläche, die gleich dem Balkenquerschnitt ist Nun

1) L. c. (Edinb. Roy. Soc. Proc. 10, 1878—1880), p. 728.

2) P. Stäckel, „Über Nachbargebiete im Raume“. Zeitschr f. Math. u. Phys. 42, 1897, p. 275—276.

3) H. Tietze, „Über das Problem der Nachbargebiete im Raume“. Monatshefte f. Math. u Phys. 16, 1905, p. 211, Anm. 3

denken wir uns die Balken der einen Schicht vom einen Ende bis zum anderen an den Stirnflächen gezeichnet als 1, 2, 3, 4 .... und entsprechend die Balken der anderen Schicht als 1′, 2′, 3′, 4′... Irgendein Balken i hat dann, wie wir rekapitulierend nochmals hervorheben, mit irgendeinem Balken k' eine quadratische Berührungsfläche gemein. Auch die Balken 1 und 1′ berühren sich in einer solchen Quadratfläche, und längs dieser Fläche wollen wir sie nun fest miteinander verbinden, etwa zusammennageln, so daß die Balken 1 und 1′ jetzt also einen Körper bilden; ebenso verfahren wir dann mit den Balken 2 und 2′, darauf mit 3 und 3′ usw. Wir haben jetzt eine Anzahl Körper: $1 + 1'$; $2 + 2'$; $3 + 3'$; $4 + 4'$... derart, daß jeder Körper mit jedem anderen eine oder vielmehr sogar mindestens zwei Berührungsflächen gemein hat (der Balken i berührte den Balken k' in einer quadratischen Fläche; i' berührte k ebenso in einer solchen Fläche, also der Körper $i + i'$ berührt den Körper $k + k'$ in mindestens zwei solchen quadratischen Flächen). Unser System von Körpern stellt also ein System von dreidimensionalen „Nachbargebieten" dar und, da wir die Zahl der anfänglichen Balken in jeder der beiden Schichten beliebig groß annehmen dürfen, so ist also durch dies Beispiel gezeigt, daß es für die Zahl räumlicher Nachbargebiete eine obere Grenze nicht gibt und diese in jeder beliebigen Anzahl vorkommen können.

Hieraus folgt sofort, daß *die chromatische Zahl im dreidimensionalen Raume und damit natürlich auch in allen noch höheren Räumen unbegrenzt ist.* — Auch P. Stäckels Frage, ob vielleicht die Beschränkung auf konvexe Gebiete zu einer endlichen Maximalzahl von Nachbargebieten führen werde, ist zu verneinen, indem H. Tietze gezeigt hat, daß auch von konvexen Nachbargebieten beliebig viele möglich sind.[1])

---

1) H. Tietze, l. c. (Monatsh. f. Math. u. Phys.), p. 211 ff.

Kapitel XIX.

Das Boss Puzzle oder Fünfzehner-Spiel.

Hunc ludum avidissime arripiunt Magistratus, et saepe maximam diei partem ludendo consumunt, nam inter ludendi peritos horam integram ludus unus tenet. Qui huius ludi peritus est, tametsi alia nulla re insignis fuerit, ab omnibus colitur, et evocatur.

Nic Trigaut über den „ludus sinicus“. De christiana expeditione apud Sinas suscepta ab societate Jesu. Rom 1615 Liber I, caput VIII, p. 90.

Wenn sie nicht hören, reden, fühlen,
Noch sehn, was thun sie denn? Sie spielen

M G. Lichtwer. „Fabeln in vier Büchern“, 3 Buch, Nr. II: „Die seltsamen Menschen“.

Hoher Sinn liegt oft in kind'schem Spiel.

Schiller Gedicht „Thekla“.

§ 1. Geschichte, Literatur und Beschreibung des Spiels.

Das Spiel soll gleich verschiedenen anderen Unterhaltungsspielen die Erfindung des Amerikaners S. Loyd sein, dess' Name in der Schachwelt, vorzüglich als der eines geistvollen Schachproblemkomponisten, wohlbekannt ist.[1]) Schon alsbald nach

---

1) Diese Belehrung über den Erfinder des Spiels verdanke ich einer mir nur im Ausschnitt vorliegenden Besprechung meiner „Mathem Spiele“, die in der Schweizerischen Schachzeitung vom September 1916 (oder 1917?) erschienen ist. Der freundliche Rezensent — E. V. — verweist für seine Angabe auf das Buch· Alain C. White, „Sam Loyd and his Chess Problems“, ein Werk, das ich freilich bei drei der größten deutschen Bibliotheken vergeblich bestellte und das ich mir anderweitig, da der gedachte Ausschnitt mir erst während der Korrektur dieses Kapitels zu Gesicht kam, nicht mehr beschaffen konnte. Eine Erzählung des berühmten englischen Mathematikers Sylvester. der bekanntlich längere Zeit in Amerika gelehrt hat, an Ed. Lucas (s. dessen „Récréat. mathém.“, I, p 189), wonach der Erfinder des Spiels ein taubstummer Amerikaner gewesen sei, beruht also wohl z. T. auf einer Legende und wird nur insofern richtig sein, als auch hier ein amerikanischer Ursprung angegeben wird. Für diesen spricht übrigens weiter

der Erfindung (1878) verbreitete das Spiel sich im Fluge über die ganze zivilisierte Welt, in den Ländern englischer Zunge „Fifteenth Puzzle“, in Deutschland „Boss Puzzle“ oder auch „Fünfzehner-Spiel“ und in Frankreich „jeu du taquin“ (Neckspiel) genannt, und entfesselte überall einen solchen Spieleifer, wie schwerlich ein anderes Geduldspiel je zuvor. Ein förmliches Puzzlefieber ergriff die Menschheit; da sah man selbst in den Pferdebahnwagen die kleinen Kästchen mit den 15 Holzklötzchen und unruhige Hände, die darin hin- und herschoben; in den Handelskontoren gerieten die Prinzipale über die Puzzlesucht ihrer Angestellten schier in Verzweiflung und verboten durch Anschläge das Spielen während der Geschäftszeit aufs strengste; spekulative Besitzer von Vergnügungsetablissements machten sich die Spielleidenschaft zunutze und veranstalteten große Puzzle-Turniere. So ungefähr beschreibt H. Schubert[1]) das Auftreten der Epidemie in Hamburg. „Ja, dieses Ding wirkte geradezu faszinierend. Ich sehe noch im Reichstage alte Herren vor mir, die starr auf das in der Hand gehaltene Viereck hinblicken“, so erzählt Siegmund Günther[2]), der hervorragende Geograph, Mathematiker und liberale Politiker, der in jenen Jahren, nämlich 1878—1884, dem Deutschen Reichs-

---

die Tatsache, daß das Spiel in der Literatur verschiedentlich ausdrücklich als ein „amerikanisches“ bezeichnet wird, beispielsweise an zwei so weit voneinander entlegenen Stellen, wie wir sie hier S 228, Anm 3 und S. 231, Anm., Z. 6 v u. angeben. Von Amerika ist denn auch zuerst und am gründlichsten die theoretische Belehrung über das Spiel gekommen (s. S. 230).

1) „Zwölf Geduldspiele“ (1895), p. 76 Siehe a v. demselben: „Theoretische Entscheidung über das Boss Puzzle-Spiel“ (Hamburg 1880, 2. Aufl), p. 15/16.

2) Briefliche Mitteilung (1915) Vgl. a ein Referat desselben in den von ihm zusammen mit K Sudhoff herausgegebenen „Mitteilungen zur Gesch. der Med. u. der Naturwissenschaften“, 15 Jahrg, 1916, p 210 bis 211, in dem es heißt: „Der Berichterstatter erinnert sich, daß um 1880 im deutschen Reichstagssaale auf den Bänken an der Wand Abgeordnete aller Richtungen, darunter würdevolle alte Herren, saßen, die den Rednern gar keine Aufmerksamkeit schenkten, aber eifrig ‚bosspuzzleten.‘“

tage angehörte. In Paris fand das Spiel auf den Boulevards unter freiem Himmel reißenden Absatz[1]), und bald war selbst in der Provinz kein noch so einsames Landhaus mehr, in dem nicht in irgendeinem Winkel sich das unvermeidliche „Taquin“ fand, wie eine Spinne der Opfer lauernd, die es in seine Netze verstricken könne. Eine förmliche Geißel der Menschheit, so erschien es einer französischen Zeitschrift[2]) jener Tage, „furchtbarer vielleicht noch für das Menschenhirn denn Tabak und Alkohol.“ „Wieviele Migräneanfälle, wieviel Kopfschmerzen, wieviele Neuralgien und Neurosen mag der ungenannte Erfinder des Spiels über seine Zeitgenossen heraufbeschworen haben“, ruft unser Autor in komischer Verzweiflung, halb im Scherz, halb im Ernst, aus.[3])

Im Jahre 1880 scheint das Puzzlefieber seinen Höhepunkt erreicht zu haben, und fast die ganze Literatur, die über das

---

1) Siehe Tissandier, La Nature VIII, 1880, 2ième semestre, p. 81.

2) Gazette anecdotique littéraire, artistique et bibliographique, publiée par G. d'Heylli, 5e année, t. II, Paris 1880, p. 58.

3) Auch ein „American Puzzle“, von dem in der Zeitschrift „The Indian Antiquary“ X, 1881 (Bombay 1881), p. 89 erzählt wird, daß es manche Leute auf der Suche nach der Lösung beinahe ins Tollhaus gebracht habe, wird sicher nichts anderes gewesen sein als unser Boss Puzzle. Der Verfasser jenes Artikels, George A Grierson, beruft sich hier auf eine mir unzugängliche Zeitschrift „The Pioneer“, doch begeht entweder er oder seine Quelle offenbar einen Irrtum, wenn als jenes „American Puzzle“ — die Herstellung eines magischen Quadrates aus den Zahlen 1 bis 16 bezeichnet wird, also ein Problem, das, wie Grierson übrigens selbst sagt, sehr alt ist und das schon nahezu 2 Jahrhunderte zuvor durch Frénicle de Bessy in aller nur wünschenswerten Vollständigkeit gelöst war (s. S. 5), das also unter keinen Umständen im Jahre 1880 noch geeignet sein konnte, den Menschen die Köpfe zu verdrehen. Die Verwechselung liegt übrigens nahe, da auch unser Puzzle, wie wir sehen werden, mit den Zahlen 1 bis 16, in quadratischer Anordnung der mit diesen Zahlen versehenen Spielsteine, operiert Allenfalls könnte es sich bei jenem „American Puzzle“ um die Herstellung eines magischen Quadrates durch Schieben der Steine, d. h im wesentlichen um eine Aufgabe unseres Boss Puzzle-Spiels, von der auch wir noch zu sprechen haben werden (s. S. 249/250), gehandelt haben, doch ist auch dies nicht gerade wahrscheinlich

Spiel existiert, gehört den wenigen Jahren von 1879 bis 1883 an (s. Anm. 2, S. 230f.). Von der allgemeinen Verbreitung, die unser Spiel in jenen Jahren besaß, mag auch der schon in Bd. I (S. 183, Anm. 1) genannte Spielschrein zeugen, den der Verein für deutsches Kunstgewerbe dem deutschen Kronprinzen, späteren Kaiser Friedrich, und seiner Gemahlin als Ehrengabe zur Silberhochzeit (25. Jan. 1883) darbrachte. Enthält dieser Schrein, ein Meisterwerk deutschen Kunstfleißes, doch unter insgesamt 30 verschiedenen Spielen (Karten-, Brett-, Gesellschafts- und Geduldspielen) auch unser „Fünfzehnerspiel". [1]) Unter all den Hunderttausenden von Puzzlespielen, die in jenen Jahren vor und nach 1880 hergestellt sind, wird dieses Spiel aus dem kronprinzlichen Spielschrein mit den kunstvoll verzierten Spielsteinen in dem mit Einlegearbeit geschmückten Ebenholzkasten nach Feinheit und Schönheit der Ausführung gewiß einzig dastehen. Es war der höchste Triumph des Puzzlespiels und zugleich auch sein letzter; denn damals längst schon war der Dämon, der so viele Menschen gequält und tyrannisiert hatte, zu Boden geworfen und gefesselt. Die Mathematik war es, die ihn überwunden hatte, und diese Knebelung war ihr sogar nicht einmal sonderlich schwer geworden, während sie die „Dämonen Alkohol und Tabak" auch auf ihrem ferneren Siegeszuge, mag dieser auch noch so ruhmvoll, noch so eroberungsreich sich gestalten, gewiß nie an ihren Triumphwagen ketten wird. Nun der Dämon durch die Waffen der Mathematik bezwungen war, lag die Quelle aller Qualen, die er über die Menschheit verhängt hatte, klar zutage: Zeigte doch die mathematische Theorie des Spiels, daß von all den vielen Puzzle-Aufgaben, die gestellt werden können, nur gerade die eine Hälfte lösbar ist, während die andere durch kein

1) Siehe das zu dieser Ehrengabe besonders herausgegebene Werk „Familien-Spiele aus dem im Besitz Ihrer Kaiserlichen und Königlichen Hoheiten des Kronprinzen und der Kronprinzessin des Deutschen Reiches und von Preußen befindlichen Spielschrein", Berlin 1886, Tafel 17; vgl. auch Franz Reuleaux, „Der Spielschrein des deutschen Kronprinzenpaares", Westermanns Illustr. Deutsche Monatshefte, Bd. 61, Okt. 1886 bis März 1887 p. 194 und (Abbildung) p 193.

auch noch so anhaltendes Sinnen und Brüten bezwungen werden kann. Jetzt war es offenbar, warum so manche Aufgabe auch den hartnäckigsten Bemühungen hatte trotzen können; jetzt war es klar, warum die Veranstalter von Puzzle-Turnieren für Lösung gewisser Aufgaben hohe Preise auszuloben hatten wagen dürfen, ohne daß auch nur Einer der zahlreich herbeigeströmten Preisbewerber die Siegespalme zu erringen vermocht hatte.[1]) — Von der großen Verbreitung unseres Spiels zeugt auch die Erscheinung, daß Mathematiker fast aller Kulturländer in jenen Jahren Arbeiten über die Theorie des Spiels veröffentlichten (s. Anm. 2). Als die ersten und eigentlichen Pfadfinder aber, deren Untersuchungen auch für verschiedene der übrigen Autoren richtungweisend und grundlegend waren, sind die amerikanischen Mathematiker Woolsey Johnson und William E. Story zu nennen, die eine erschöpfende Theorie des Spiels gaben.[2])

---

1) Wie ich den Angaben meines obengenannten Gewährsmannes aus der Schweizerischen Schachzeitung entnehme, veranlaßte der Erfinder unseres Spiels, S. Loyd, das Sonntagsblatt einer Newyorker Zeitung, einen Preis von 1000 Dollars für die Lösung einer bestimmten Puzzle-Aufgabe auszusetzen. Loyd selbst hinterlegte bereitwillig die Geldsumme; die Aufgabe gehörte natürlich zu den unlösbaren, und der Preis fiel daher niemandem zu.

2) Johnson, „Note on the ‚15‘ puzzle“. Amer. Journ. of Math. II, 1879, p 397—399; Story, „Note on the ‚15‘ puzzle“ Ibidem, p 399—404 Unabhängig von beiden und fast gleichzeitig entwickelte der berühmte englische Mathematiker P. G. Tait eine Theorie unseres Spiels, bei deren Publikation er sich jedoch mit Rücksicht auf die inzwischen erschienenen vorgenannten Arbeiten auf eine kurze Mitteilung beschrankte (s Tait, „Note on the Theory of the ‚15 Puzzle‘“, Roy Soc Edinburgh Proceedings X, 1880, p. 664—665). Von sonstigen englischen Mathematikern ist zu nennen: T. P. Kirkman, Educ. Times Reprints 34, 1880, p 113 bis 114; 35, 1881, p 29—30, der — ebenso wie der sogleich zu erwähnende G. Bellavitis — sich der Sprache der Substitutionentheorie bedient und die Theorie unseres Spiels in ein substitutionentheoretisches Gewand kleidet. Die Abhandlung von Persifor Frazer· „Three methods and forty-eight solutions of the Fifteen Problem“, Proc. of the Amer Philos Soc XVIII, July 1878—March 1880, p. 505—510; s a p. 419 (Vortrag vom 5. März 1880), vermag neben den vorgenannten, diesem Verfasser jedenfalls damals noch unbekannten Arbeiten kein stärkeres Interesse mehr

Doch, wir haben lange genug von der Geschichte des Spiels und seiner Literatur gesprochen, um endlich zu einer Beschreibung seiner Einrichtung zu kommen: In einem quadratischen Kästchen (s. Fig. 1) haben 16 numerierte Steine gerade Platz; ein Stein, ge-

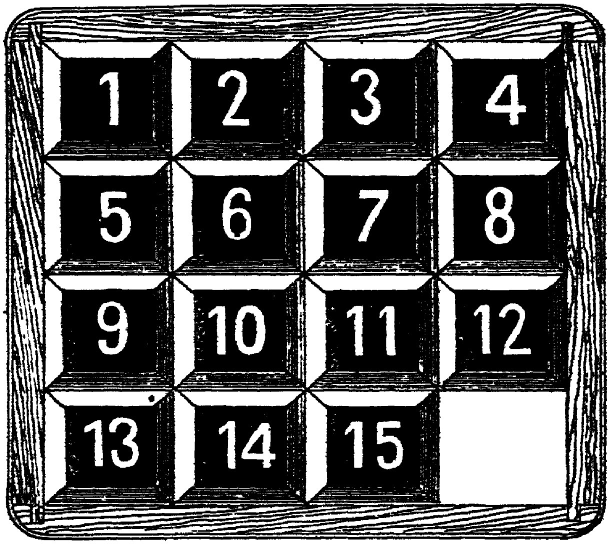


Fig. 1.

---

zu erregen. Von französischen Mathematikern nenne ich: Ch. Henry in der schon oben zitierten Gazette anecdotique, V^e année, t. 2, Paris 1880, p. 87—92, vgl auch Nouv ann de mathém. (2) 20, 1881, p 5, und Fleury, dessen Arbeit (1880; Nr 374 des „Index") mir jedoch nicht zugänglich war, sowie Ed Lucas, „Récr. mathém", t I (1882), p. 187 ff. (unter Hinweis auf die Arbeiten von Johnson und Story) Von deutschen: die schon oben (S. 227, Anm. 1) genannte Schrift H. Schuberts von 1880, s. a. „Sch" [Schubert] im „Hamburgischen Correspondenten" 1880, Nr 82, 6. April, S. 11; eine gleichfalls in Hamburg 1880 erschienene Schrift von L. Leopold (s. liter. Index) ist mir nicht zuganglich. Eine freilich erst später (1898?), bei einer Wiederauffrischung des Spiels in der Presse, erschienene Schrift (Privatdruck) von J Thomae ist mir nicht selbst, sondern nur aus brieflichen Mitteilungen des Herrn Verfassers bekannt. Auch der kleinen, noch unten zu erwähnenden Schrift Bernhard Cramer, „Lösung aller möglichen Stellungen des Spiel der Fünfzehn (Boss Puzzle)" (Leipzig, o J [1880?]) sei hier noch gedacht; einen Mathematiker hat sie allerdings wohl nicht zum Verfasser. Aus Italien ist zu nennen Giusto Bellavitis, „Giuoco americano", Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti (5) VI, 1879—1880, p. 901 bis 904; aus Holland P H Schoute in der Zeitschrift „Eigen Haard" 1883; aus Schweden: C. J Malmsten, „Generalisering af det s k ‚Femtonspelet' (Boss Puzzle-Spel)" Göteborgs kongl Vetenskaps-och Vitterhets-Samh. Handlingar, Ny Tidsföljd, XVII Häftet, 1882, p 75—105.

wöhnlich 16, wird beiseite gelegt, die anderen dagegen in beliebiger Ordnung in den Kasten getan. Die verschiedenen Horizontalreihen oder „Zeilen" wollen wir im folgenden, wie schon hier bemerkt sei, von oben nach unten als „erste", „zweite" usw. unterscheiden, ebenso die verschiedenen Vertikalreihen oder „Spalten", und zwar diese von links nach rechts gerechnet. Wir wollen ferner die 16 „Plätze" oder „Felder" des Brettes durch die Zahlen 1—16 entsprechend der Fig. 1 unterscheiden, so daß also z. B. „Platz 4" beständig das rechte Eckfeld der ersten Zeile bezeichnet, gleichgültig ob auf diesem Feld auch Stein 4, wie in Fig. 1, oder ein anderer Stein steht. „Platz 16" ist alsdann das äußerste Feld unten rechts.

Die Aufgabe des Spiels besteht darin, aus einer beliebigen anfänglichen Ordnung der Steine durch Verschiebungen, wie sie durch das leere Feld ermöglicht werden, die in Fig. 1 angegebene „normale" Ordnung herzustellen. Die Zahl der Anfangsstellungen ist sehr groß, nämlich:

$$16! = 20\,922\,789\,888\,000$$

oder, wenn man das leere Feld immer rechts unten annimmt,

$$15! = 1\,307\,674\,368\,000.$$

Von diesen Stellungen kann allerdings, wie wir schon oben bemerkten und späterhin (§ 3, S. 238f.) noch beweisen werden, nur die Hälfte in die verlangte Schlußstellung übergeführt werden.

§ 2. Das elementare Puzzle. Schlußstellungen des gewöhnlichen Puzzle.

Um das Verständnis zu erleichtern, schicken wir zunächst folgendes voraus: Wir denken uns ein rechteckiges Spiel von nur 6 Steinen, das „elementare Puzzle" (Fig. 2), und lösen für dieses zunächst die gestellte Aufgabe. Dabei wollen wir die vier Felder links (1, 2, 4, 5) kurz das „linke" Quadrat nennen und die vier rechts (2, 3, 5 und das leere Feld „6") das „rechte" Quadrat. Bei beliebiger Anfangsstellung läßt sich stets durch Verschieben erreichen, daß Stein 4 auf Platz 1 kommt und Platz 4 nicht leer bleibt. Be-

1	2	3
4	5	leer

Fig. 2.

findet sich dann 1) auf Platz 4 einer der Steine 2, 3, 5, so läßt sich offenbar durch Verschieben innerhalb des rechten Quadrats Stein 1 auf Platz 2 bringen, so daß wir also 4 auf Feld 1 und 1 auf Feld 2 haben und dann durch weiteres Verschieben aller Steine im umgekehrten Uhrzeigersinne 1 und 4 auf ihre bezüglichen richtigen Plätze bringen können. Ist aber 2), nachdem man Stein 4 auf Platz 1 gebracht hat, Platz 4 von Stein 1 besetzt, so verschieben wir zunächst die Steine so, daß 4 auf Platz 4 kommt, 1 auf Platz 5 und auf Platz 1 irgendein anderer Stein. Dann wird 1 durch Verschieben innerhalb des rechten Quadrats auf Platz 3 oder 6 gebracht und nun durch Verschieben innerhalb des linken Quadrats 4 wieder auf Platz 1, ohne daß 1 hierdurch verschoben wird, und dann durch Verschieben in dem rechten Quadrat 1 wieder auf Platz 2 und darauf, wie oben, 4 und 1 auf ihre normalen Plätze. — Die für die Steine 1 und 4 normale Stellung läßt sich also in jedem Falle erreichen, und es handelt sich somit nur noch um die Steine 2, 3, 5. Durch Verschieben innerhalb des rechten Quadrats läßt sich nun jedenfalls erreichen, daß 2 auf seinen normalen Platz kommt und zugleich das leere Feld nach 6. Die Aufgabe ist dann gelöst, wenn auch 3 und 5 auf ihren Plätzen sind. Anderenfalls, d. h. wenn 3 und 5 ihre Plätze vertauscht haben, erhalten wir die Stellung

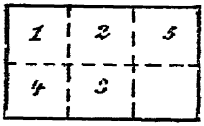


Fig 3.

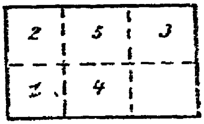


Fig 4

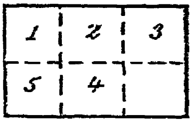


Fig. 5

der Fig. 3 als Endstellung, aus der sich auf dem Wege über Fig 4 als Schlußstellung auch die der Fig. 5 erreichen läßt, die wir weiterhin kurz „Schlußstellung II“ nennen wollen.

Hiernach gestaltet sich nun die Lösung für den Fall der 16 Felder folgendermaßen (s Fig. 1): Zunächst schiebt man leicht den Stein 1 an seinen normalen Platz, sodann auch, ohne 1 wieder zu verschieben, den Stein 2 auf seinen Platz, und darauf bringt man, ohne 1 und 2 zu rühren, die Steine 3 und 4, wie auch das leere Feld, irgendwie in die beiden letzten Spalten. Dann lassen sich inner-

halb dieser beiden letzten Spalten nach demselben Verfahren, das wir soeben im sechsfeldrigen Puzzle (Fig. 2) für die Steine 1 und 4 befolgten und das hier im achtfeldrigen Gebiete umsomehr anwendbar sein muß, die Steine 3 und 4 auf ihre normalen Plätze bringen. Damit ist die erste Zeile hergestellt uud wird nun nicht mehr geändert. Entsprechend läßt sich offenbar auch die zweite Zeile — als oberste des 12-feldrigen Puzzles der drei letzten Zeilen — herstellen, so daß nur noch die beiden letzten Zeilen übrigbleiben. In diesen bringt man zunächst nach dem oben für das „elementare Puzzle“ (Fig. 2) dargelegten Verfahren die Steine 9 und 13 an ihre Plätze; dann handelt es sich nur noch um die sechs den beiden letzten Zeilen und drei letzten Spalten angehörigen Felder. Hier stellt man, und zwar gleichfalls nach dem oben dargelegten Verfahren, die normale Ordnung her oder aber man gelangt zu einer Schlußstellung, bei der alle Steine am richtigen Platze stehen und nur 14 und 15 vertauscht sind (vgl. Fig. 5), einer Stellung, die wir auch hier als „Schlußstellung II“ im Gegensatz zu der ersten oder der „normalen“ bezeichnen[1]) wollen. Wir erhalten so folgendes Resultat:

Satz 1: *Jede beliebige Stellung läßt sich in die „normale“ Stellung oder in die „Schlußstellung II“ überführen.*

Ob u. U beides — die Überführung in die normale und die in die Schlußstellung II — für ein und dieselbe Anfangsstellung geleistet werden kann, mag hier vorläufig noch unentschieden bleiben; uns genügt zunächst, daß eine dieser beiden Überführungen in jedem Falle möglich ist.

§ 3. Die mathematische Theorie des Spiels.

Die Operationen des Spiels oder die „Züge“ sind dadurch charakterisiert, daß auf das jeweils leere Feld der Stein eines

1) Seltsame Namen für die beiden Schlußstellungen — „Aryan“ und „Semitic arrangement“ — gibt, nach dem Vorschlage eines Dr Crum Brown, P G Tait an (Roy. Soc. Edinburgh Proc 10, 1880, p. 665). Auch für die Stellungen, die aus der normalen Stellung durch Drehung um 90° in dem einen oder anderen Drehungssinne hervorgehen, hat derselbe Aufsatz Namen in Bereitschaft, die nicht minder seltsam sind: „Chinese“ und „Mongol arrangement“

der benachbarten („kollateralen") Felder gezogen wird; bei jedem einzelnen Zuge wandert also sozusagen das leere Feld um einen Platz und zwar entweder in horizontaler oder aber in vertikaler Richtung. Natürlich könnten wir uns auch, wie es z. B. T. P. Kirkman tut[1]), das „leere Feld" besetzt denken mit einem sichtbaren oder unsichtbaren „König", der nun beständig mit einem Stein eines der kollateralen Felder vertauscht würde. Halten wir jedoch an der Vorstellung des wandernden leeren Feldes fest und befand sich dieses zuächst etwa unten rechts, auf Platz 16, so muß, wenn nach einer gewissen Anzahl von Zügen das leere Feld wieder auf Platz 16 angelangt ist, die Anzahl der inzwischen ausgeführten horizontalen Züge, für sich genommen, gerade sein und ebenso die Anzahl der vertikalen Züge. Denn jeder horizontale Zug ebenso wie auch jeder vertikale muß durch einen anderen in gerade entgegengesetzter Richtung wieder aufgehoben werden, wenn das leere Feld wieder an dieselbe Stelle zurückkehren soll. Offenbar gilt dies auch, wenn in der Anfangs- und Endstellung nicht gerade Platz 16, sondern irgendein anderer Platz, wofern nur in beiden Stellungen derselbe, leer ist. Wir erhalten so:

Hilfssatz 1: *Die Anzahl der Züge, die eine Stellung in eine andere mit demselben leeren Felde überführen, ist stets gerade und zwar sowohl die der vertikalen Züge, für sich genommen, wie auch die der horizontalen.*

Wir denken uns nun eine beliebige Stellung, mag sie zu Beginn des Spiels gegeben sein oder sich im Laufe des Spiels ergeben haben, dadurch gekennzeichnet, daß wir die Zahlen der Steine alle nebeneinander hinschreiben und zwar in der Reihenfolge nach den Nummern ihrer Plätze (s. Fig 1), wobei wir das leere Feld ignorieren So wäre beispielsweise die Stellung Fig. 6a (S. 240) gekennzeichnet durch die Reihe der Zahlen: 1, 4, 7, 9, 3, 5, 8, 14, 15, 13, 11, 10, 2, 12, 6. Bei dieser Schreibweise richten wir unser Augenmerk nun auf die Anzahl der „Inversionen", d. h. auf die Anzahl derjenigen Fälle, in denen eine

1) An den in Anm. 2, S. 230 angegebenen Stellen

größere Zahl einer kleineren in unserer Reihe vorangeht. In unserem Beispiel schließt die Stellung der ersten Zahl (1) natürlich keine Inversion in sich, die der zweiten (4) offenbar 2 Inversionen, da die Zahl 4 den kleineren Zahlen 3 und 2 vorangeht, die der dritten Zahl (7) 4 Inversionen usw. Wir denken uns nun einen „Zug“ ausgeführt und legen uns die Frage vor, welche Änderung hierdurch in der Gesamtzahl der Inversionen, die vorher ausgerechnet sein mag, eintritt. Da offenbar ein Zug in horizontaler Richtung an der Zahl der Inversionen nichts ändert, so interessieren uns nur Züge in vertikaler Richtung, also Züge, die darin bestehen, daß ein Stein — im Sinne der Ordnung nach den Platznummern — vor bzw. hinter 3 andere Steine gerückt wird. Wir unterscheiden nun hierfür folgende zwei Fälle: Die Nummer des gerückten Steins verhält sich zu den Nummern jener übersprungenen 3 Steine so, daß sie 1) größer bzw. kleiner als jede der 3 ist oder aber 2) größer als 2 derselben und kleiner als die dritte bzw. kleiner als 2 derselben und größer als die dritte ist. In dem ersten Falle ändert sich die Zahl der Inversionen durch den betreffenden Zug um 3, indem entweder 3 neue Inversionen entstehen oder 3 alte aufgehoben werden; im zweiten Falle dagegen ändert sich die Zahl der Inversionen um eine, indem entweder zwei neue entstehen und eine alte aufgehoben wird oder eine neue entsteht und zwei alte aufgehoben werden. Auf jeden Fall bringt also ein vertikaler Zug stets eine Änderung der Inversionenanzahl um eine ungerade Zahl[1]) mit sich, und wir erhalten also:

1) Da jeder Zug als „Transposition“, d. h als Vertauschung zweier Elemente: des gezogenen Steins und eines fingierten Steins 16 (resp. des „Königs“), aufgefaßt werden kann, so hätten wir unsere Betrachtungen natürlich auch auf die allgemeinere Basis des Satzes stellen können, daß sich die Summe der Inversionen aller Elemente einer Permutation (jetzt unter Einrechnung des fingierten Steins 16) bei jeder Vertauschung zweier Elemente um eine ungerade Zahl ändert. Für diesen von Bézout herrührenden und von Laplace bewiesenen Satz sei z. B. verwiesen auf R. Baltzer, „Determinanten“ (Leipzig 1881, 5. Aufl.), p 1 Übrigens werden wir bestrebt sein, die wesentlichsten Teile der Spieltheorie zu entwickeln, ohne dabei die Bekanntschaft dieses wenn auch sehr einfachen Satzes voraussetzen zu müssen.

Hilfssatz 2: *Durch das horizontale Verschieben eines Steins ändert sich die Anzahl aller Inversionen gar nicht, durch das vertikale Verschieben dagegen stets um eine ungerade Zahl (1 oder 3).*

Da nun die Anzahl der vertikalen Züge, die von einer Anfangsstellung zu einer daraus hergeleiteten Endstellung führen, beide Stellungen mit dem leeren Feld unten rechts angenommen, gerade ist (Hilfssatz 1), so können sich also Anfangs- und Endstellung stets nur um eine gerade Anzahl von Inversionen unterscheiden. Die „normale" Endstellung hat nun keine, d. h. eine gerade Anzahl Inversionen; die *notwendige* Bedingung für die Überführung einer beliebigen Anfangsstellung (mit dem leeren Feld auf Platz 16) in die „normale" Stellung ist also die, daß die Anfangsstellung auch eine gerade Anzahl von Inversionen besitzt. Diese Bedingung ist aber auch bereits *hinreichend*: Sahen wir doch oben (Satz 1), daß jede Anfangsstellung sich in die „normale" oder in die „Schlußstellung II" überführen läßt; letzteres ist nun aber, wenn die Anfangsstellung eine gerade Anzahl von Inversionen aufweist, ausgeschlossen, weil die „Schlußstellung II" eine: (15—14), d. h. eine ungerade Anzahl Inversionen aufweist Es ergibt sich somit:

Kriterium I: *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Überführbarkeit einer vorgelegten Stellung mit dem leeren Felde auf Platz 16 in die normale Schlußstellung ist die, daß die betreffende Stellung eine gerade Anzahl von Inversionen aufweist.*

Aus diesen Betrachtungen ergeben sich weiter folgende unmittelbare Konsequenzen:

Die „Schlußstellung II" kann als eine Stellung von ungerader Inversionenzahl niemals in die normale Schlußstellung übergeführt werden. Ebensowenig kann eine beliebige Anfangsstellung von ungerader Inversionenzahl (mit dem leeren Felde auf Platz 16) in die normale Schlußstellung übergeführt werden; sie muß dann also, da nach Satz 1 das eine oder das andere stets möglich ist, in die „Schlußstellung II" überzuführen sein

Ganz entsprechend der zu Kriterium I führenden Deduktion folgt, daß eine beliebige Anfangsstellung, das leere Feld stets

auf Platz 16 vorausgesetzt, *dann und nur dann* in die „Schlußstellung II“ übergeführt werden kann, wenn sie eine ungerade Anzahl Inversionen aufweist. Wir sehen somit, daß die am Ende von § 2 offengelassene Frage, ob es Stellungen gibt, die sich sowohl in die „normale“ wie in die „Schlußstellung II“ überführen lassen, zu verneinen ist. Vielmehr spalten sich alle Anfangsstellungen in zwei Gruppen: diejenigen mit gerader und diejenigen mit ungerader Inversionenzahl. Erstere lassen sich sämtlich in die normale Endstellung überführen; sie stellen, da diese normale Stellung das Ziel unseres Spiels ist, die „lösbaren“ Aufgaben dar. Die Stellungen der zweiten Gruppe dagegen lassen sich alle in die Schlußstellung II überführen, aber nicht in die normale Stellung; sie gestatten also die Erreichung des vorgesteckten Ziels nicht, und repräsentieren somit die „unlösbaren“ Fälle.

Wie bereits oben (in § 1) mehrfach beiläufig bemerkt wurde, ist die Zahl der „lösbaren“ Aufgaben ebenso groß wie die der „unlösbaren“, und wir sind jetzt in der Lage, für diese Behauptung den oben schuldig gebliebenen Beweis zu erbringen, etwa so: Es sei U eine beliebig vorgegebene Anfangsstellung, die sich etwa als „unlösbar“ herausstellt, d. h. die sich durch eine Kette von Zügen in die Schlußstellung II überführen läßt. Wir nehmen nun in der Stellung U die Steine 14 und 15 aus dem Spielkasten heraus und lassen sie beide ihre Plätze gegeneinander austauschen; aus der Stellung U ist jetzt eine andere Stellung geworden, die wir L nennen und auf die wir nun genau dieselbe Kette von Zügen anwenden wollen, die vorher auf U angewandt werden mußten, um dieses in die Schlußstellung II überzuführen Nichts hat sich seitdem geändert als daß Stein 15 jetzt beständig die Rolle von 14 spielt und umgekehrt. Was wird also jetzt resultieren? Offenbar die normale Stellung, da sie sich ergibt, wenn in Schlußstellung II die Steine 14 und 15 miteinander vertauscht werden. Die Stellung L ist somit „lösbar“, und wir erkennen allgemein: *Eine beliebige unlösbare Stellung geht, wenn man die Steine 14 und 15 miteinander vertauscht, in eine losbare über.* — Dies ganze Räsonnement läßt sich offenbar umkehren,

und man sieht, daß umgekehrt auch jede lösbare Stellung durch Vertauschung der Steine 14 und 15 in eine unlösbare übergeht.[1]) Denkt man sich nun in einer langen Reihe alle lösbaren Stellungen hingeschrieben und darunter, in einer zweiten Reihe, dieselben Stellungen, jedoch mit Vertauschung von 14 und 15, nochmals, so enthält diese untere Reihe lauter unlösbare Stellungen und zwar sind diese unter sich alle verschieden; denn wenn etwa zwei gleiche darunter wären, so müßten offenbar auch die darüberstehenden beiden lösbaren Stellungen der ersten Reihe einander gleich sein. Andererseits enthält die zweite Reihe auch sämtliche unlösbaren Stellungen; denn, wenn eine darin fehlte, so brauchte man in dieser nur 14 und 15 zu vertauschen und erhielte alsdann eine lösbare Stellung, die in der ersten der beiden Reihen noch nicht vorkäme, während diese Reihe doch unserer Annahme nach vollständig sein sollte. Da mithin lösbare und unlösbare Stellungen sich in dieser Anordnung umkehrbar eindeutig entsprechen, so ist damit unsere Behauptung, daß die Anzahl der einen ebenso groß wie die der anderen sei, bewiesen.

---

1) Dies alles gilt übrigens nicht nur für die Vertauschung der Steine 14 und 15, sondern überhaupt für die Vertauschung zweier beliebiger Steine aus der Reihe 1 bis 15; denn infolge jeder Vertauschung von zwei Elementen ändert sich nach dem S. 236, Anm 1 angegebenen Satze die Inversionenzahl um eine ungerade Zahl, und das bedeutet ja, daß eine lösbare Stellung in eine unslösbare übergeht und umgekehrt Somit führt jede Vertauschung von zwei Steinen eine lösbare Stellung in eine unlösbare über und umgekehrt. Besitzt das Spiel zwei Steine mit gleicher Nummer, ist z B der Stein 15 durch einen zweiten Stein 14 ersetzt, so hört demnach überhaupt der Unterschied zwischen lösbaren und unlösbaren Stellungen auf, und in jedem Falle ist dann die normale, d. h. von Inversionen freie Ordnung zu erreichen. Hierauf beruht die unbedingte Lösbarkeit eines verwandten, von Fleury erfundenen und „Caméléon“ benannten französischen Spiels. Über dieses und andere dem Puzzle verwandte Spiele Fleurys s. Lucas, „Récréat.“, t. III, p 89 bis 99, 155—158; t IV, p. 240—254, sowie auch Fleury im Intermédiaire des mathématiciens t I, 1894, p. 215—216 (vgl p 35); t V, 1898, p 159 bis 160 (vgl. p 28). — Über eine besondere Vertauschung zweier Steine, nämlich 6 und 9, im Falle unseres Puzzle s übrigens S 248.

Nachdem wir so die mathematische Theorie unseres Spiels in ihren Grundzügen entwickelt haben, wollen wir einige spezielle Beispiele auf die Frage der Lösbarkeit oder Unlösbarkeit hin betrachten:

1	4	7	9
3	5	8	14
15	13	11	10
2	12	6	

Fig 6a.

9	14	10	6
7	8	11	12
4	5	13	2
1	3	15	

Fig. 6b

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
15	14	13	

Fig 6c.

Wir bestimmen für jede Stellung die Zahl der Inversionen und erhalten so für Fig. 6a:

$$0+2+4+5+1+1+2+6+6+5+3+2+0+1,$$

d. h. eine gerade Zahl; die Aufgabe ist also lösbar. Für Fig. 6b dagegen ist die Anzahl der Inversionen:

$$8+12+8+5+5+5+5+5+3+3+3+1,$$

also eine ungerade Zahl, und die Aufgabe ist demnach unlösbar Ebenso weist die Stellung Fig. 6c, die — abgesehen natürlich von der als fest beibehaltenen Lage des leeren Feldes — das Spiegelbild der „normalen“ Stellung (Fig. 1) ist, eine ungerade Anzahl Inversionen (je 6 in den 3 ersten Zeilen, 3 in der letzten) auf, gehört also zu der Gruppe der unlösbaren Aufgaben.

Da offenbar jeder Zug und jede Kette von aufeinanderfolgenden Zügen umkehrbar ist, so gilt, daß, wenn irgendeine Stellung S_1 sich in die Stellung S_2 überführen läßt, auch umgekehrt S_2 in S_1 übergeführt werden kann. Hieraus folgt, daß, wenn zwei Stellungen S_1 und S_2 sich in ein und dieselbe dritte, S_3, überführen lassen, sie auch ineinander überführbar sind; denn von S_1 könnte man zu S_3 und von hier zu S_2 gelangen. Es ergibt sich so, daß alle Stellungen der ersten Gruppe, d. h. alle „lösbaren“ Stellungen, sich ineinander überführen lassen; ebenso alle „unlösbaren“ unter sich. Als kanonische Stellung

dieser letzteren Gruppe, in die alle anderen überführbar sind, können wir daher statt der bisher hierfür verwandten „Schlußstellung II" auch irgendeine andere Stellung der Gruppe, z. B. das Spiegelbild der „normalen" Stellung, die Stellung unserer Fig. 6c also, verwenden, und können daher unser bisheriges Kriterium so aussprechen:

Kriterium I^a: *Eine beliebige Stellung mit dem leeren Felde auf Platz 16 läßt sich bei gerader Inversionenzahl in die normale Stellung, bei ungerader in das Spiegelbild dieser (Fig. 6c) überführen.*

Zusammenfassend können wir die bisherigen Ergebnisse so aussprechen:

Satz 2: *Alle Stellungen, die — bei einem leeren Felde auf Platz 16 — eine gerade Anzahl von Inversionen aufweisen, bilden für sich eine Gruppe, dergestalt, daß von irgend zwei dieser Stellungen die eine in die andere übergeführt werden kann; sie sind alle insbesondere in die normale Stellung überführbar*[1]*, stellen also durchweg „lösbare" Fälle unseres Spiels dar. Ebenso bilden alle Stellungen, die — bei einem leeren Felde auf Platz 16 — eine ungerade Anzahl von Inversionen aufweisen, eine zweite Gruppe ineinander überführbarer Stellungen; alle Stellungen dieser Gruppe lassen sich insbesondere in das Spiegelbild der normalen Stellung (Fig. 6c) überführen. Eine Stellung der einen Gruppe kann niemals in eine der anderen übergeführt werden; die Stellungen der zweiten Gruppe sind daher insbesondere niemals in die normale Stellung überzuführen, stellen also durchweg „unlösbare" Fälle unseres Spiels dar.*

---

1) Auf die Frage, welches die für diese Überführung erforderliche Mindestzahl von Zügen ist, soll hier nur beiläufig hingewiesen werden: sie ist zwar aufgeworfen (H. Schubert, „Theoretische Entscheidung über das Boss Puzzle-Spiel", Hamburg 1880, 2 Aufl., p. 16), bisher aber wohl nirgends näher erörtert worden. Interessant ist ferner folgende Frage: Denkt man sich für alle „lösbaren" Stellungen diese Mindestzahl von Zügen, die zur Überführung in die normale Stellung erforderlich sind, bestimmt, welches ist ihr größter Wert? Für wieviele und für welche Stellungen gilt dieser maximale Mindestwert?

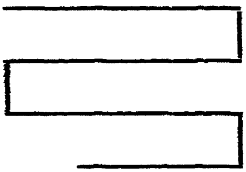
Verlangt man übrigens als Endstellung nicht gerade eine solche, in der das leere Feld auf Platz 16 sich befindet, so läßt sich als Repräsentantin der unlösbaren Stellungen noch eine andere, mindestens ebenso bequem wie die der Fig. 6c zu merkende Stellung angeben, nämlich die der Fig. 7. Daß sie zu den unlösbaren Stellungen gehört, erkennt man leicht, wenn man der Reihe nach die Steine 4, 8, 12, 13, 14, 15 auf das leere Feld schiebt: wir haben das leere Feld dann, wie verlangt, auf Platz 16, und die Zahl der Inversionen ist in jeder der drei ersten Zeilen = 3, die Gesamtzahl also ungerade. Wir erhalten somit als erreichbare Endstellung für die Aufgaben der zweiten Gruppe die der Fig. 7, also eine Stellung, in der die Steine gleichfalls in ihrer natürlichen Ordnung aufeinander folgen. Wenn wir uns also hiermit begnügen würden, so wären alle Aufgaben des Puzzle-Spiels als lösbar anzusehen. Das so erhaltene Resultat sprechen wir so aus:

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Fig 7.

Zusatz I zu Satz 2: *In jeder beliebigen Stellung läßt sich die natürliche Ordnung der 15 Steine stets herstellen und zwar entweder so, daß das leere Feld am Ende der Reihe (Fig 1; erste Gruppe) oder aber an deren Anfang (Fig. 7; zweite Gruppe) liegt.*[1])

Eine andere charakteristische Stellung aus der zweiten Gruppe (Gruppe der unlösbaren Aufgaben) erhält man, wenn man die Zahlen in der Reihenfolge des nebenstehenden Linienzuges in das Quadrat einträgt, also so, wie Fig. 8 angibt.[2]) Verschiebt man nämlich die Steine der letzten



1) Mitteilung einer Frau S. B in Amsterdam an P. H. Schoute, publiziert von diesem in der Zeitschrift „Eigen Haard" 1883, p. 604; ferner briefliche Mitteilung des Herrn Geh. Rat Prof. J. Thomae in Jena an den Verfasser (1908), vorher publiziert in dessen schon oben (S. 231, Anm.) erwähntem Privatdruck über das Puzzle-Spiel.

2) Ich entnehme diese Stellung der oben (S. 230, Anm. 2) zitierten Arbeit von Persifor Frazer.

Zeile der Fig. 8 nach links, so ist das leere Feld auf Platz 16 und die Zahl der Inversionen in der zweiten Zeile = 6, in der vierten = 3, also die Gesamtzahl der Inversionen ungerade, die Stellung mithin unlösbar.

1	*2*	*3*	*4*
8	*7*	*6*	*5*
9	*10*	*11*	*12*
	15	*14*	*13*

Fig 8.

Unser Kriterium I resp. I[a] entscheidet die Frage, zu welcher der beiden Gruppen eine gegebene Stellung gehört, unter der Voraussetzung, daß das leere Feld der betreffenden Stellung sich auf Platz 16 befindet. Emanzipieren wir uns hiervon und fragen wir, wann zwei vorgegebene Stellungen, deren leere Felder sich auf irgendwelchen Plätzen befinden, ineinander überführbar sind, so ergibt sich zunächst das folgende Kriterium:

Kriterium II: *Um die Überführbarkeit zweier Stellungen mit beliebigen leeren Feldern ineinander zu prüfen, ändere man — mit wenigen Zügen — beide Stellungen so, daß das leere Feld für beide dasselbe ist, und bestimme dann für diese beiden neuen Stellungen die Anzahl der Inversionen. Unterscheiden sich dieselben um eine gerade Anzahl, so sind beide Stellungen ineinander überführbar; sonst nicht.*

Der Beweis ergibt sich leicht folgendermaßen. Es seien S_1 und S_2 die beiden ursprünglichen Stellungen, S_1' und S_2' die beiden neuen mit demselben, aber an sich beliebigen leeren Felde, i_1' die Anzahl der Inversionen von S_1' und i_2' die von S_2', $d = i_1' - i_2'$ die Differenz zwischen beiden[1]); es mag ferner S_1' in die Stellung S_1'' mit dem leeren Felde auf Platz 16 übergehen, und hierbei mag die Zahl der Inversionen sich um die Größe k_1 ändern, so daß die Anzahl der Inversionen für S_1'' also $i_1' \pm k_1$ beträgt Läßt man nun, von S_2' ausgehend, das leere Feld genau dieselbe Wanderung, wie soeben beim Übergang von S_1' zu S_1'', beschreiben, so kommt man zu einer Stellung S_2'' mit dem leeren Felde auf Platz 16 und mit entsprechend $i_2 \pm k_2$ Inversionen, und zwar sind k_1, k_2 beide gerade (Hilfssatz 2), wenn zu diesem Übergang von

1) Würden wir ausdrücklich voraussetzen, daß i_1' die größere der beiden Zahlen sei, so würde diese Annahme keine Beschränkung involvieren; jedenfalls darf man aber bei dieser Differenz $i_1' - i_2'$ sich auf den absoluten Betrag beschränken, ohne daß wir dies hier, wie auch weiterhin in entsprechenden Fällen, durch ein besonderes Zeichen angedeutet haben.

S_1' zu S_1'' resp. von S_2' zu S_2'' eine gerade Anzahl vertikaler Züge erforderlich waren, im anderen Falle dagegen k_1, k_2 beide ungerade. Jedenfalls sind mithin $k_1 \pm k_2$ gerade Zahlen. Je nachdem nun $i_1' \pm k_1$ gerade oder ungerade ist, gehören S_1'', S_1', S_1 nach Kriterium I zu den lösbaren oder aber zu den unlösbaren Stellungen, und für S_2'', S_2', S_2 hängt dieselbe Frage von der Größe $i_2' \pm k_2$ ab. Beide Stellungen S_1 und S_2 gehören also dann und nur dann zu derselben Gruppe, d. h. sind ineinander überführbar, wenn die Größen $i_1' \pm k_1$ und $i_2' \pm k_2$ entweder beide ungerade oder beide gerade sind; diese Bedingung fällt aber, da $k_1 \pm k_2$ gerade ist, damit zusammen, daß $i_1' - i_2' = d'$ gerade ist, und das war es ja, was wir beweisen wollten.

An Stelle des Kriteriums II läßt sich, wenn die Antwort auf die zu entscheidende Frage ohne jede Änderung der vorgegebenen Stellungen erteilt werden soll, das folgende Kriterium setzen:

Kriterium III: *Man bestimme für zwei Stellungen, deren Überführbarkeit ineinander geprüft werden soll, die Anzahl der Inversionen der 16 Steine, indem man auch das leere Feld, und zwar mit Zahl 16, in Rechnung bringt; man denke sich ferner die 16 Felder schachbrettartig in zwei Farben ausgeführt, und zwar das Feld unten rechts in beiden Fällen gleichfarbig, etwa weiß. Sind dann die leeren Felder gleichfarbig für beide Stellungen, so sind diese dann und nur dann ineinander überführbar, wenn sich die Anzahlen ihrer beiderseitigen Inversionen um eine gerade Zahl unterscheiden. Sind dagegen die leeren Felder von verschiedenen Farben, so müssen sich die Inversionenanzahlen um eine ungerade Zahl unterscheiden, wenn die Überfuhrung möglich sein soll, und diese Bedingung ist auch hinreichend für die Überführung.*

Der Beweis hierfür ist leicht folgendermaßen zu führen: Es seien S_1, S_2 die beiden Stellungen, i_1, i_2 die Anzahlen ihrer Inversionen ohne Einrechnung des fingierten Steins 16 und e_1, e_2 die auf den Stein 16 in beiden Stellungen noch folgenden Steine, wobei wir ohne Beschränkung $e_1 > e_2$ annehmen dürfen; dann sind also $i_1 + e_1$ und $i_2 + e_2$ die Anzahlen der Inversionen unter Einrechnung des fingierten Steins 16. Da $e_1 > e_2$ ist, so liegt das leere Feld von S_1 entweder in derselben (korrespondierenden) oder in einer höheren Zeile als das von S_2 und diesen Zeilenabstand zwischen den beiden leeren Feldern, der entweder 0, 1, 2 oder 3 ist, wollen wir v nennen. Dieses v gibt uns dann die

Mindestzahl von vertikalen Zügen an, die erforderlich sind, um das leere Feld von S_1 in dieselbe Zeile wie das von S_2 zu bringen. Wir denken uns nun durch v vertikale und eine Anzahl hier nicht interessierender horizontaler Züge die Stellung S_1 übergeführt in eine Stellung S_1', die dasselbe leere Feld wie S_2 hat; dann sind nach Kriterium II in Verbindung mit Hilfssatz 2 S_1' und S_2, und damit auch S_1 und S_2, dann und nur dann ineinander überführbar, wenn $i_1 + v - i_2$ *gerade* [1]) ist.[2])
Ist nun

1) v gerade, so lautet unsere Bedingung· $i_1 - i_2$ *gerade.*

Bei geradem v, d. h. wenn die beiden leeren Felder in derselben Zeile liegen oder im Abstand von zwei Zeilen, sind nun die beiden leeren Felder gleichfarbig, wenn $e_1 - e_2$ gerade, und ungleichfarbig, wenn $e_1 - e_2$ ungerade ist. Unsere Bedingung „$i_1 - i_2$ gerade" können wir daher bei gleichfarbigen leeren Feldern auch so formulieren: $i_1 - i_2 + e_1 - e_2$ gerade oder

$$(i_1 + e_1) - (i_2 + e_2) \textit{ gerade.}$$

Dagegen lautet bei Ungleichfarbigkeit der leeren Felder, d. h. bei ungeradem $e_1 - e_2$, die Bedingung der Überführbarkeit:

$$(i_1 + e_1) - (i_2 + e_2) \textit{ ungerade.}$$

Ist

2) v ungerade (1 oder 3), so reduziert sich unsere ursprüngliche Bedingung „$i_1 + v - i_2$ gerade" auf

$$i_1 - i_2 \textit{ ungerade.}$$

Nun sind die beiden leeren Felder, wenn sie um eine oder drei Zeilen von einander entfernt liegen, bei geradem $e_1 - e_2$ ungleichfarbig, bei ungeradem $e_1 - e_2$ aber gleichfarbig. Offenbar kommen wir daher wieder zu genau denselben Bedingungen wie im ersten Falle (v gerade), nämlich bei zwei gleichfarbigen leeren Feldern zu: $(i_1 + e_1) - (i_2 + e_2)$ *gerade,* bei zwei ungleichfarbigen zu: $(i_1 + e_1) - (i_2 + e_2)$ *ungerade* Damit ist das Kriterium III bewiesen.

Die oben (S. 240) gegebenen Beispiele der Figuren 6a und 6b gehörten zu verschiedenen Gruppen, wie wir dort zeigten.

---

1) Wir hätten statt der Differenz natürlich auch die Summe setzen können, und jedenfalls kommt es bei dieser, wie auch den folgenden Differenzen, nur auf die absoluten Beträge an.

2) In dieser Form ist das Kriterium im wesentlichen identisch mit dem von P. H. Schoute in der Zeitschrift „Eigen Haard" 1883, p. 540/541 gegebenen: zwei Stellungen sind ineinander überführbar, wenn die Summe aus „foutental" (Zahl der Inversionen) und „ordetal" (Nummer der Zeile des leeren Feldes) für beide Stellungen gerade oder für beide ungerade ist.

Drehen wir aber die Fig. 6b um 90° im Uhrzeigersinne, so geht sie in Fig. 6a über, nur muß man dann natürlich noch jeden Stein auf seinem Platze um 90° im umgekehrten Uhrzeigersinne drehen, damit die Nummern wieder aufrecht stehen, und ferner hat man die Steine der untersten Zeile zu verschieben, damit das leere Feld auf Platz 16 kommt. Da nun jede Stellung der ersten Gruppe sich in die Stellung Fig. 6a, jede der zweiten Gruppe in die der Fig. 6b überführen läßt, so würde also dadurch, daß man eine Vierteldrehung des Spielkastens und nachherige Rückwärtsvierteldrehungen der Steine auf ihren Plätzen gestattete, eine Brücke zwischen den beiden Gruppen hergestellt werden, und es gäbe, wenn man die Spielregeln derartig erweiterte, daß die genannten Operationen gestattet sind, überhaupt keine unlösbaren Aufgaben mehr.

Es ist damit zwar schon gezeigt, daß, wenn man nur diese eine Vierteldrehung — die von Stellung Fig 6b — zuläßt, die Schranke zwischen „lösbaren" und „unlösbaren" Stellungen fällt. Wir können jedoch auch zeigen, daß überhaupt jede Vierteldrehung, verbunden mit Zurückdrehung der Steine auf ihren Plätzen, eine Brücke zwischen den beiden Gruppen schlägt. Zu dem Ende gehen wir aus von einem Puzzle mit den Steinen a, b, c, . . q, wie wir es in Fig. 9a haben, und drehen es im Uhrzeigersinne um 90° und drehen darauf die einzelnen Steine auf ihren Plätzen so, daß die Nummern wieder aufrecht stehen; so erhalten wir die Stellung Fig. 9b. Andererseits können wir uns Fig 9b aus Fig. 9a entstanden denken durch eine Reihe von Transpositionen (Vertauschungen von je zwei Steinen), und zwar ordnen sich diese zu folgenden Zyklen an: $(anqd)$, $(biph)$, $(ceom)$, $(fklg)$. Wir haben also im ganzen $4 \times 3 = 12$ Transpositionen und, da jede von ihnen nach dem S 236, Anm 1 angegebenen Satze die Inversionenzahl um eine ungerade Zahl verändert, so unterscheiden sich unsere beiden Stellungen also um eine gerade Zahl Inversionen. Denken wir uns nun die Felder der beiden Bretter nach der Forderung des Kriteriums III in zwei Farben ausgeführt und zwar das Feld unten rechts jedesmal weiß, so steht ein Stein, beispielsweise q, der in Fig. 9a auf weißem Felde

a	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*
i	*k*	*l*	*m*
n	*o*	*p*	*q*

Fig. 9a.

n	*i*	*e*	*a*
o	*k*	*f*	*b*
p	*l*	*g*	*c*
q	*m*	*h*	*d*

Fig 9b

steht, in Fig. 9b auf schwarzem Felde und umgekehrt. Wo wir also auch das leere Feld annehmen, d. h. welchen der 16 Steine *a, b, ... q* wir uns auch aus dem Spiel entfernt denken, in jedem Falle werden die beiden leeren Felder von Fig. 9a und 9b ungleichfarbig sein. Hieraus zusammen mit der geradzahligen Inversionendifferenz folgt aber nach Kriterium III, daß beide Stellungen zu verschiedenen Gruppen gehören.

Das so gewonnene Ergebnis formulieren wir folgendermaßen:

Hilfssatz 3: *Wird eine beliebige Stellung einer Vierteldrehung, verbunden mit Zurückdrehung aller Steine auf ihren Plätzen, unterworfen, so gehört die so sich ergebende neue Stellung nicht zu derselben Gruppe wie die ursprüngliche Stellung.*

Wir sind also nicht etwa gerade auf die vermöge Fig. 6b und Fig. 6a zwischen den beiden Gruppen hergestellte eine Brücke angewiesen, sondern, wie gesagt, jede Vierteldrehung einer beliebigen Stellung schafft uns eine solche Brücke, und wir dürfen daher sagen:

Zusatz II zu Satz 2: *Jede beliebige Stellung läßt sich in die normale Stellung (Fig. 1) überführen entweder lediglich durch Ziehen der Steine (erste Gruppe) — oder aber (zweite Gruppe) durch Ziehen der Steine, verbunden mit einmaliger Vierteldrehung des Kastens und entgegengesetzter Vierteldrehung aller Steine auf ihren Plätzen.*[1])

Wenn man also die Spielsteine, statt quadratisch, rund macht und so Drehungen auf dem Platze ermöglicht, so würde vermöge dieser Drehungen und einer Vierteldrehung des Kastens jede Aufgabe lösbar sein.

Wir schließen damit die Betrachtungen über Lösbarkeit oder Unlösbarkeit einer bestimmten Aufgabe und fassen unsere Resultate folgendermaßen zusammen:

In der eigentlichen und strengen Form des Spiels stellt die Hälfte aller möglichen Anfangsstellungen lösbare, die andere

1) Siehe die S. 231, Anm., zitierte Schrift von Bernhard Cramer, insbesondere p. 6, und P. H. Schoute in der Zeitschrift „Eigen Haard“ 1883, p. 540 u. 542; ferner J. Thomae in dem schon oben zitierten Privatdruck.

Hälfte unlösbare Aufgaben dar. Dagegen werden alle Aufgaben ohne Unterschied lösbar, wenn man eine der folgenden Erleichterungen gewährt:

1) *Wenn man als Ziel nur die Herstellung der natürlichen Ordnung der 15 Nummern fordert und es dem Spielenden überläßt, ob er dabei das leere Feld an den Anfang oder an das Ende der Reihe bringen will* (S. 242: Zusatz I zu Satz 2).

2) *Wenn man eine einmalige Vierteldrehung des Kastens, verbunden mit Rückwärtsvierteldrehungen der Steine auf ihren Plätzen, gestattet* (S. 247: Zusatz II zu Satz 2).

3) *Wenn man eine einmalige Vertauschung zweier Steine*[1] *zuläßt* (S. 238/239 nebst Anm. 1 dort).

Zu dieser letzten Spielerleichterung (3) verdient noch besondere Erwähnung der Fall, daß es die Steine 6 und 9 sind, die miteinander vertauscht werden[2]; da nämlich diese Zahlzeichen so geformt zu sein pflegen, daß sie bei Drehung um 180° ineinander übergehen, so brauchte man hier eine wirkliche Vertauschung der Spielsteine gar nicht vorzunehmen, vielmehr würde es genügen, die Steine 6 und 9 beide auf ihren Plätzen um 180° zu drehen.

§ 4. Abarten und Verallgemeinerungen.

Bisweilen wird die Aufgabe des Spiels in folgender Form ausgesprochen:

Alle 16 Plätze sind mit Steinen besetzt und zwar in beliebiger Ordnung: ein Stein soll fortgenommen, und es soll nun so geschoben werden, daß die natürliche Ordnung der Nummern erreicht wird, wenn der fortgenommene Stein zum Schluß wieder

1) Auch wenn man gestattet, daß einmal ein Stein, der nur mit einer Ecke an das leere Feld stößt, auf dieses gesetzt wird, geht eine unlösbare Stellung sogleich in eine lösbare über (s die S. 241, Anm 1, zitierte Schrift Schuberts von 1880, p 9): Im Sinne des Kriteriums III gesprochen, bleibt die Farbe des leeren Feldes bei dieser Umwandlung dieselbe, während die Inversionenzahl sich dabei um eine ungerade Zahl ändert; die neue Stellung gehört also nicht zu derselben Gruppe wie die alte.

2) Vgl. P G Tait, l. c. p. 665.

auf den leeren Platz gelegt wird; was für ein Stein ist fortzunehmen? — Ist die Anzahl der Inversionen aller 16 Nummern in der Anfangsstellung gerade, so muß, wenn wir uns nach der Forderung des Kriteriums III das Brett wieder zweifarbig ausgeführt denken, als fortzunehmender Stein diesem Kriterium zufolge[1]) offenbar ein solcher gewählt werden, der sich in der Anfangsstellung auf einem Felde der Farbe befindet, die er in der Endstellung einnehmen soll. Bei ungerader Anzahl von Inversionen ist die Überführung dagegen nur möglich, wenn der fortgenommene Stein in Anfangs- und Endstellung Felder verschiedener Farbe einnimmt. — Man erkennt unschwer, daß die Aufgabe nicht lösbar ist, wenn die Anfangsstellung von der natürlichen Ordnung sich dadurch unterscheidet, daß alle Nummern weißen Feldes mit denen schwarzen Feldes irgendwie die Plätze gewechselt haben. Die Anzahl der Inversionen ist dann gerade[2]), aber kein Stein befindet sich auf einem Felde seiner normalen Farbe. Ebensowenig ist die Aufgabe natürlich dann lösbar, wenn alle Steine sich auf Feldern ihrer normalen Farbe befinden, zugleich aber die Anzahl der Inversionen ungerade ist, also z. B., wenn die Anfangsstellung die normale Stellung, jedoch mit Vertauschung der Steine 1 und 3, ist

Es liegt nahe, die Aufgabe unseres Spiels auch in der Weise zu modifizieren, daß nicht gerade die „normale“, sondern irgendeine andere Stellung als das Ziel, das durch Schieben der Steine erreicht werden soll, gesetzt wird. Erwähnen wollen wir in dieser Beziehung insbesondere die folgende Form:

Bei beliebiger Anfangsstellung durch Verschieben der Steine irgendein magisches Quadrat herzustellen[3]), wobei das leere Feld mit dem Zahlenwert 16 in Rechnung gebracht werden soll.[4])

---

1) Man erkennt leicht (s. S 363), daß Kriterium III auch dann noch besteht, wenn irgendein anderer Stein jene Ausnahmestellung einnimmt, die in unserer Fassung Stein 16 besitzt.

2) Nach dem S 236, Anm. 1 genannten Satze (8 Transpositionen).

3) Vgl. auch S 228, Anm 3.

4) Bringt man das leere Feld mit *o* in Rechnung, wie beispielsweise P. H. Schoute in der Zeitschrift „Eigen Haard“ 1883, p. 590 tut,

Die Aufgabe ist stets lösbar. Denkt man sich nämlich irgendein magisches Quadrat hergestellt und darauf den Spielkasten um 90° gedreht und alle Steine wieder auf ihren Plätzen zurechtgedreht, so gehört die neue Stellung, wie wir wissen (Hilfssatz 3), nicht zu derselben Gruppe wie die erste; andererseits ist aber die neue Stellung natürlich „magisch“. Magische Quadrate gehören somit beiden Gruppen an und sind daher stets erreichbar. Jede beliebige Stellung läßt sich also durch einfaches Verschieben der Steine (ohne Drehungen) so umgestalten, daß jede der 4 Zeilen, jede der 4 Spalten und jede der beiden Diagonalen die Nummernsumme 34 — unter Bewertung des leeren Feldes mit 16 — ergibt. Das magische Quadrat Dürers (S. 2), um ein Beispiel zu nennen, gehört nach Kriterium III zu der ersten Gruppe, das durch Vierteldrehung im umgekehrten Uhrzeigersinne daraus hervorgehende magische Quadrat unserer Fig. 10 hier also zur zweiten Gruppe.

13	8	12	1
2	11	7	14
3	10	6	15
(16)	5	9	4

Fig. 10

Auf andere Spielkästen läßt sich die in den beiden vorigen Paragraphen entwickelte Theorie nicht ohne weiteres übertragen; wir wollen uns hier auf quadratische[1]) Kästen (von n^2 Feldern) beschränken und kurz skizzieren, welche Bestandteile der hier gegebenen Theorie alsdann für jedes n Gültigkeit haben resp. welche Modifikationen und Einschränkungen Platz greifen müssen: Satz 1 gilt, wie man leicht erkennt, allgemein. Hilfssatz 2, der in der angegebenen Form für jedes gerade n gilt, ist für ungerades n dahin abzuändern, daß jeder vertikale Zug die Inversionenzahl um

---

so ist die „magische Konstante“ natürlich nicht 34 (vgl. Kap. XII, S 2 u 5), sondern 30

1) Bezüglich rechteckiger Spielbretter finden sich einige Ausführungen von P. H. Schoute in der Zeitschrift „Eigen Haard“ 1883, p 588/589 Ebendort wird auch die Ausdehnung des Spiels auf ein räumliches Spielgebiet, und zwar von 4^3 Fächern, erörtert. Ein dem Boss Puzzle nachgebildetes „Hexagonales Preis-Brett-Spiel Trilemma“ („Ges. gesch. Nr. 4058“; s a das erloschene D. R. P. 12583 vom 15. Juni 1880) von Dr. Alwin Vietor mag hier gleichfalls noch genannt werden

eine gerade Zahl ändert, so daß also bei ungeradem n die Lage des leeren Feldes auf dem Brette im wesentlichen belanglos ist. Aus diesem Grunde wird Hilfssatz 1, der an sich natürlich allgemeine Gültigkeit besitzt, für ungerades n entbehrlich zur Herleitung des Kriteriums I, das für jedes n gilt.[1]) Das „Spiegelbild“ (Fig. 6c) der „normalen“ Stellung, das uns als eine kanonische Form der „unlösbaren“ Stellungen diente, ist hierfür nur geeignet, wenn n gerade oder aber ungerade von der Form $4\nu - 1$ ist, während dagegen für $n = 4\nu + 1$ das „Spiegelbild“ eine „lösbare“ Stellung darstellt.[2]) Die Fassung von Kriterium I* bleibt also die gleiche nur für gerades n und für ungerades von der Form $4\nu - 1$. Auch bei Übertragung des Satzes 2, der an sich allgemein gilt, ist diese Modifikation hinsichtlich des „Spiegelbildes“ vorzunehmen. Da bei ungeradem n die Lage des leeren Feldes auf dem Brett, wie schon gesagt, belanglos ist, so lautet für diese Fälle Kriterium II einfach: „Zwei Stellungen mit beliebigen leeren Feldern sind dann und nur dann ineinander überführbar, wenn die Differenz ihrer Inversionenzahlen gerade ist.“ Die ursprüngliche Fassung dagegen behält das Kriterium II für alle geraden Werte von n. Kriterium III behält für jedes n seine

1) Die Herleitung des Kriteriums I würde für ungerades n also so zu geben sein: Jeder horizontale Zug ändert die Inversionenzahl nicht, jeder vertikale Zug um eine gerade Zahl (Hilfssatz 2); es sind daher nur solche Stellungen ineinander überführbar, die sich um eine gerade Inversionenzahl unterscheiden Nun ist nach Satz 1 aber jede Stellung entweder in die „normale“ oder in die „Schlußstellung II“ überführbar, und daher lassen sich alle Stellungen von gerader Inversionenzahl und auch nur diese in die normale Stellung überführen.

2) Die Anzahl aller Inversionen für die Stellung des „Spiegelbildes“, also für das n^2-feldrige Analogon zu Fig 6c, ist, wie man leicht berechnet $\frac{(n-1)(n^2-2)}{2}$. Für gerades n schreiben wir diesen Ausdruck so: $(n-1)\left(\frac{n^2}{2}-1\right)$, und sehen, daß er ungerade, die Stellung also „unlösbar“ ist Für ungerades n schreiben wir den Ausdruck so: $\frac{n-1}{2}\cdot(n^2-2)$ und sehen, daß er nur für $n = 4\nu - 1$ ungerade, dagegen für $n = 4\nu + 1$ gerade ist

Gültigkeit.[1]) Die der Fig. 7 entsprechende Stellung gehört nur bei geradem n zu der zweiten Gruppe[2]), so daß also „Zusatz I zu Satz 2“ für ungerades n nicht, für gerades n jedoch stets gilt. „Hilfssatz 3“ und „Zusatz II zu Satz 2“ gelten nur für jedes durch 4 teilbare n, während bei ungeradem und bei ungerad-geradem n eine Stellung durch eine Vierteldrehung des Kastens nicht in eine Stellung der anderen, sondern in eine derselben Gruppe übergeführt wird.[3])

---

1) Daß auch für ungerades n das Kriterium III formell bestehen bleibt, wenn auch seine praktische Bedeutung hier neben Kriterium II nur recht gering ist, sieht man leicht ein: In den Fällen eines ungeraden n sind zwei Stellungen mit leerem Feld dann und nur dann ineinander überführbar, wenn die Inversionenzahlen sich um eine gerade Zahl unterscheiden (Kriterium II), und zwar ist es dabei jetzt, wie gesagt, ganz gleichgültig, wo auf dem Brette die leeren Felder liegen. Denken wir uns nun die beiden leeren Felder mit dem Stein n^2 ausgefüllt und ziehen wir die so hinzukommenden Inversionen — wir bezeichneten sie auf S. 244 durch e_1 und e_2 — mit in Rechnung, so ist die Differenz dieser, also $e_1 - e_2$, bei zwei gleichfarbigen leeren Feldern stets gerade, bei zwei ungleichfarbigen aber ungerade, worauf aus unserem jetzigen Kriterium II sofort das Kriterium III folgt. — Für $n = 4$ (ebenso allgemein für gerades n) mußte bei dieser Überlegung auch der Zeilenabstand (v) in Betracht gezogen werden, für ungerades n dagegen ist er belanglos, wie überhaupt die ganze Spieltheorie sich für ungerade Werte von n einfacher gestaltet als für gerade.

2) Die Zahl der Inversionen ist für allgemeines n, nachdem man ebenso, wie auf S. 242, das leere Feld in die Ecke unten rechts gebracht hat, $(n-1)^2$, also nur für gerades n ungerade Kriterium I und Satz 2 ergeben dann das gewünschte Resultat, das sich übrigens — ohne Verschiebung der Steine — auch sehr leicht aus Kriterium III resp. II (ungerades n) herleiten läßt.

3) Die Vierteldrehung des Spielkastens ist äquivalent mit einer Anzahl Transpositionen, die sich zu viergliedrigen Zyklen anordnen (vgl. S. 246), jeder Zyklus ist mit 3 Transpositionen gleichwertig Ist n gerade, $= 2\nu$, so haben wir offenbar ν^2 solche Zyklen, also $3\nu^2$ Transpositionen. Diese Zahl $3\nu^2$ und damit auch die Differenz der Inversionenzahlen ist bei gerad-geradem n gerade, bei ungerad-geradem n ungerade Dagegen ergibt sich für die Farben der beiden leeren Felder in den Fig 9a und 9b entsprechenden Figuren für die Fälle eines gerad-geraden und eines ungerad-geraden n offenbar kein Unterschied, vielmehr sind jene beiden Felder für jedes gerade n stets verschiedenfarbig. Hiernach

Es mag übrigens noch die Stellung betrachtet werden, in der die Zahlen, statt in den Zeilen, in den Spalten ihrer Größe nach aufeinander folgen, also die Stellung, die für unseren gewöhnlichen Fall $n = 4$ durch die Fig. 11 dargestellt wird.[1])

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	

Fig. 11.

Für diese oder vielmehr die entsprechende Stellung ergeben sich in dem allgemeinen Falle eines quadratischen Brettes von n^2 Feldern für die Zahlen der ersten Zeile der Reihe nach offenbar folgende Inversionenanzahlen:

$$0;\ n-1;\ 2(n-1);\ \ldots\ (n-1)(n-1);$$

für die Zahlen der zweiten Zeile sodann:

$$0;\ n-2;\ 2(n-2);\ \ldots\ (n-1)(n-2);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

für die Zahlen der vorletzten Zeile:

$$0;\quad 1\quad;\quad 2\quad;\ \ldots\quad (n-1)\quad;$$

schließlich für die der letzten:

$$0;\quad 0\quad;\quad 0\quad;\ \ldots\quad 0$$

Addiert man alle diese Zahlen — am besten spaltenweise von unten nach oben —, so erhält man als Gesamtzahl der Inversionen:

$$(1+2+\cdots+n-1)(1+2+\cdots+n-1) = \left\{\frac{1}{2}n(n-1)\right\}^2,$$

eine Zahl, die gerade ist, wenn n von der Form 4ν oder von der Form $4\nu+1$ ist, dagegen ungerade, wenn n von der Form

ergibt Kriterium III, daß bei ungerad-geradem n die durch Vierteldrehung hervorgegangene Stellung derselben Gruppe angehört wie die ursprüngliche, während für gerad-gerades n beide verschiedenen Gruppen zugehören — Ist n ungerade, $= 2\nu + 1$, so haben wir offenbar, da das Mittelfeld bei der Drehung invariant bleibt, $\nu^2 + \nu = \nu(\nu+1)$ Zyklen und $3\nu(\nu+1)$ Transpositionen, also eine gerade Zahl. Alsdann folgt nach Kriterium II sogleich, daß die ursprüngliche Stellung und die neue zu derselben Gruppe gehören

1) Siehe J van de Griend Jr. in der Zeitschrift „Wiskundige Opgaven. Opgaven met de oplossingen van het Wiskundig Genootschap" (Amsterdam, Delsman en Nothenius), Bd. 10, p. 248—250.

$4\nu + 2$ oder $4\nu + 3$ ist. Für diese beiden letzteren Fälle ($n = 4\nu + 2$ oder $4\nu + 3$) sind somit (Satz 2) die Stellungen nach Art der Fig. 11 geeignet, als kanonische Formen der unlösbaren Stellungen zu dienen.

Fassen wir die Ergebnisse, die wir hier hinsichtlich der kanonischen Formen der unlösbaren Stellungen erhielten, zusammen und unterscheiden wir dabei, wie sich als erforderlich herausstellte, zwischen den vier Fällen: $n = 4\nu$, $4\nu + 1$, $4\nu + 2$, $4\nu + 3$, so eignet sich das der Fig. 6c entsprechende „Spiegelbild" der normalen Stellung zur kanonischen Form der unlösbaren Stellungen in den Fällen $n = 4\nu$, $4\nu + 2$, $4\nu + 3$; die der Fig. 7 entsprechende Stellung für $n = 4\nu$, $4\nu + 2$; die durch Drehung der normalen Stellung um 90^0 und entgegengesetzte Vierteldrehung der Steine auf ihren Plätzen resultierende Stellung nur für $n = 4\nu$; schließlich die der Fig. 11 entsprechende Stellung für $n = 4\nu + 2$, $4\nu + 3$. In allen Fällen ist natürlich die „Schlußstellung II" eine geeignete Repräsentantin der unlösbaren Stellungen.

§ 5. Das Puzzle mit Schranken.

Wir wollen uns in diesem § wieder mit der gewöhnlichen Aufgabe unseres Spiels beschäftigen, wollen ihre Lösung aber dadurch erschweren, daß zwischen einzelnen Feldern Schranken aufgeführt werden.[1]) In dem Falle des „elementaren Puzzle" von 6 Feldern (§ 2) würde offenbar mit der geringsten Schranke das Spielverfahren bereits aufhören, dagegen schon nicht mehr bei einem rechteckigen Puzzle von 8 Feldern (Fig. 12).

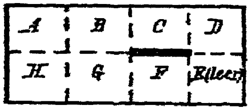


Fig 12.

Daß hier die in der Figur durch eine starkausgezogene Linie angedeutete Schranke die Lösbarkeit des Problems gar nicht beeinträchtigt, sieht man leicht folgendermaßen: Die Operationen, die in diesem Spielkasten

1) Ein unter Nr. 99752 D. R. P. vom 28 Okt. 1898 patentiertes Geduldspiel von O. Svanström in Diö (Schweden) darf hier wohl erwähnt werden, da es anscheinend etwas Ähnliches bezweckt, soweit sich bei der unzureichend ausgearbeiteten Spielbeschreibung erkennen läßt.

möglich sind, sind folgende: 1. sukzessive Verschiebung der Steine des ganzen Zyklus $FGHABCD$ in dem einen oder anderen Drehungssinne; 2. die entsprechende Operation für den engeren Zyklus $FGBCD$ ohne jede Benutzung der Felder A und H und ihrer Steine. Die Aufgabe des Spiels wird nun in der Hauptsache darin bestehen, die Steine in dem Gesamtzyklus $ABCDEFGH$ in die richtige Reihenfolge zueinander zu bringen; ist dies erreicht, so kann jeder Stein durch Verschiebung aller sehr leicht an seinen richtigen Platz im Kasten gebracht werden. Die soeben angegebenen zweierlei Arten zyklischer Verschiebungen ermöglichen uns nun, in dem Zyklus aller Steine ($ABCDEFGH$) einen beliebigen Stein über zwei andere in der einen oder anderen Richtung springen zu lassen. Zu dem Ende brauchen wir offenbar nur zu zeigen, daß die Steine A und H in dem Zyklus sowohl von B, wie von G übersprungen werden können; — wegen der möglichen Verschiebung aller liegt in dieser speziellen Berücksichtigung von A und H keinerlei Beschränkung. In der Tat springt G nun über H und A, wenn der Zyklus $FGBCD$ im Uhrzeigersinne um eine Stelle verschoben wird, und B macht den entsprechenden Sprung in umgekehrter Richtung bei einer Verschiebung desselben Zyklus im umgekehrten Sinne. Wir fragen nun nach den durch diese zyklischen Verschiebungen herbeigeführten Änderungen in der Inversionenzahl, nehmen also eine gleichzeitige Verschiebung aller Steine des Zyklus $FGHABCD$ oder aber des Zyklus $FGBCD$, und zwar entweder im Uhrzeigersinne oder im umgekehrten Drehungssinne, an mit der Maßgabe, daß nach Ausführung jeder solchen zyklischen Verschiebung das leere Feld wieder nach Platz E gebracht wird. Eine derartige zyklische Verschiebung erfordert neben einer Anzahl horizontaler Züge, bei denen die Inversionenzahl sich um nichts ändert, zwei vertikale Züge (vgl. Hilfssatz 1), deren jeder die Inversionenzahl um eine ungerade Zahl verändert (vgl. S. 236). Insgesamt ändert sich somit infolge einer solchen zyklischen Verschiebung, bei der das leere Feld wieder nach Platz E zurückkehrt, die Inversionenzahl um eine gerade Zahl; die Inversionenzahl ist also nach Ausführung der zyklischen Verschie-

bung gerade oder ungerade, je nachdem sie es vorher war. Da nun die betrachteten beiden Arten von zyklischen Verschiebungen die einzigen hier ausführbaren Operationen sind, so sieht man, daß die notwendige Bedingung für Überführbarkeit zweier Stellungen mit demselben leeren Felde E ineinander die ist, daß *beide Stellungen eine gerade oder beide eine ungerade Anzahl Inversionen besitzen.*

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn, wie wir sahen, läßt sich in dem Zyklus aller Steine jeder um 2 Plätze nach jeder der beiden Seiten verrücken. Das Glied nun, das an die erste Stelle kommen soll, kann entweder, wenn es an ungerader Stelle im Zyklus steht, durch mehrmaliges Verschieben um 2 Plätze an die erste Stelle gebracht werden, oder aber es kommt dadurch zunächst nur an die zweite Stelle und darauf, indem das erste Glied dann um 2 Plätze zurückgesetzt wird, an die erste Stelle. Dies Verfahren[1]) läßt sich offenbar dann weiter fortsetzen, bis alle Glieder außer den beiden letzten geordnet sind. Für diese beiden sind dann bezüglich ihrer Reihenfolge zwei Möglichkeiten vorhanden, von denen die eine oder die andere eintreten wird, je nachdem die Inversionenzahl ursprünglich gerade oder ungerade war. Zwei in dieselbe Schlußstellung überführbare Stellungen sind — wegen der Umkehrbarkeit aller Züge — aber auch ineinander überführbar, womit unsere obige Behauptung bewiesen ist.

So ergeben sich z. B. aus dem Zyklus 3, 2, 5, 1, 7, 6, 4 (Anzahl der Inversionen = 8) sukzessive die Zyklen:

3, 1, 2, 5, 7, 6, 4
1, 2, 3, 5, 7, 6, 4
1, 2, 3, 5, 4, 7, 6
1, 2, 3, 4, 7, 5, 6
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

dagegen aus 7, 3, 1, 5, 4, 2, 6 (11 Inversionen):

---

1) Es ist von C. A. Laisant angegeben (s Lucas, „Récréat“, t. I, p 210).

1, 7, 3, 5, 4, 2, 6
1, 7, 3, 2, 5, 4, 6
1, 2, 7, 3, 5, 4, 6
1, 2, 3, 5, 7, 4, 6
1, 2, 3, 4, 5, 7, 6.

Durch dies Verfahren, das wir übrigens auch schon bei dem elementaren Puzzle (§ 2) hätten anwenden können, ist offenbar gezeigt, daß für unseren Fall des Puzzle mit Schranken (Fig. 12) die Kriterien des § 3 für die Überführbarkeit zweier Stellungen ineinander ohne weiteres fortbestehen. Für ein Puzzle von mehr als 8 Feldern können die Schranken entsprechend weiter gezogen werden, z. B. für das von 2 · 6 Feldern so, wie nachfolgende Figuren es zeigen:

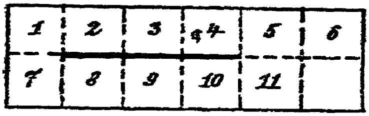


Fig 13a.

oder:

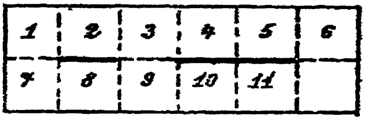


Fig 13b

In dem letzteren Falle kann jeder Stein immer über 4 oder aber über 6 andere Steine im Zyklus springen, was beides unter denselben Bedingungen wie oben zum Ziele führt, da sowohl 2 wie 3 zu 5 relativ prim ist (s. unten den übernächsten Absatz)

Für das quadratische Puzzle[1]) in der gewöhnlichen Form können wir offenbar, ohne daß dadurch die Theorie des § 3 irgendwie modifiziert wird, beispielsweise folgende Schranken ziehen:

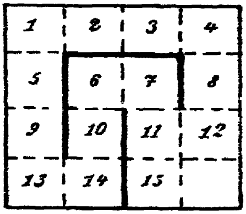


Fig 14a.

oder:

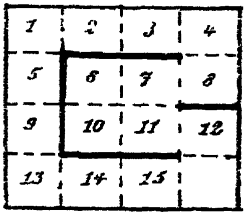


Fig. 14b

1) Ein Beispiel eines räumlichen Puzzle (von 4^3 Fächern) mit Schranken s. bei P. H. Schoute, l. c. p. 589.

Wenn wir die Länge der Seite eines quadratischen Feldes mit 1 bezeichnen, so darf die aller Schranken im quadratischen Puzzle von 16 Feldern zusammengenommen höchstens = 7 sein.

Wenden wir uns nochmals den rechteckigen Kästen von Zweifelderbreite zu, so dürfen wir auf Grund der obigen Betrachtungen behaupten, daß in einem rechteckigen Puzzle von $2 \cdot n$ Feldern durch die gezogenen Schranken die Lösbarkeitsbedingungen jedenfalls dann nicht modifiziert werden, vielmehr die alten Kriterien weiter bestehen, wenn es möglich ist, alle Steine zyklisch um je einen Platz zu verschieben, daneben aber auch mit nur $2p$ Steinen ($p < n - 1$) eine solche zyklische Vertauschung vorzunehmen, während die übrigen Steine ihr Feld beibehalten; dabei muß jedoch p zu $n - 1$ relativ prim sein, da dann und nur dann ein bestimmter Stein durch Sprünge über je $2p$ in dem Zyklus der $2(n - 1)$ anderen Steine es erreicht, daß der Gesamteffekt dieser Sprünge einem Vorrücken um 2 Plätze in der einen oder anderen Richtung gleichkommt.

Durch die eine dieser Forderungen, die eines alle Plätze umfassenden Zyklus, werden wir nun an ein in Bd. I, Kap. XI (S. 392—394) erledigtes Schachproblem erinnert, nämlich: einen Turm sukzessive alle $m \cdot n$ Felder eines rechteckigen Brettes bestreichen und zum Ausgangsfeld zurückkehren zu lassen, wobei jedes Feld, über das er einmal hinweggegangen, als passiert gilt. Ebenso, wie dies Problem für gerades mn stets lösbar war, so erhalten wir für unseren jetzigen Zweck auch, wofern nicht m und n beide ungerade sind, stets eine alle Felder des Brettes umfassende zyklische Reihe. Die Schranken dürfen höchstens in solcher Zahl errichtet werden, daß jedes Feld noch wenigstens nach 2 Seiten Ausgänge besitzt, 2 Felder dagegen nach je 3 Seiten. Zählen wir daher eine Schranke von der Länge der Seite eines Feldes als „eine“ Schranke, so dürfen offenbar höchstens

$$(m - 1)n + (n - 1)m - (mn + 1) = mn - (m + n + 1)$$

Schranken gezogen werden.

Haben wir aber zweitens den Ausnahmefall, daß m und n ungerade sind, so erhalten wir nur einen $mn - 1$ Felder umfas-

senden Zyklus (vgl. Bd. I, S. 393/394); ein Eckfeld etwa bleibt abseits liegen, und wir müssen uns die Lösung der Aufgabe in der Weise ausgeführt denken, daß zunächst auf dieses Eckfeld der hingehörige Stein gebracht wird und dann die weitere Ordnung erfolgt, wie wenn jenes Eckfeld nicht vorhanden wäre, also mit alleiniger Benutzung des Zyklus der $mn-1$ Felder. Hierzu ist aber notwendig und hinreichend, daß die beiden dem Eckfeld benachbarten Felder nicht nur von diesem nicht durch Schranken getrennt sind, sondern außerdem noch in ihrem Zyklus je 2 offene Ausgänge, mithin im ganzen je 3 Ausgänge besitzen, so daß die Maximalzahl der zulässigen Schranken in diesem Falle um 1 geringer ist als für gerades mn.

Als allgemeine Formel für die Maximalanzahl der zulässigen Schranken ergibt sich hiernach der Ausdruck:

$$mn-(m+n+1)+\frac{(-1)^{mn}-1}{2}.$$

§ 6. Das gegliederte Puzzle.

Die Betrachtungen des vorigen § führen uns ganz naturgemäß zu einer anderen Art von Puzzle, bei der die rechteckige Form des Brettes verlassen ist und alle Felder nur je 2 Ausgänge, zwei dagegen deren je 3 besitzen, ein Fall, für den nach unseren obigen Ausführungen immer noch die alten Lösbarkeitsbedingungen weiter bestehen werden. Als Beispiel führen wir an den Fall der Fig. 15

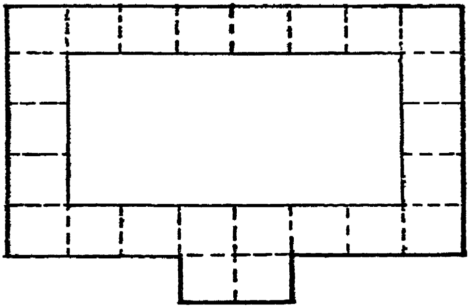


Fig 15

Hier haben wir nur eine zyklische Reihe. Wir dürfen dem Brette aber auch solche Formen geben, daß sich die Felder nicht mehr alle zu einem Zyklus zusammenfassen lassen[1]); Fig 16

1) Diese Erweiterung dürfte von H. A. H. Hermary herrühren (publiziert durch Lucas, „Récréat mathém.", t. I, p 213—218).

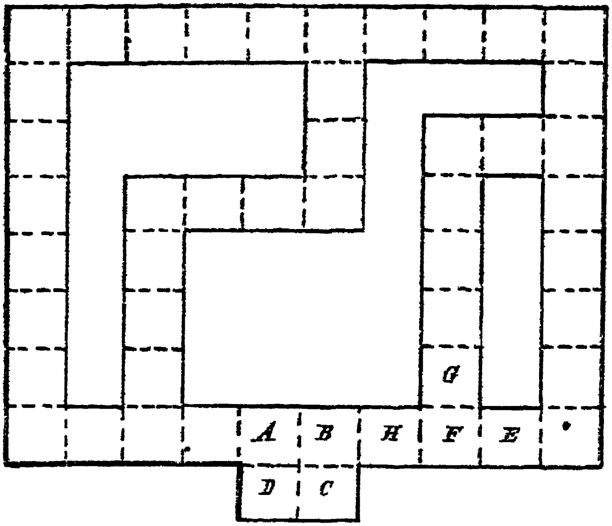


Fig. 16

mag einen solchen Fall veranschaulichen. Der Rangierplatz der Felder *ABCD* ermöglicht es, jeden Stein in seinem Zyklus 2 Felder vor- oder auch zurückzuschieben und zwar entweder in derselben Weise wie in Fig. 12, wenn nämlich *A*, *B* dem betreffenden Zyklus auch angehören, oder aber, wenn z. B. *E* vor *F* und *G* gerückt werden soll, so, daß zunächst, nach jenem Verfahren der Fig. 12, *E* vor *F* und *H* gerückt wird und dann in derselben Weise *E* über *H* und *G* springt. Nur darf die Form des Brettes keine derartige sein, daß die Kommunikation zwischen zwei sonst völlig getrennten Teilen lediglich durch ein Feld[1]) hergestellt wird (s. Fig. 17); die Spielbedingungen müßten in solchem Falle sonst schon dahin erweitert werden, daß mehrere (hier wenigstens 4) Felder leer bleiben.[2])

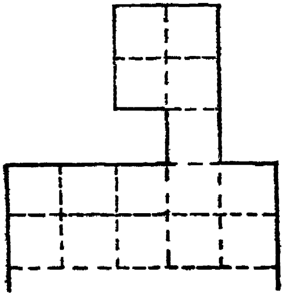


Fig 17.

1) Natürlich besteht ein solcher Ausnahmefall aber nicht, wenn die „Halbinsel" an zwei Stellen mit dem „Festlande" in Verbindung steht; vgl. a. P. H. Schoute in der Zeitschrift „Eigen Haard" 1883, p. 591.

2) Hier verdient ein Dr. Timon Schroeter (Schuldirektor a. D. in Jena) patentiertes „Vexirspiel" (Patentschrift No 26845; Patent gelöscht) erwähnt zu werden, sowie auch das Salta-Solo (mit zwei leeren Feldern).

Kapitel XX.

Das Dominospiel.

Je ne sçais s'il y a quelque rapport entre l'esprit du jeu et le génie mathématicien; mais il y en a beaucoup entre un jeu et les mathématiques. Laissant à part ce que le sort met d'incertitude d'un côté, ou le comparant avec ce que l'abstraction met d'inexactitude de l'autre, une partie de jeu peut être considérée comme une suite indéterminée de problêmes à résoudre après des conditions données. Il n'y a point de questions de mathématiques à qui la même définition ne puisse convenir, et la Chose du mathématicien n'a pas plus d'existence dans la nature que celle du joueur. C'est de part et d'autre une affaire de conventions.

DIDEROT.
Pensées sur l'interpretation de la nature. III.
1754, p. 3/4.

§ 1. Einleitung. Das Spiel mit 28 Steinen.

Über den Ursprung des allgemeinverbreiteten Spiels scheint etwas Sicheres nicht bekannt zu sein, ebensowenig über die Entstehung seines Namens. Nach einer Erklärung leitet dieser sich daher, daß das in den Klöstern viel gepflegte Spiel dort von dem Sieger beim Setzen des letzten, siegbringenden Steines mit dem Ausruf des Dankes: „Domino gratias!“ geschlossen zu werden pflegte. — Das Spiel tritt in verschiedenen Formen auf, insofern als die Zahlen auf den Steinen von 0 an bis 6, 7, 8 oder 9 gehen. Wir legen der weiteren Betrachtung die einfachste unter den gewöhnlich vorkommenden Formen zugrunde, diejenige nämlich, bei der auf den Steinen die Zahlen 0, 1, . . . 6 vorkommen, so zwar, daß — wie bekannt — jede Zahl gerade einmal mit jeder anderen zusammen einen Stein bildet und außerdem noch jede Zahl auf je einem Stein doppelt vorkommt. In unserem Falle kommt daher jede Zahl im ganzen 8mal vor; so haben wir mit Einrechnung der „Blanken“ im ganzen $7 \cdot 8$ Zahlen, d. i. $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$ Steine. Allgemein beträgt, wenn die Zahlen $0, 1, \ldots n$ sind, die Anzahl der Steine $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Die Hauptregel des Spiels besteht bekanntlich darin, daß nach Verteilung der Steine unter die Spieler[1]) diese durch abwechselndes Setzen je eines Steines und mit jeweiliger Übergehung derjenigen Spieler, die nicht „setzen“ können, eine „Kette“ von Steinen herstellen, d. h. eine Reihe von Steinen, in der die aneinandergrenzenden Hälften zweier benachbarter Steine stets dieselbe Zahl aufweisen müssen und wobei nun derjenige als Sieger gilt, der zuerst alle seine Steine „gesetzt“ hat.

Auf eine nähere Besprechung des Spiels als solchen verzichten wir und heben nur einen von Ed. Lucas[2]) angeführten merkwürdigen Fall hervor, in dem es bei 4 Spielern möglich ist, daß *jemand gewinnt, ohne daß 2 der Spieler auch nur einen ihrer Steine haben setzen können:* Bei Annahme von 4 Spielern erhält jeder 7 Steine. Bekommt nun zufällig der erste Spieler die Steine: 00, 01, 02, 03, 14, 15, 16 und der vierte die Steine: 11, 12, 13, 04, 05, 06 und als 7-ten einen beliebigen, so haben, wie man sofort sieht, der zweite und dritte Spieler auf keinem ihrer Steine eine 0 oder 1, und ebenso ist übrigens auch der 7-te, beliebige Stein des vierten Spielers von 0 und 1 frei. Unter diesen Umständen kann sich das Spiel nun folgendermaßen gestalten: Der erste Spieler setzt Doppelt-Blank; der zweite und dritte können dann nicht setzen, während der vierte 04 oder 05 oder 06 setzt. Auf jeden Fall kann darauf der erste so setzen, daß an den beiden Enden der „Kette“ 0 und 1 stehen, worauf dann der zweite und dritte Spieler wieder verzichten müssen, und dies wiederholt sich, bis schließlich der vierte Spieler seinen 6-ten Stein setzt und der erste darauf seinen 7-ten und letzten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies oder ein gleichwertiges, d. h nur durch Vertauschung der 7 Zahlen untereinander von ihm sich unterscheidendes Spiel eintritt, ist

1) Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den Fall, daß die Zahl der Spieler ein Teiler von der Gesamtanzahl der Steine ist und daß zu Beginn des Spiels alle Steine unter die Spieler verteilt werden (jeder Spieler nimmt von den mit umgewandter Nummernseite auf dem Tische liegenden Steinen die auf ihn entfallende Anzahl Steine); von dem sogenannten „Kaufen“ der übriggebliebenen Steine sehen wir also ab.

2) „Récréat. math.“, t II, p. 46

jedoch sehr gering, nämlich $= \frac{7 \cdot 6 \cdot \binom{5}{2}}{\binom{28}{7} \cdot \binom{21}{6}}$, so daß der Fall durchschnittlich nur alle 152977968 Spiele einmal eintritt.

Bei einem Spiel von 28 Steinen, bei dem jede Zahl gerade 8mal vorkommt, ist es möglich, alle 28 Steine so zusammenzulegen, daß immer Quadrate von je 4 gleichen Zahlen entstehen; Fig. 1 veranschaulicht[1]) solche von Lucas als „Quadrillen" bezeichnete Anordnungen.[2]) Man erkennt sehr leicht, daß die überstehenden Felder der Figur, in unserem Fall durch 00, 11, 22, 33 eingenommen, stets mit Doppelnummern besetzt sein müssen. Im übrigen ist aber für die Anordnung ein sehr großer Spielraum gelassen: Zunächst gehen offenbar aus jeder Lösung durch bloßes Vertauschen der 7 Zahlen 0, 1, . . . 6 untereinander $7! - 1 = 5039$ andere hervor; betrachten wir aber zwei in dieser Weise oder durch Spiegelung auseinander herleitbare Anordnungen als nicht verschieden, so gibt es nach Untersuchungen von H. Delannoy[3]) doch noch 34 wesentlich verschiedene Möglichkeiten, ohne daß wir jedoch näher auf diese Fragen eingehen wollen.[4])

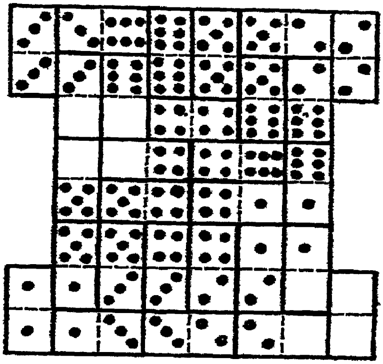


Fig. 1

1) Siehe Lucas, „Récréat.", t II, p. 52

2) Es sei hierbei bemerkt, daß die Herstellung ähnlicher Figuren und insbesondere die umgekehrte Aufgabe, die Zerlegung gegebener Muster in die Gesamtheit der Steine eines bis Nummer 7 gehenden Dominospiels, den Gegenstand eines Spieles bilden, über das von dem Erfinder, O. S Adler, zusammen mit Fritz Jahn, eine Broschüre („Sperr-Domino und Dominosa") im Verlage der Züllchower Anstalten (Züllchow b. Stettin 1912) erschienen ist.

3) Angegeben bei Lucas, „Récréat math.", t. II, p. 57—59. Vgl. a. Interméd. des mathématiciens t. 7, 1900, p. 309 u. 400; 8, 1901, p. 31.

4) Beiläufig erwähnt sei, daß in Mathesis II, p 208 (s. auch

§ 2. Zusammenhängende Dominoketten.

Es entsteht die Frage, ob alle Steine des Domino für den Fall, daß das Spiel fortgesetzt wird, auch wenn jemand bereits gesiegt hat, zu einer fortlaufenden Kette aneinandergelegt werden können. Wenn überhaupt eine solche alle Steine umfassende Kette existiert, so wird die Zahl am Anfange der Kette jedenfalls dieselbe sein müssen wie die am Ende, da ja keine Zahl vor der anderen ausgezeichnet ist; die beiden Enden müssen mithin aneinander passen, und dann wird also eine „geschlossene" Kette, d. h. eine solche ohne Anfang und Ende, möglich, in der keine Zahl mehr eine Sonderstellung einnimmt. Es ist klar, daß alle Steine höchstens dann zu einer solchen Reihe vereinigt werden können, wenn jede Zahl eine gerade Anzahl von Malen im Spiel vorkommt, da ja zwei benachbarte Steine der Kette sich immer dieselbe Zahl zukehren sollen. Falls die vorkommenden Zahlen $0, 1, \ldots n$ sind, muß also n gerade sein; dann kommt jede Zahl eine gerade Anzahl von Malen, nämlich $(n+2)$-mal, vor. Schon hier sei bemerkt, daß **die Bestimmung der Anzahl aller geschlossenen und vollständigen Dominoketten in den durch die kleinsten geradzahligen Werte von n ($n = 2, 4, 6$) gegebenen Fällen die Hauptaufgabe der nächsten Paragraphen und überhaupt dieses Kapitels sein wird.** In den Fällen eines ungeraden n dagegen muß notwendig stets eine gewisse Anzahl von Dominosteinen übrigbleiben und zwar,

---

C. A. Laisant, „Recueil de problèmes de mathématiques" . . ., III, Paris 1895, p 265 sub 12) die Herstellung eines „magischen" Quadrates aus den 28 Steinen des gewöhnlichen Domino gefordert wurde, wobei die Zahlen eines gewöhnlichen Dominosteins für zwei Zahlen, dagegen jede Doppelnummer nur für eine Zahl, also Doppel-Drei z. B. als einfache 3, gerechnet werden sollte. Von einem „magischen" Quadrat im strengen Sinne kann natürlich keine Rede sein, sondern nur von einem „lateinischen" Quadrat (s. S. 63), bestehend in diesem besonderen Falle aus 7 Zeilen und 7 Spalten, deren jede also nach der Forderung der Aufgabe alle 7 verschiedenen Zahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, je einmal aufweisen muß (da die Doppelnummern für je eine „Zahl" rechnen, so haben wir in unserem Falle $2 \cdot 21 + 7 = 7^2$ „Zahlen" und in dem allgemeinen Falle $(n+1)^2$ Zahlen). Lösungen s Mathesis VI, 1886, p. 43. — Über eine andere Dominoaufgabe s. übrigens hier S. 79/80, Anm. 4.

wenn eine „geschlossene“ Kette gebildet werden soll, mindestens so viele, daß auf den übrigbleibenden Steinen jede Zahl gerade einmal vorkommt, also mindestens $\frac{n+1}{2}$ Steine, so daß mithin höchstens $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)^2}{2}$ Steine zu einer geschlossenen Kette vereinigt werden können. Verlangt man dagegen nur eine „ungeschlossene“ Kette, so läßt sich offenbar noch ein Stein mehr unterbringen, indem man nämlich die geschlossene Kette an einer Stelle aufschneidet und dort noch von den vorher übriggebliebenen Steinen den ansetzt, der die betreffende Zahl aufweist.

Entfernt man bei geradem n einen Stein aus dem Spiel, so lassen sich die übrigen zu einer Kette zusammenlegen, die, wofern nicht jener Stein eine Doppelnummer ist, ungeschlossen ist und die an den beiden Enden gerade die auf dem abgesonderten Stein verzeichneten Zahlen aufweist. Nimmt man also in einer Gesellschaft unbemerkt einen Stein mit zwei verschiedenen Nummern aus einem Spiel von geradem n fort und stellt die Aufgabe, alle Steine zu einer Kette zusammenzulegen, so kann man von vornherein sagen, welche Nummern an den Enden der Kette auftreten werden: *es sind*, wie schon gesagt, *die beiden auf dem entfernten Stein vorkommenden.*

Um nun die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, unsere 28 Steine zu einer Kette zu vereinigen, zu finden[1]), dürfen wir

---

1) Diese Frage wurde zuerst von Terquem, einem der Herausgeber der Nouv annales de mathém, in diesem Journal, t. 8, 1849, p 74, beiläufig — bei Gelegenheit einer völlig anders gefaßten Aufgabe — aufgeworfen (vgl. a Nouv. Corr. mathém. 3, 1877, p. 294, Anm, sowie hier S. 269, Anm. 1) und alsdann ebendort (Nouv. ann.) in t. 11, 1852, p. 115 ausdrücklich als „Question 252“ aufgestellt mit dem Zusatze Terquems, daß die Aufgabe sehr schwierig sei und er sie verschiedenen ausgezeichneten Analytikern vergeblich vorgelegt habe Weder damals jedoch noch nach der Wiederholung der Aufgabe in Nouv. ann., t 2 (2ième série), 1863, p 227 erfolgte eine Losung; diese lieferte vielmehr erst späterhin die in unserem literar. Index unter Nr. 298 aufgeführte, im Jahre 1871 erschienene Abhandlung von M. Reiss († 1869); vgl. a. Nouv. ann. de mathém. (2) 11, 1872, p. 93 und Nouv Corr mathém. 4, 1878, p. 45—46.

zunächst von den Doppelnummern absehen. Denken wir uns einmal die übrigen 21 Steine zu einer geschlossenen Kette aneinandergelegt, so kommt eine bestimmte Zahl, etwa die Null, darin an 3 verschiedenen Stellen, jedesmal auf zwei benachbarten Steinen, vor. Zwischen je zwei solche aneinandergrenzende Nullen könnten wir dann die Doppel-Null einfügen, also an 3 Stellen, und dasselbe gilt für die anderen Steine mit Doppelnummer. Man sieht somit, daß sich durch Einfügen eines Steins mit Doppelnummer die Anzahl der Lösungen verdreifacht, also durch Einreihung von 2 Doppelnummern sich verneunfacht und durch das von 7 Doppelnummern sich mit 3^7 multipliziert. Eine geschlossene Kette wird ferner zu einer ungeschlossenen, wenn wir uns zwischen irgend zwei Steinen einen Einschnitt denken, so daß es also 28 mal so viel ungeschlossene wie geschlossene Ketten gibt. Nennen wir nun in unserem Falle $n = 6$ die Anzahl der geschlossenen Ketten aus den 21 Steinen ohne Doppelnummern: x_6, so gibt es also

$3^7 \cdot x_6$ geschlossene Ketten aus allen 28 Steinen und

$28 \cdot 3^7 \cdot x_6$ ungeschlossene Ketten von je 28 Steinen

Für den allgemeinen Fall eines Domino mit den Zahlen $0, 1, \ldots n$ (n gerade) sind die entsprechenden Anzahlen

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} \cdot x_n \quad \text{und} \quad \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} \cdot x_n.$$

§ 3. Ketten von 6 und von 15 Steinen.

Nach den vorbereitenden Ausführungen des vorigen § wenden wir uns jetzt dazu, die Anzahl der Dominoketten wenigstens für die einfacheren Fälle wirklich zu bestimmen. Für $n = 2$, d. h für ein Spiel mit nur drei verschiedenen Zahlen: 0, 1, 2, gibt es natürlich — man denke etwa an ein Dreieck, dessen Seiten 0, 1, 2 heißen mögen, — nur eine geschlossene Kette, nämlich

$$\underbrace{00 - 01 - 11 - 12 - 22 - 20}\text{,}$$

indem wir, wie auch weiterhin stets, die durch Umkehrung aus ihr entstehende, d. h.

$$\underbrace{02 - 22 - 21 - 11 - 10 - 00}\text{,}$$

nicht als verschieden von ihr ansehen wollen. Die Zahl der ungeschlossenen Ketten ist hier also = 6.

Wir wenden uns zu dem nächsteinfachen Fall, d. h., da n ja gerade sein muß (s. S. 264), zu $n = 4$, also einem Spiel von 15 Steinen. Wenn wir uns nun für jede geschlossene Kette von Steinen ohne Doppelnummern der Reihe nach die Zahlen, mit denen je zwei Steine aneinander grenzen, je einmal aufgeschrieben denken, so gelangen wir dazu, unsere Fragestellung so auszusprechen: **Auf wie viele Arten ist es möglich, die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, jede zweimal, so in einer Reihe zu schreiben, daß weder zwei gleiche Zahlen irgendwo aufeinander folgen noch zwei an einer Stelle nebeneinander stehende Zahlen an einer zweiten Stelle benachbart sind, wobei die erste und letzte Zahl gleichfalls als benachbart gelten?** Diese Forderungen bedingen offenbar, daß jede Zahl jeder anderen gerade einmal benachbart wird. Die erste Zahl, die wir hinschreiben, dürfen wir nun ohne Beschränkung 0 nennen und die zweite und dritte, die nach unseren Vorschriften von der ersten verschieden sein müssen, 1 und 2. Als vierte Zahl kann nun entweder wieder 0 oder eine noch nicht dagewesene Zahl, die wir dann 3 nennen, auftreten. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kommt man im ganzen zu folgenden 22 wesentlich verschiedenen Fällen[1]):

I.	0120314234	XII.	0123140342
II.	0120314324	XIII.	0123142034
III.	0120324134	XIV.	0123142043
IV.	0120324314	XV.	0123143024
V.	0120341324	XVI.	0123143042
VI.	0120342314	XVII.	0123402413
VII	0123024134	XVIII.	0123403142
VIII.	0123024314	XIX.	0123413024
IX.	0123041342	XX.	0123413042
X	0123043142	XXI.	0123420314
XI.	0123140243	XXII.	0123420413.

Aus jedem dieser Fälle ergeben sich nun durch Permutation

1) Siehe Lucas, „Récréat.“, t II. p 70

unserer 5 Ziffern $5! - 1$ neue Fälle; in der Gesamtheit dieser 22 Scharen von je $5!$ Ketten sind jedoch immer je zwei Ketten nach unserer obigen Festsetzung als zusammenfallend anzusehen, z. B. 01 — 12 — 20 — 03 — 31 — 14 — 42 — 23 — 34 — 40 und die umgekehrte:

$$04 - 43 - 32 - 24 - 41 - 13 - 30 - 02 - 21 - 10,$$

von denen die erstere der Fall I ist und die zweite aus XIII durch die Permutation $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ hervorgeht. Wir haben also im ganzen $\frac{5!\,22}{2}$ ungeschlossene Ketten ohne Doppelnummern. In jeder ungeschlossenen Kette können nun von den 5 Doppelnummern 4 an je 2 Stellen, eine jedoch immer an 3 Stellen, nämlich vorn, hinten und noch an einer Stelle in der Reihe, eingeschoben werden. Durch Einreihung der Doppelnummern multipliziert sich unsere Zahl also noch mit $3 \cdot 2^4$, so daß wir im ganzen

$$\frac{22\ 5!}{2} \cdot 3 \cdot 2^4 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 63360$$

ungeschlossene Ketten haben.[1]) Im nächsten § werden wir diese Zahl noch nach einem anderen Verfahren ermitteln und dabei auch zugleich das hier nur implizite vorkommende x_4 (s. § 2) explizite angeben.

§ 4. Methode von G. Tarry.

Die Aufgabe, die Anzahl aller geschlossenen Ketten ohne Doppelnummern zu bestimmen, können wir — in spezieller Anwendung auf den soeben behandelten Fall $n = 4$ — auch so aussprechen: Gegeben sind 5 Punkte 0, 1, 2, 3, 4, deren jeder mit jedem anderen durch eine Linie verbunden ist, so daß die Linien also ein Fünfeck mit dessen sämtlichen Diagonalen bil-

---

1) Bezüglich des Falles $n = 6$, den wir übrigens in § 5 nach einer anderen Methode noch eingehend behandeln werden, sei hier auf eine Notiz von C. Flye Sainte-Marie (Intermédiaire des mathématiciens, t. I, 1894, p. 164—165) verwiesen.

den; auf wie viele Arten ist es möglich, diese sämtlichen Linien hintereinander zu durchlaufen, jede gerade einmal?[1])

Auf Grund dieser Bemerkung gestaltet sich die weitere Untersuchung nach einer von G. Tarry[2]) ausgebildeten Methode folgendermaßen: Von den 4 in 0 mündenden Linien (s. Fig. *A*) werden entweder *a, b* einerseits und *c, d* andererseits unmittelbar hintereinander in der einen oder anderen Richtung durchlaufen oder aber *a, c* einerseits und *b, d* andererseits oder schließlich *a, d* einerseits und *b, c* andererseits. Betrachten wir zunächst den ersten Fall, so würde also hier unsere geschlossene Bahn von 4 nach 0 und dann nach 3, resp. auch gerade umgekehrt, führen und andererseits von 1 nach 0 und von dort nach 2, resp. umgekehrt; wir erhalten daher auch alle dieser Bedingung genügenden Lösungen, wenn wir unsere Fig. *A* ersetzen durch Fig. *B*. Entsprechend erhalten wir in den beiden anderen Fällen als Ersatz die Figuren *C* und *D*. Dabei

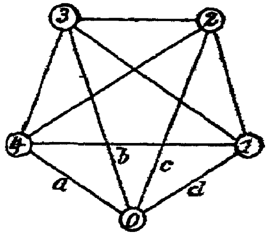


Fig. *A*

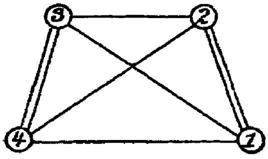


Fig *B*

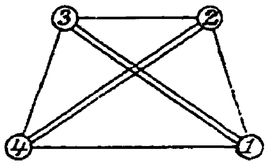


Fig *C*

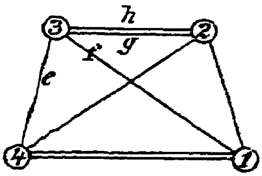


Fig *D*

vertritt also in Fig. *D* beispielsweise von den beiden Linien zwischen 2 und 3 die eine die frühere Bahn 2 — 0 — 3, während die andere einfach die schon ursprünglich vorhandene direkte Verbindung von 2 und 3 ist; beide Linien zwischen 2 und 3 sind demnach nicht gleichwertig und dürfen daher nicht als ver-

1) Als eine Bemerkung von C. A. Laisant angegeben bei Lucas, „Récréat", IV, p 126 und II (1896), p 229 (Note I). Dies ist jedoch die Form, in der das Problem schon Terquem (1849) — an der S. 265, Anm. 1 zitierten Stelle — entgegengetreten war, der ihm umgekehrt die unser Domino betreffende Einkleidung gab.

2) Assoc. franç pour l'avanc. des sciences XV, Congrès de Nancy 1886, t. II, p 49—53.

tauschbar angesehen werden. Würden wir nun die Anzahlen der Lösungen, die wir für die Durchlaufung jeder der erhaltenen 3 Figuren (B, C, D) bekommen, addieren, so wäre diese Summe die Anzahl der Lösungen der ursprünglichen Aufgabe.

Nun sieht man aber leicht, daß diese 3 Figuren nicht wesentlich voneinander verschieden sind, da es doch nur auf die innere Struktur, nicht aber auf das äußere Aussehen hier ankommt und wir in allen 3 Fällen übereinstimmend zwei Paare von Punkten haben so, daß jedes der zwei Paare für sich durch zwei (nicht vertauschbare) Wege verbunden ist, während sonst von jedem Punkt zu jedem anderen ein einfacher Weg führt. Wir brauchen unserer weiteren Betrachtung also nur noch eine der 3 Figuren, etwa Fig. D, zugrunde zu legen und erhalten die gesuchte Zahl als das Dreifache der Lösungen, die wir für die Konfiguration der Fig. D bekommen. Von dieser Konfiguration gehen wir nun wieder zu einer einfacheren über, indem wir etwa den Punkt 3 aussondern. Dieser kann passiert werden, indem man entweder e, g einerseits und f, h andererseits oder e, h einer- und f, g andererseits verbindet, was beides zu Fig. E führt, oder aber, indem man e, f einerseits und g, h andererseits zusammennimmt; in letzterem Falle haben wir eine von 2 nach 3 gehende und von dort nach 2 zurückführende Strecke ($g - h$ oder $h - g$), die wir nach Aufhören des Punktes 3 durch eine „Schleife"[1]) darstellen, so daß wir also zu einer Fig F geführt werden Die Fig E erhielten wir zweimal und haben sie auch zweimal in Anrechnung zu bringen, da die Kombinationen $e,g + f,h$ und $e,h + f,g$ wegen der oben hervorgehobenen Nichtvertauschbarkeit von h und g als zweierlei Möglichkeiten anzusehen sind. Bezeichnen wir nun die Anzahlen der Lösungen für die Konfigurationen A, D, E und F kurz bzw. mit A, D, E und F, so haben wir also:

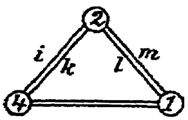


Fig E

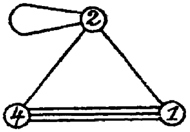


Fig. F

$$D = 2E + F \quad \text{und} \quad A = 3D = 3(2E + F).$$

1) Vgl. S. 189

Beginnen wir nun die Durchlaufung der Fig. F in der Weise, daß wir von 4 nach 2 gehen (diese Richtung dürfen wir ohne Beschränkung vorschreiben, da wir ja eine Richtungsumkehrung der ganzen Durchlaufung nicht als wesentliche Änderung ansehen wollten), so müssen wir nun weiter von 2 aus erst die Schleife durchlaufen, da wir hierzu sonst später keine Gelegenheit wieder haben würden. Jedoch bieten sich für das Durchlaufen der Schleife selbst 2 Möglichkeiten, insofern diese in der einen oder anderen Richtung beschrieben werden kann; unsere Konfiguration mit Schleife besitzt also doppelt so viele Lösungen wie eine ihr im übrigen kongruente ohne diese Schleife, und es mag schon hier beiläufig darauf hingewiesen werden, daß, wenn wir statt der einen Schleife deren zwei hätten, dies die Anzahl der Lösungen natürlich vervierfachen würde usw. Nach Durchlaufung der Schleife in 2 kommen wir nach 1 und haben hier für das Fortschreiten 3 Möglichkeiten, und dann, nachdem wir zu 4 gekommen, bieten sich wieder 2 Wege, die nach 1 zurückführen, worauf wir nur noch einen Weg übrigbehalten, um nach 4 zurückzukehren und damit die Durchlaufung zu beschließen. So haben wir offenbar im ganzen $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ Durchlaufungen für die Konfiguration F, d. h. es ist $F = 12$.

Die Konfiguration E geht nun durch Ausscheidung des Punktes 2 entweder in G über, wenn wir nämlich i, k einer- und l, m andererseits zusammennehmen, oder aber in H und zwar dies sowohl, wenn wir i, l einer- und k, m andererseits, als auch, wenn wir i, m einer- und k, l andererseits verbinden Es ist demnach $E = G + 2H$.

Fig G

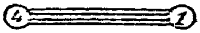


Fig H

Für die Durchlaufung von G dürfen wir nun, da wir ja eine Richtungsumkehrung der ganzen Bahn als unerheblich ansehen, ohne Beschränkung annehmen, daß die untere der beiden Linien zwischen 4 und 1 in der Richtung 4—1 durchlaufen wird. Alsdann bieten sich in 1 für das weitere Fortschreiten wegen der zweifachen Durchlaufungsrichtung der Schleife 2 Möglich-

keiten, ebenso, nachdem man darauf von 1 längs der zweiten (oberen) Linie wieder nach 4 zurückgekehrt ist, für die andere Schleife, so daß also $G = 4$ ist. Durchläuft man in H zunächst eine der Linien, so ergeben sich für die Fortsetzung 3 Möglichkeiten und für die weitere noch 2, so daß $H = 6$ ist. So folgt: $E = 16$, und weiter: $A = 3(2E + F) = 132$. Wenn aber dies die Anzahl der geschlossenen Ketten ohne Doppelnummern, also das x_4 in der Schreibweise unseres § 2, ist, so ist die Zahl der ungeschlossenen Ketten mit Doppelnummern $15 \cdot 2^5 \cdot 132 = 63360$, eine Zahl, die schon im vorigen § auf andere Weise ermittelt war.

§ 5. Ketten von 28 Steinen.

Fassen wir nun schließlich den Hauptfall, d. h. den eines Spiels von 28 Steinen, ins Auge, so haben wir also die Frage zu beantworten, auf wieviel Arten das System der Seiten und Diagonalen eines 7-Ecks durchlaufen werden kann. Dabei werden wir wieder nach der Methode Tarrys verfahren, werden uns jedoch nach den ausführlichen Darlegungen des vorigen § auf eine kurze Darstellung der erforderlichen Entwickelungen beschränken dürfen. Zunächst wollen wir nur daran erinnern, daß, wie schon oben bemerkt war, das Auftreten einer „Schleife“ die Zahl der Lösungen verdoppelt, das von zweien sie vervierfacht usw. Voraussetzung ist dabei, daß die Stellen in der gesamten Durchwanderung, an denen die Schleifen anzugliedern sind, durch die Struktur eindeutig vorgeschrieben sind, wie es in dem obigen Falle ($n = 4$) stets war. Hat man jedoch für die Einreihung der Schleife die Wahl zwischen mehreren Möglichkeiten, so tritt natürlich eine weitere Multiplikation der Lösungen ein, wovon gleich noch zu sprechen sein wird. Wir haben im folgenden die Schleifen überall in den Figuren fortgelassen und haben nur die durch sie bedingten Multiplikatoren bei den betreffenden Konfigurationen in Rechnung gezogen.

Zunächst sondern wir von dem 7-Eck wieder eine Ecke aus; die 6 in ihr mündenden Linien können wir auf 15 Arten zu je 2 verbinden und kommen dann offenbar in jedem der Fälle

zu der Konfiguration J, so daß $x_6 = 15 \cdot J$ ist Sondern wir abermals eine Ecke aus und nehmen die etwaigen Schleifen fort, so kommen wir zu den Figuren P_1, P_2, P_3, P_4 und zwar ergibt sich

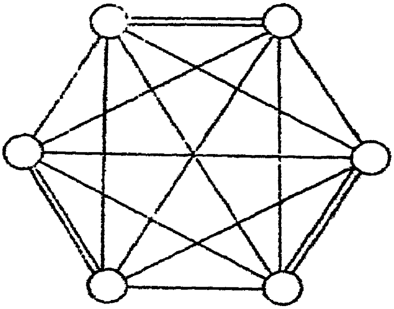


Fig. J

$$J = 8P_1 + 4P_2 + 8P_3 + 4P_4.$$

Für die Berechnung der angegebenen Zahlenkoëffizienten waren Überlegungen in der Art der folgenden anzustellen: Bei dem Übergang von J zu P_4 beispielsweise entsteht eine Schleife. Diese hat schon an sich, wegen ihrer zweifachen Durchlaufung, eine Verdoppelung der Lösungen zur Folge. Da aber der Punkt, von dem aus die Schleife zu beschreiben ist, wegen der 4 in ihm mündenden Linien bei der Wanderung zweimal passiert wird, so gibt es für die Einschiebung der Schleife in die ganze Durchwanderungsbahn zwei geeignete Stellen; die Schleife hat also im ganzen eine Vervierfachung der Lösungen zur Folge. Entsprechend ist es in den anderen Fällen

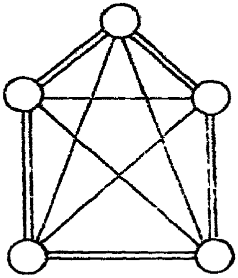


Fig P_1

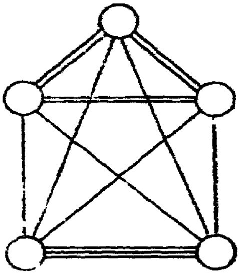


Fig. P_2

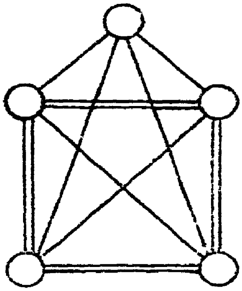


Fig P_3

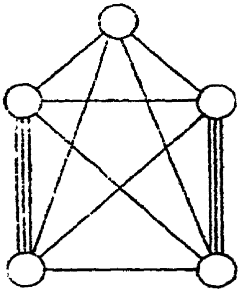


Fig P_4

Der Übergang von den 5 Ecken zu 4 führt zu den Konfigurationen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, so zwar, daß

$$P_1 = 6Q_1 + 4Q_2 + 16Q_3 + 16Q_4 \qquad P_3 = 2Q_1 + Q_2$$
$$P_2 = 8Q_1 + 16Q_3 + 2Q_5 + 16Q_6 \qquad P_4 = 2Q_1 + Q_5$$

ist

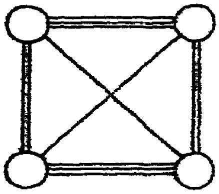


Fig Q_1.

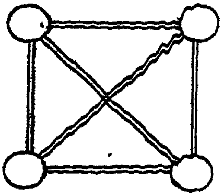


Fig Q_2.

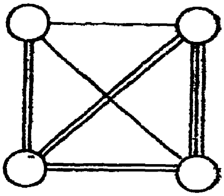


Fig Q_3

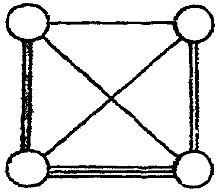


Fig Q_4

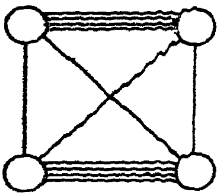


Fig Q_5

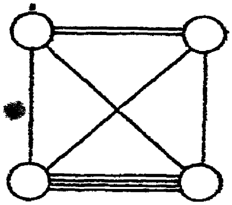


Fig Q_6

Von hier kommen wir sodann zu den Dreiecken T_1, T_2, T_3 T_4, T_5 und zwar ist

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 6T_1 + 24T_2 + 48T_3 \\
Q_2 &= 8T_1 + 24T_2 + 64T_4 \\
Q_3 &= 2T_1 + 4T_3 \\
Q_4 &= 2T_2 + 4T_3 \\
Q_5 &= 48T_2 + 24T_5 \\
Q_6 &= 2T_2 + 2T_5.
\end{aligned}$$

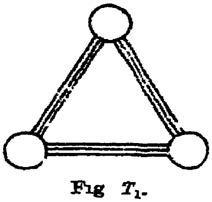


Fig T_1.

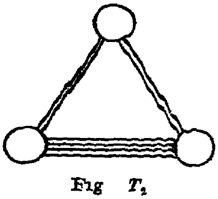


Fig T_2

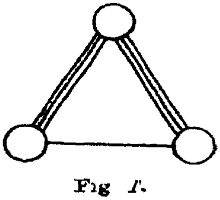


Fig T_3.

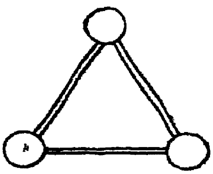


Fig. T_4.

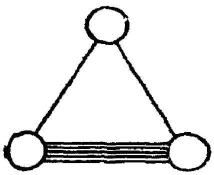


Fig. T_5

Schließlich werden wir zu den Konfigurationen D_1, D_2, D_3 geführt, wo

$$\begin{aligned} T_1 &= 6D_1 + 144D_2 \\ T_2 &= 2D_1 + 16D_2 \\ T_3 &= 12D_2 \\ T_4 &= 2D_2 + 4D_3 \\ T_5 &= D_1 \end{aligned}$$

ist.

Fig. D_1.

Fig D_2

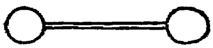


Fig. D_3

Nun ist $D_1 = 5! = 120$; $D_2 = 3! = 6$; $D_3 = 1$, also

$T_1 = 1584$, $T_2 = 336$, $T_3 = 72$, $T_4 = 16$, $T_5 = 120$
$Q_1 = 21024$, $Q_2 = 21760$, $Q_3 = 4512$,
$Q_4 = 960$, $Q_5 = 19008$, $Q_6 = 912$
$P_1 = 300736$, $P_2 = 292992$,
$P_3 = 63808$, $P_4 = 61056$

und

$$J = 4332544,$$

also

$$x_6 = 64988160.$$

Die Anzahl aller ungeschlossenen Ketten mit Doppelnummern ist demnach $28 \cdot 3^7 \cdot 64988160$

$$= 3979614965760 = 2^{12} \cdot 3^8 \cdot 5\ \ 7 \cdot 4231$$

resp. das Doppelte, wenn man, wie die meisten Autoren tun, die durch direkte Umkehrung ineinander übergehenden Fälle als verschieden ansieht. Diese Zahl wurde, wie schon oben beiläufig bemerkt war (S. 265, Anm. 1), zuerst von M. Reiß[1]) bestimmt, jedoch nach einer wesentlich komplizierteren Methode. Später hat dann G. Tarry, wie schon erwähnt, in der hier (§§ 4, 5) erläuterten Weise diese Untersuchung angestellt[2])

---

1) Siehe die dort zitierte Abhandlung Nr. 298 des literar Index.

2) Assoc. franç pour l'avanc. des sc XV, Congrès de Nancy 1886, t I, p. 81; t. II, p 49—53. Nach Lucas, „Récréat.", IV, 1894, p. 126 ist die Richtigkeit der Reißschen Zahl außer von Tarry auch von dem

und hat die Berechnung auch für ein Spiel von 9 Zahlen: 0, 1, ... 8, also von 45 Steinen, ausgeführt. Die Anzahl der Lösungen für diesen Fall ($n = 8$) ist:

$$2^{15} \cdot 3^{11} \cdot 5^{2} \cdot 711 \cdot 40787 = 455\,760\,028\,510\,617\,600.$$

Abbé Jolivald (1885) bestätigt gefunden. Recht unerfindlich ist es, wie P. Le Cointe ohne jede Begründung die Richtigkeit der Reißschen Zahlen anzweifeln konnte (Zeitschrift Le Cosmos XVI, Paris 1890, p. 294) — Die hier zitierte Tarrysche Arbeit behandelt übrigens nur den Fall der 28 Steine; wegen des oben angegebenen Resultats von G. Tarry und Jolivald für $n = 8$ s. Lucas, „Récréat", t IV, p 128.

Kapitel XXI.

Zeit und Kalender.

§ 1. Gemeine und Schaltjahre.

Bei der Abhängigkeit alles organischen Lebens von der Wärme und Licht spendenden Sonne war durch die doppelte Bewegung unseres Planeten zu seinem Zentralkörper eine zwiefache Einteilung der Zeit für den Menschen von vornherein gegeben: Die Rotation der Erde um ihre Achse führte mit Notwendigkeit zur Einteilung der Zeit in Tage; ihre Revolution um die Sonne, wenn auch zunächst nicht als eine Eigenbewegung der Erde erkannt, lieferte das Zeitmaß des Jahres. Eine genaue Definition dieser beiden Zeitbegriffe zu geben, um aus ihnen invariable Zeiteinheiten herzuleiten, sowie das Verhältnis dieser Zeitmaße zueinander genau zu fixieren, war Aufgabe der Astronomie. Ohne auf die Materie und ihre geschichtliche Entwickelung weiter einzugehen, wollen wir hier nur in Betracht ziehen das mittlere tropische Sonnenjahr, d. h. die mittlere Zeit zwischen zwei aufsteigenden Durchgängen des Sonnenmittelpunkts durch den Äquator der Erde, und den mittleren Sonnentag, das Mittel aus den an Dauer im allgemeinen ungleichen Sonnentagen des ganzen Jahres. Bei dieser Festsetzung ergibt sich ein tropisches Sonnenjahr zu 365 Tagen 5 Stunden 48 Min. 47,33 Sek. = 365,2422 Tagen

Rechnen wir nun praktisch das Jahr zu 365 Tagen, so nehmen wir es also um 0,2422 Tag zu kurz. Dies war der Grund dafür, daß schon der „Julianische“ Kalender der Römer alle 4 Jahre einen Tag, den Schalttag, einschob. Damit ist aber wieder zuviel eingeschaltet; denn bei einer Differenz von 0,2422 Tag auf das Jahr ergibt sich für 4 Jahre nur eine solche von 0,9688 Tag.

Schiebt man also alle 4 Jahre einen ganzen Tag ein, so hat man in 4 Jahren 0,0312 Tag zuviel gerechnet, und im Laufe von 400 Jahren verhundertfacht sich dieser Unterschied, beträgt dann also 3,12 Tage. Man würde mithin in einem Zeitraum von 400 Jahren 3,12 Tage zu viel rechnen. In der Tat war der Julianische Kalender mit diesem Fehler behaftet, und noch heute rechnet bekanntlich die griechisch-orthodoxe Kirche so. Es ist bekannt, daß Papst Gregor XIII. in einer Bulle vom 1. März 1582 hier reformierend eingriff und bestimmte, daß alle 400 Jahre von den üblichen Schalttagen 3 fortfallen sollten, und zwar wurden hierfür gewählt die auf 00 ausgehenden und nicht durch 400 teilbaren Jahre, also z B. die Jahre 1700, 1800 und 1900, während das Jahr 2000 wieder den Schalttag erhält. Durch diese Gregorianische Reform, die natürlich zugleich das bis dahin Versäumte nachträglich verbesserte und heute überall — mit der soeben schon erwähnten Ausnahme — akzeptiert ist, hat sich zwischen dem Julianischen oder „Kalender alten Stils“ und dem Gregorianischen oder „Kalender neuen Stils“ jetzt bereits eine Differenz von 13 Tagen ergeben, die sich in den Jahren 2100, 2200 und 2300 weiter um je einen Tag vergrößern wird, wenn nicht, wie jedenfalls zu erwarten steht, der Julianische Kalender bis dahin seine letzte Domäne längst verloren haben wird. Nach Ausscheidung jener 3 Schalttage ist der 400jährige Zeitraum des Gregorianischen Kalenders aber immer noch um 0,12 Tag zu lang bemessen, ein Fehler, der im Laufe von 3500 Jahren mehr als einen Tag ausmacht und daher spätestens nach Verlauf dieser Zeit dadurch wird kompensiert werden müssen, daß man noch ein weiteres Jahr mit einer durch 4 teilbaren Jahreszahl zu einem Gemeinjahr stempelt

§ 2. Immerwährender Kalender.

Da 365, durch 7 geteilt, den Rest 1 läßt, so fällt ein bestimmter Kalendertag, beispielsweise der 1. Januar, in zwei aufeinanderfolgenden Jahren nie auf denselben Wochentag, vielmehr fällt ein Datum in einem Jahre beispielsweise auf einen

Sonntag und im nächstfolgenden alsdann bekanntlich auf einen Montag oder, wenn inzwischen ein Schalttag vorgekommen ist, auf einen Dienstag.[1]) Die Frage, auf welchen Wochentag ein bestimmtes Datum fällt, zu beantworten, ist Aufgabe des Kalenders. Wir geben nun auf der folgenden Seite einen immerwährenden Kalender[2]) und wollen dessen Gebrauch zunächst an

---

1) Eine von Auric („Sur la formation des calendriers", Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences 26, Congrès de St. Étienne 1897, t. II, p. 172) vorgeschlagene und vielleicht auch von anderer Seite proponierte oder befürwortete Kalenderreform bezweckt eine unveränderte Lage der Wochentage, indem in jedem Jahre der überzählige (365ste) Tag und in Schaltjahren auch noch der Schalttag in besonderer Benennung außerhalb der Wocheneinteilung geführt werden sollen.

2) Aus der großen Zahl der — freilich nur äußerlich — verschiedenen Anordnungen, die hier möglich sind, wählten wir die unsere, weil sie die innere Einrichtung leicht erkennen läßt. Ein für den praktischen Gebrauch sehr zweckmäßiger „Ewiger Kalender", verbunden mit Festkalender, herausgegeben von Hermann Schubert, ist, auf Karton aufgezogen, im Verlage der Heroldschen Buchhandlung in Hamburg erschienen; wohl noch praktischer und sehr handlich ist der von Dr Doliarius (Joh Ed. Böttcher) bei B. G. Teubner (1914) in Postkartengröße herausgegebene Dauerkalender, der nicht nur die großen christlichen Feste, sondern auch sofort die Namen der einzelnen Sonntage für jedes Jahr angibt Gewiß werden noch zahlreiche ähnliche Vorrichtungen im Handel gewesen sein oder auch noch umlaufen, so ist z B in der älteren Zeit, wie ich G A Riecke. „Mathematische Unterhaltungen", 3. Heft (Stuttgart 1873), p 33, entnehme, bei Erhard & Söhne in Schwäbisch-Gmünd ein „Tagsucher" oder „Hemeroskop" erschienen, das derselben Aufgabe — Bestimmung des Wochentags zu einem gegebenen Datum — diente und die Form einer Zündholzbüchse hatte — A. Fleck („Mnemotechnisch-einfache Berechnung des Kalenders mit den Festtagen", Sitzungsber Berl Math. Gesellsch. 14, 1915 = Anhang zu Arch d Math u Phys. (3) 24, 1915, p 43—50) „ersetzt die Tabellen und Formeln durch ein einfaches, dem Gedächtnis unschwer und dauernd einzuverleibendes System" und empfiehlt auch die Aufnahme in Schulbücher und die Einübung in der Schule, die nur wenige Stunden erfordern werde und für das praktische Leben („Gerichtstermine, historische Daten usw.") doch ganz wichtig sei (?) Eine ähnliche Aufgabe, nämlich dem Schulunterricht durch ungezwungene Einführung in die Elemente der Zahlentheorie an der Hand von Kalenderaufgaben zu dienen, stellt sich neben anderen Zielen die freilich sehr reizvoll geschriebene, interessante Schrift von

Tabelle A (Tage)							Tabelle B (Monate)		Tabelle C (Jahrh. neuen Stils)						Tabelle [illegible] (Jahrh. alten Stils)					Tabelle D (Jahre)						
1	Sonntag	1	8	15	22	29	März	1	15	19	23	27	31	3	0	7	14	21	0	0	1	2	3	4	5	6
2	Montag	2	9	16	23	30	April	4	16	20	24	28	32	2	1	8	15	22	6	00	01	02	03		04	05
3	Dienstag	3	10	17	24	31	Mai	6	17	21	25	29	33	0	2	9	16	23	5	06	07		08	09	10	11
4	Mittwoch	4	11	18	25		Juni	2	18	22	26	30	34	5	3	10	17	24	4		12	13	14	15		16
5	Donnerstag	5	12	19	26		Juli	4							4	11	18	25	3	17	18	19		20	21	22
6	Freitag	6	13	20	27		August	0							5	12	19	26	2	23		24	25	26	27	
0	Sonnabend	7	14	21	28		September	3							6	13	20	27	1	28	29	30	31		32	33
							Oktober	5												34	35		36	37	38	39
							November	1													40	41	42	43		44
							Dezember	3												45	46	47		48	49	50
							Januar*)	6												51		52	53	54	55	
							Februar*)	2												56	57	58	59		60	61*
																				62	63		64	65	66	67
																					68	69	70	71		72
																				73	74	75		76	77	78
																				79		80	81	82	83	
																				84	85	86	87		88	89
																				90	91		92	93	94	95
																					96	97	98	99		

*) Januar und Februar sind stets als zu dem vorhergehenden Jahre zugehörig zu betrachten, z. B. der Januar 1918 als zum Jahre 1917 gehörig; s. a. S. 282.

einem Beispiel erläutern: Es soll bestimmt werden, auf welchen Tag das Inkrafttreten des Gregorianischen Kalenders (15. Oktober 1582) fiel. Zu diesem Zwecke suchen wir in den Tabellen A, B, C, D der Reihe nach den Tag (15), den Monat (Oktober), das Jahrhundert (15) und das Jahr im Jahrhundert (82) auf, addieren die daneben (resp. bei D darüber)stehenden fettgedruckten Zahlen, d. h. also hier $1+5+3+4=13$, suchen dann die so erhaltene Zahl 13 in Tab. A unter den Zahlen gewöhnlichen Druckes auf und finden hiernach als zugehörigen Wochentag: *Freitag.* Natürlich könnte man jetzt zu einem beliebigen anderen Datum den Wochentag auch ohne Tabelle finden, indem man zählt, wieviele Tage seit Beginn dieser Zeitrechnung, also seit 15. Oktober 1582, bis zu jenem verflossen sind, die gefundene Zahl durch 7 dividiert, d. h. die vollen Wochen ausscheidet, und aus dem Rest der Division unter Berücksichtigung des 15. Oktober 1582 als eines Freitags den Wochentag ermittelt. Diese Arbeit wird nun durch unsere Tabellen ausgeführt, indem zunächst in Tab. A diejenigen Monatstage, die sich um ganze Vielfache von 7 unterscheiden, in dieselbe Zeile gestellt sind; in Tab. B muß, wenn z. B die für März charakteristische Zahl 1 ist, dieselbe für April $1+3=4$ sein, weil zwischen dem x-ten März und dem x-ten April 31 Tage, also 3 Tage und eine Anzahl voller

Walther Jacobsthal „Mondphasen, Osterrechnung und Ewiger Kalender" (Berlin 1917) — An sonstiger Literatur über immerwährende Kalender nenne ich nach meinen Aufzeichnungen, ohne hierbei jedoch auf Vollständigkeit irgendwelchen Anspruch zu erheben, zunächst folgende Notizen des Intermédiaire des mathématiciens 12, 1905, p 10 (Frage 2868: „Wie bestimmen die Rechenkünstler, speziell Inaudi, zu einem bestimmten Datum den Wochentag?"): 13, 1906, p 252/3; 14, 1907, p 31, 62—68; 15, 1908, p. 280 (der hier von G. Lemaire angekündigte, mir übrigens nicht bekannte immerwährende Kalender ist nach Interméd 17, 1910, p. 104, veröffentlicht in A Gérardins lithographierter Zeitschrift Sphinx Oedipe 1909, p 185—187); s ferner Escoffier, „Calendrier perpétuel" (1880); Ad Hugel, „Kurze Geschichte des Deutschen Kalenders nebst Hinweisung auf die Anfertigung eines 'immerwährenden Kalenders'" (Darmstadt 1887); Demonferrand, „Calendrier perpétuel", Assoc. franç. pour l'avancement des sciences 23, Congrès de Caen 1894, II, p. 135—141

Wochen, liegen, usw. Die Tab. D ist so eingerichtet, daß die Jahre, die mit demselben Wochentag beginnen, in derselben Spalte stehen. Dabei wachsen die charakteristischen (fettgedruckten) Zahlen der aufeinanderfolgenden Jahre im allgemeinen um 1 und nur, wenn das zweite der beiden ein Schaltjahr ist, um 2. Streng genommen müßte im letzteren Falle ein Unterschied gemacht werden bezüglich der Monate Januar und Februar einerseits und der übrigen andererseits; eine größere tabellarische Einfachheit erreicht man hier jedoch durch den Kunstgriff, die Monate Januar und Februar stets dem vorhergehenden Jahre zuzurechnen, also als Anfang des Jahres gewissermaßen den 1. März anzusehen, so daß als das Jahr von 366 Tagen nicht das eigentliche Schaltjahr, sondern das ihm vorhergehende, erscheint. Die Tab. D weist übrigens natürlich einen Zyklus von je $4 \cdot 7 = 28$ Jahren auf: Die Jahre 56—83 bieten im Rahmen dieser Tab D offenbar genau dasselbe Bild dar wie die Jahre 28—55 oder wie 00—27. Was schließlich die Tab. C anlangt, so ist zu beachten, daß das Jahrhundert in der Regel $365 \cdot 100 + 24$ Tage zählt, eine Zahl, die, durch 7 geteilt, den Rest 5 läßt. Die charakteristischen (fettgedruckten) Zahlen der Tab. C wachsen daher um je 5 zwischen 16 und 17, zwischen 17 und 18, zwischen 18 und 19, dagegen um 6 zwischen 15 und 16, weil das Jahr 1600 ja — im Gegensatz zu 1700, 1800 oder 1900 — ein Schaltjahr ist, wodurch das betreffende Jahrhundert: 1. Jan. 1501—31. Dez. 1600, auf 25 Schalttage, statt 24, kommt. Für die entsprechende Tabelle C′ des alten Stils ist der Unterschied der charakteristischen Zahlen natürlich gleichmäßig überall 6; dabei sind in beiden Tabellen natürlich stets die kleinsten Reste nach 7 zu nehmen — Für den Gregorianischen Kalender wiederholt sich alle 400 Jahre dasselbe Spiel in folgendem Sinne: Ein bestimmter Kalendertag des Jahres x im 22. Jahrhundert fällt auf denselben Wochentag wie derselbe Kalendertag des Jahres x im 18. Jahrhundert. In jedem Jahre verschiebt sich ja nämlich der Wochentag eines bestimmten Kalendertages um einen Tag und im Schaltjahre um 2 Tage, in 400 Jahren also um $400 + 4 \cdot 24 + 1$ (jedes Jahrhundert hat 24 Schalttage, zu denen alle 400 Jahre ein weiterer Schalttag

hinzutritt) = 497 Tage; diese Zahl ist aber ein Vielfaches von 7. In Tabelle C stehen daher die um 4 unterschiedenen Jahrhundert-Zahlen, z. B. 16, 20, 24, 28, 32, in derselben Zeile. Für den Julianischen Kalender wiederholt sich dasselbe Spiel in entsprechender Weise alle 7 Jahrhunderte ($700 + 7 \cdot 25$ ist durch 7 teilbar), und in Tabelle C′ stehen daher die um 7 unterschiedenen Zahlen in derselben Zeile.

Um noch ein paar Beispiele zu geben, seien die folgenden Fragen nach unseren Tabellen beantwortet:

An welchem Wochentage wurde Gauß geboren (30. April 1777)? Die Tabellen ergeben der Reihe nach: $2 + 4 + 0 + 5 = 11$; es war also ein *Mittwoch.*

An welchem Wochentage Goethe (28. August 1749)? Die Tabellen ergeben der Reihe nach: $0 + 0 + 0 + 5$; es war also ein *Donnerstag.*

Dieselbe Frage für Bismarcks Geburtstag (1. April 1815). Die Tabellen liefern sukzessive: $1 + 4 + 5 + 4 = 14$; es war mithin ein *Sonnabend.*

Die hier gegebenen Tabellen für die Bestimmung des Wochentags zu einem gegebenen Datum können natürlich auch durch eine entsprechende Formel ersetzt werden: Ist das gegebene Datum der q-te Tag des m-ten Monats im Jahre $100\,J + n$ ($n < 100$), so ergibt sich nach Zeller[1]) der Wochentag durch die Formel

$$q + \frac{(m+1)\,26}{10} + n + \frac{n}{4} - J - 2$$

für den Julianischen und durch

$$q + \frac{(m+1)\,26}{10} + n + \frac{n}{4} + \frac{J}{4} - 2\,J$$

für den Gregorianischen Kalender. Die Monate Januar und Februar sind dabei als 13. resp 14. des vorhergehenden Jahres zu rechnen.

1) Chr. Zeller, „Problema duplex Calendarii fundamentale“, Bull. de la soc. mathém de France XI, 1882/83, p 59—61; vgl auch v dems.: „Kalender-Formeln“, Acta mathem. IX, 1887, p. 131—136 und Mathem.-naturwiss. Mitteilungen, herausgeg v Böklen, II, Stuttgart 1885, p 54—58.

Von den diversen Brüchen der Formeln sind nur die ganzzahligen Teile und von der durch die ganze Formel erhaltenen Zahl der Rest nach 7 zu nehmen. Dieser Rest gibt dann an, auf den wievielten Tag der Woche das betreffende Datum fiel. Für das oben gebrauchte Beispiel: 15. Oktober 1582 wäre $q = 15$, $m = 10$, $J = 15$, $n = 82$, also erhielte man $15 + 28 + 82 + 20 + 3 - 30$, und diese Zahl gibt, durch 7 geteilt, den Rest 6. Der betreffende Tag ist also der 6te der Woche, d. h. Freitag. Die Komposition der Formeln ist so durchsichtig, daß wir zur Erklärung nur bemerken wollen, daß man in dem zweiten Gliede den Bruch $\frac{26}{10}$ wählen mußte, um die jeweilige Differenz von 2 resp. 3, die die Tabelle B zwischen den einzelnen Monaten aufweist, überall richtig zu erhalten; die Werte von m liegen, wie schon gesagt, zwischen 3 und 14 einschließlich dieser Grenzen. Für ein Datum des zwanzigsten Jahrhunderts geben diese Formeln für den alten und den neuen Stil die tatsächliche Differenz beider, nämlich $19 - \frac{19}{4} - 2 = 13$ (vgl. S. 278). Diese Differenz vergrößert sich dann wegen des Unterschiedes in den Gliedern $2J$ und J der beiden Formeln mit jedem neuen Jahrhundert um je 1, außer wenn J durch 4 teilbar ist, wo durch den Zuwachs, den das Glied $\frac{J}{4}$ alsdann erfährt, jener Unterschied wieder ausgeglichen wird.

Um noch eine Anwendung unserer Tabellen zu geben, wollen wir die mehrfach[1]) behandelte Frage ins Auge fassen: „**In welchen Jahren fallen 5 Sonntage in den Februar?**“ Selbstverständlich kann sich dies nur in einem Schaltjahr ereignen und auch dann nur, wenn der 29te und damit zugleich der 1te Februar Sonntage sind. In welchen Jahren des 20sten Jahrhunderts

1) Siehe z. B. Zachs Corresp astron. X, 1824, p. 380—383; W Matzka, Ober-Feuerwerker im K. K. Bombardier-Corps zu Wien, „Analytische Auflösung dreier Aufgaben der Calendarographie“, Crelles Journ III, 1828, p. 341; G. A. Jahn, Stud. math., „Auflösung einiger Aufgaben aus der Calendariographie“, Crelles Journ. IX, 1832, p 143/144; Ferd. Piper, Lic., „Zur Kirchenrechnung, Formeln und Tafeln“, Crelles Journal XXII, 1841, p 114/115; Educational Times Reprints, vol. 68 (1898), p. 35 (K. S. Putnam)

ist dies nun der Fall? Die Tabellen A, B, C liefern uns für 1. Februar 19 . . die Summe $1+2+3=6$; dazu kommt dann noch aus Tabelle D die betreffende Zahl für das laufende Jahr des Jahrhunderts. Soll nun unser Datum ein Sonntag sein, so muß diese aus Tabelle D noch hinzutretende Zahl offenbar eine 2 sein. Es kommen also von der Spalte 2 der Tab. D diejenigen Jahre in Betracht, in denen der Februar 29 Tage hat, wobei die Zurechnung des Monats Februar zum vorhergehenden Jahre zu berücksichtigen ist. Es sind daher die Zahlen 19, 47, 75 zu nehmen; d. h. *die Jahre 1920, 1948, 1976 und auch nur diese haben im 20sten Jahrhundert je 5 Sonntage im Februar.* Für das 19. Jahrhundert erhält man in gleicher Weise die Jahre 1824, 1852, 1880 und auch nur diese; für das 21. Jahrhundert die Jahre: 2004, 2032, 2060, 2088. Im 17. Jahrhundert sind resp. waren es die entsprechenden Jahre wie im 21. Jahrhundert, also 1604, 1632, 1660, 1688, wie ja überhaupt nach dem oben bereits Gesagten alle 400 Jahre sich im Kalender neuen Stils dasselbe Spiel wiederholt.

§ 3. Berechnung des Osterdatums.

Das Konzil von Nicäa setzte bekanntlich mit Rücksicht auf die Überlieferung, daß die Auferstehung Jesu einem Vollmond nach dem Frühlingsäquinoktium folgte, das Osterfest auf den ersten Sonntag nach Vollmond nach Frühlingsanfang fest

Für die hiernach nicht ganz einfache Berechnung des Osterdatums gab Gauß[1]) bekanntlich eine Methode an, die auch für

---

1) „Berechnung des Osterfestes". Von Doctor Gaus [sic!] in Braunschweig. Monatl Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, hrsgeg. v. Frhr v. Zach, 2 Bd., 1800, p 121—130 = Gauß' Werke VI, p. 73—79 — Von neueren Arbeiten sind insbesondere die Untersuchungen von Adolf Fraenkel zu nennen: „Die Berechnung des Osterfestes", Journ. f. d. reine u. angew Math. 138, 1910, p 133—146; „Le calcul de la date de Pâques", Scientia, Rivista di Scienza, vol. IX, anno V (1911), p. 435—439; in diesen Arbeiten übrigens auch weitere Literaturangaben, so über einen Nachtrag von Gauß, sowie über die besten Ableitungen der Osterformel (Journ. f Math, l. c. p 133/134). Auch die

das nicht astronomisch gebildete und mit den diversen, sonst hierbei gebräuchlichen technischen Ausdrücken, wie „Epakte“, „güldene Zahl“, „Sonnenzirkel“ etc., nicht vertraute Publikum leicht verständlich war. Sein Verfahren besteht in folgendem:

Es entstehe aus der Division	durch	der Rest
der Jahreszahl	19	a
„	4	b
„	7	c
der Zahl $19a+M$	30	d
„ „ $2b+4c+6d+N$	7	e

Dann fällt Ostern auf den $(22+d+e)$-ten März resp. den $(d+e-9)$-ten April. Dabei sind M und N Zahlen, die im Julianischen Kalender für immer, im Gregorianischen hingegen allemal wenigstens für 100 Jahre unveränderliche Werte haben, und zwar ist in jenem $M=15$, $N=6$, in diesem für die Zeit von der Einführung desselben

		bis 1699	$M=22$,	$N=2$;
von 1700	bis	1799	$M=23$,	$N=3$;
„ 1800	„	1899	$M=23$,	$N=4$;
„ 1900	„	1999	$M=24$,	$N=5$;
„ 2000	„	2099	$M=24$,	$N=5$;
„ 2100	„	2199	$M=24$,	$N=6$;
„ 2200	„	2299	$M=25$,	$N=0$;
„ 2300	„	2399	$M=26$,	$N=1$;
„ 2400	„	2499	$M=25$,	$N=1$.

Obige Regeln sind freilich im Gregorianischen Kalender infolge von zwei bei der Gregorianischen Reform gemachten

schon oben erwähnte Schrift von Jacobsthal, die mir erst während der Drucklegung dieses Buches zu Gesicht kam und daher hier nicht weiter berücksichtigt werden konnte, ist hier besonders zu nennen, da sie eine recht einfache Osterformel bietet. Über das Verfahren der Rechenkünstler bei Bestimmung eines Osterdatums s. P. Maennchen, „Geheimnisse der Rechenkünstler“ = Mathem. Bibl., XIII (Lpz. u. Berlin 1913), p. 23 ff.

willkürlichen und systemwidrigen Festsetzungen noch mit folgenden zwei Ausnahmen behaftet:

1) Liefert die Rechnung für den Ostertag den 26sten April, so ist statt dessen der 19te April, der vorhergehende Sonntag, zu nehmen.

2) Liefert die Rechnung: $d = 28$, $e = 6$, und ist außerdem der Rest von $11\,M + 11$ bei der Division durch 30 kleiner als 19, so fällt Ostern nicht, wie die Rechnung ergibt, auf den 25sten April, sondern auf den vorhergehenden Sonntag, den 18ten April.

Für die Zeit von 1900 bis 1999 läßt sich an die Stelle der allgemeinen Methode folgende speziellere setzen: Ist n das laufende Jahr des Jahrhunderts, also für 1953 z. B. die Zahl 53, und

entsteht aus der Division	durch	der Rest
von n	19	a
„ n	4	b
„ $n + 3$	7	c
der Zahl $19a + 24$	30	d
„ „ $2b + 4c + 6d + 5$	7	e

so fällt Ostern auf den $(22 + d + e)$-ten März resp. den $(d + e - 9)$-ten April. Dabei ist für das Jahr 1954 der 18te April statt des 25sten und für 1981 der 19te April statt des 26sten zu nehmen.

Die Jahre 1954 und 1981 sind in diesem Zeitraum nämlich die einzigen, die von jenen obigen zwei Ausnahmebestimmungen betroffen werden. Soll nämlich 1) der 26ste April sich aus der Rechnung ergeben, so muß $d = 29$, $e = 6$ sein, und die Bedingung $d = 29$ involviert, daß $19a = 5 + 30 \cdot \alpha$ ist (α eine ganze Zahl); das bedeutet, da ja $a < 19$, daß $a = 5$ und n also $= 5, 24, 43, 62, 81$ ist. Von diesen 5 Werten liefert aber nur $n = 81$ den verlangten Wert für e, wie eine mechanische Rechnung zeigt. In entsprechender Weise ergibt sich, daß nur das Jahr 1954 von der zweiten Ausnahmebestimmung (für $d = 28$, $e = 6$) betroffen wird.

§ 4. Früheste und späteste Ostertermine.

Der früheste überhaupt mögliche Ostertermin ist der 22. März; er tritt dann und nur dann ein, wenn $d = e = 0$ ist. Die Gleichung $d = 0$ bedingt nun, daß $19a + M = 30 \cdot \alpha$ ist, wo α eine ganze Zahl und a seiner Definition nach der Rest der Jahreszahl aus der Division durch 19, also, wie wir schreiben wollen, $R\left(\frac{j}{19}\right)$ ist (j = Jahreszahl). Beschränken wir uns zunächst auf das 17. Jahrhundert und fragen wir, für welche Jahre dort diese Bedingung erfüllt ist, so haben wir $M = 22$ zu setzen und erhalten somit die Bedingungsgleichung $19a + 22 = 30 \cdot \alpha$, die durch $a = 2$ befriedigt wird, und zwar ist, da $a = R\left(\frac{j}{19}\right)$, also jedenfalls < 19 ist, dieses $a = 2$ der einzige ganzzahlige Wert für a, der unserer Gleichung genügt Wir erhalten somit die Gleichung $R\left(\frac{j}{19}\right) = 2$ oder, wenn wir $j = 1600 + n$ setzen:

$$R\left(\frac{1600+n}{19}\right) = R\left(\frac{n+4}{19}\right) = 2 \quad \text{oder} \quad R\left(\frac{n+2}{19}\right) = 0.$$

Hieraus folgt: $n = 17$ oder 36 oder 55 oder 74 oder 93. Nun soll aber auch $e = 0$ sein, und diese Bedingung lautet, da N für das 17. Jahrhundert $= 2$ ist, ausführlich geschrieben, so:

$$2b + 4c + 2 = 7 \cdot \beta,$$

wo β eine ganze Zahl ist, die offenbar gerade sein muß Berücksichtigen wir die Bedeutung von b und c und setzen wir wieder $j = 1600 + n$, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$R\left(\frac{n}{4}\right) + 2 \cdot R\left(\frac{n+4}{7}\right) + 1 = 7 \cdot \frac{\beta}{2} \cdot$$

Von den oben erhaltenen Werten für n, die die Gleichung $d = 0$ befriedigten, genügt nun der jetzigen Gleichung allein $n = 93$. Das Jahr 1693 ist also das einzige Jahr des 17. Jahrhunderts, in dem der Ostersonntag auf den 22. März fiel. — In derselben Weise kann man die Berechnung für die folgenden Jahrhunderte

ausführen und findet so[1]), daß den *22. März als Ostersonntag in dem Zeitraum von 1600 bis 2500 nur die folgenden Jahre aufweisen: 1693, 1761, 1818, 2285, 2353, 2437.*

Auch der zweitfrühste Ostertermin, der möglich ist, der 23. März, ist noch relativ recht selten, aber, während der 22. März in unserem ganzen 20. Jahrhundert und auch in den beiden folgenden Jahrhunderten gar nicht vorkommt, haben wir den 23. März erst vor wenigen Jahren, im Jahre 1913 nämlich, als Ostersonntag gehabt, und wir wollen hier nun die Frage aufwerfen, **wann dieser Ostertermin überhaupt in unserem Jahrhundert vorkommt.** Offenbar muß, wenn dies eintreten soll, entweder $d = 0$, $e = 1$ oder aber $d = 1$, $e = 0$ sein. Soll zunächst $d = 0$ sein, so bedeutet dies: $19a + 24 = 30 \cdot \alpha$, wo α eine ganze Zahl ist; der kleinste ganzzahlige Wert von a, der dieser Gleichung genügen würde, wäre nun $a = 24$, während a, seiner Definition nach $= R\left(\frac{n}{19}\right)$, nur kleiner als 19 sein darf. Ein Wert von a, der die Gleichung $d = 0$ befriedigte, ist mithin nicht möglich und damit scheidet dieser Fall: $d = 0$, $e = 1$ als unerfüllbar aus Soll zweitens $d = 1$ sein, so heißt das: $19a + 24 = 30 \cdot \alpha + 1$, wo α eine ganze Zahl ist, oder: $19a + 23 = 30 \cdot \alpha$. Diese Gleichung wird erfüllt durch $a = 13$ und, da $a = R\left(\frac{n}{19}\right)$ ist, so haben wir also die Bedingungsgleichung: $R\left(\frac{n}{19}\right) = 13$, die durch folgende Werte von n befriedigt wird: 13, 32, 51, 70, 89. Von diesen 5 Werten von n paßt aber nur $n = 13$, wie eine mechanische Rechnung zeigt, zu unserer zweiten Forderung: $e = 0$. Das Jahr 1913 ist somit das einzige des laufenden Jahrhunderts, das den Ostersonntag am 23 März hat und, da der 22. März als Ostertermin in diesem Jahrhundert überhaupt nicht vorkommt, so steht mithin das Jahr 1913 ohne Rivalen als dasjenige des frühesten Ostertermins im

1) Natürlich könnte man aus einer genugend weit reichenden Ostertabelle diese Ergebnisse ohne weiteres ablesen; von den beiden oben (S 279, Anm. 2) genannten Dauerkalendern gibt der Böttchersche die Ostertabelle für den Gregorianischen Kalender bis zum Jahre 2000, der Schubertsche bis zum Jahre 2199

ganzen Jahrhundert da. — Im vorigen Jahrhundert ist der 23. März als Ostersonntag zweimal vorgekommen: in den Jahren 1845 und 1856. Ihnen folgt dann zunächst unser Jahr 1913, und die weiteren Vorkommnisse des gleichen Ostertermins bis zum Jahre 2500 sind die Jahre 2008, 2160, 2228, 2380. Von diesen letzten 4 Jahren entsprechen die beiden ersten der Kombination $d=1$, $e=0$ und die beiden letzten $d=0$, $e=1$.

Auf das Vorkommen des **spätesten Ostertermins** (25. April) gehen wir nicht mit derselben Ausführlichkeit ein, sondern beschränken uns auf die Angabe, daß dieser späteste Termin zuletzt im Jahre 1886 vorgekommen ist und zunächst erst im Jahre 1943 und darauf im Jahre 2038 wieder vorkommen wird. — Ob wir resp. unsere Nachfahren alle die hier angegebenen frühen und späten Osterfeste zukünftiger Jahre und Jahrhunderte wirklich feiern werden, steht freilich dahin; denn bekanntlich und mit Recht sind seit langem Bestrebungen im Gange, die darauf abzielen, den Ostertermin, der nach der jetzt gültigen Norm einen Spielraum von 35 Tagen hat, in wesentlich engere Grenzen einzuschließen.[1])

---

1) Vgl. Wilhelm Foerster, „Kalenderwesen und Kalenderreform" = Sammlung Vieweg, Heft 13 (Braunschweig 1914), p. 41 ff. — Der Heilige Stuhl bzw. eine vom Papst hierfür eingesetzte Kardinalkommission hat freilich im Jahre 1914 gegen die auf eine Osterreform gerichteten Petitionen entschieden.

Kapitel XXII.

Geometrische Konstruktionen durch Falten von Papier.

Wenn es von einer geometrischen Konstruktion kurz heißt, daß sie „lösbar“, von einer anderen, daß sie „unlösbar“ sei, so ist dabei stets stillschweigend der Zusatz zu machen: „mit alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal“. Manche in diesem Sinne unlösbare Aufgabe, wie z. B. die Dreiteilung eines beliebigen Winkels, wird lösbar, sobald andere Hilfsmittel gestattet werden. Andererseits ist von diesen beiden Hilfsmitteln noch das eine, das Lineal, völlig entbehrlich, d. h.: jede mit Zirkel und Lineal lösbare Aufgabe ist auch mit dem Zirkel allein lösbar.[1])

In diesem Kapitel beabsichtigen wir, einige Proben aus einem von dem indischen Mathematiker Sundara Row 1893 herausgegebenen Buche[2]) zu geben, in dem gezeigt wird, wie

1) Dieser Nachweis wurde erbracht von L Mascheroni durch sein Buch „La geometria del compasso“ (Pavia 1797), ins Französ. übersetzt von Carette 1798, hieraus ins Deutsche von J Ph Gruson 1825; außerdem existiert eine freie, jedoch nicht fehlerlose deutsche Bearbeitung von Ed. Hutt: „Die Mascheronischen Konstruktionen“ (Halle 1880). — Das Gegenstück zu dieser „Geometrie des Zirkels“ ist die Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung; denn eine reine Geometrie des Lineals, mit völliger Ausschaltung des Zirkels also, ist nicht möglich Wohl aber kann man sich auf einen Zirkel von konstanter Öffnung, also auf Kreise von durchweg demselben Radius, beschränken und dennoch alle Konstruktionen, die im gewöhnlichen Sinne mit Zirkel und Lineal möglich sind, ausführen An Literatur nenne ich nur: W M. Kutta, „Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung“, Abhandlungen der Kaiserl.-Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher, 71. Bd (Halle 1898), p 69—101

2) „Geometrical exercises in paper folding“ (Madras 1893, Addison & Co) Eine neuere, von der Open Court Publishing Co. in Chi-

man zu verfahren hat, wenn man die geometrischen Konstruktionen lediglich durch Falten von Papier ausführen will, wobei als Hilfsmittel zulässig sind ein Messer zum Zerschneiden des Papiers längs einer Falte und Papierstreifen zum Abmessen von unter sich gleich langen Linien.

I. Aus einem Stück Papier von beliebiger Form ein Rechteck herauszuschneiden.

Man falte das Papier längs AB (s. Fig. 1), trenne mit dem Messer den Randstreifen ab und falte dann das Papier längs

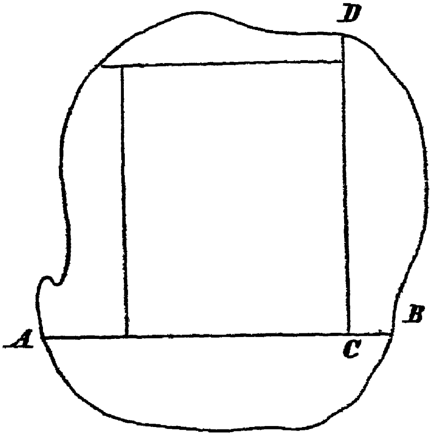


Fig 1

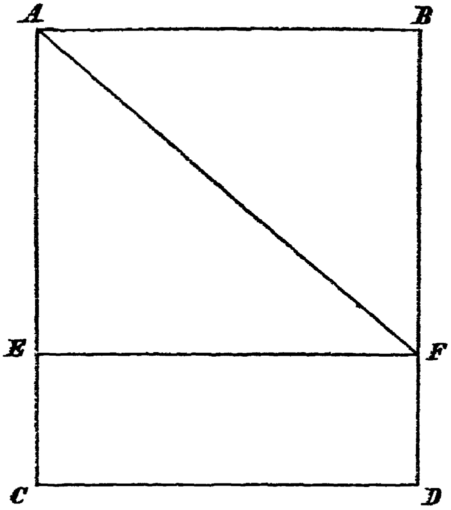


Fig 2

CD so, daß die Kante AB mit sich selbst teilweise zur Deckung kommt; dadurch entsteht bei C ein rechter Winkel Jetzt trennt man mit dem Messer längs CD den Randstreifen ab und fährt dann in derselben Weise fort.

Soll das Rechteck vorgeschriebene Dimensionen haben, so bedient man sich zum Abmessen derselben eines Papierstreifens, dem man durch Falten und Abtrennen mit dem Messer eine

cago veranstaltete Ausgabe des Buches, die ich erwähnt finde, ist mir unbekannt (s a literar. Index: Nr 514).

geradlinige Kante gegeben hat. Dasselbe geschieht, wenn ein Quadrat ausgeschnitten werden soll. — Soll ein Quadrat aus einem schon rechteckig zugeschnittenen Blatt ($ABCD$ in Fig. 2) ausgeschnitten werden, so kann dies auch geschehen, indem man das Papier um AF so faltet, daß die kleinere Rechtecksseite AB auf die größere AC fällt. Man faltet dann in EF und trennt den überstehenden Teil ab. Nachdem wir so die Konstruktion eines Quadrats bereits kennen gelernt, setzen wir der Einfachheit halber das Papier in Zukunft stets quadratisch voraus.

Bei der Konstruktion des Rechtecks lösten wir die Aufgabe: „In einem (beliebigen oder bestimmten) Punkt einer Linie ein Lot auf dieser zu errichten." Die Lösung war so einfach und selbstverständlich, daß ein besonderer Hinweis dort überflüssig war. Dasselbe gilt von anderen sogenannten „Fundamentalkonstruktionen". So halbiert man eine Linie, indem man sie so mit sich zur Deckung bringt, daß die beiden Endpunkte zusammenfallen; so halbiert man einen gegebenen Winkel, indem man die beiden Schenkel zur Deckung bringt, usw.

II. Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks.

Man falte das jetzt quadratisch vorausgesetzte Papierblatt längs der vertikalen Mittellinie DE (s. Fig. 3) durch Selbstdeckung von AB, wende AB um A so, daß B auf DE fällt in C (hierdurch entsteht eine Falte, um die das Papier umgelegt wird, und zwar sollen solche Umlegefalten, die selbständige Bedeutung für die Konstruktion nicht haben, von jetzt ab in den Figuren punktiert werden, während gestrichelte Linien Hilfslinien für die Darstellung sind), markiere den Punkt C durch eine Falte und falte dann das Papier längs AC und BC — und das gleichseitige Dreieck ist fertig. — Will man nur ein gleichschenk-

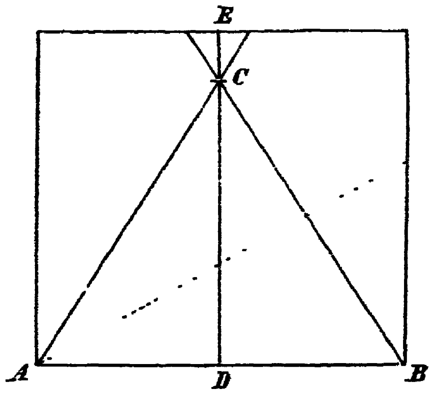


Fig 3

liges Dreieck, so darf der Punkt C auf DE natürlich beliebig gewählt werden.

III. Über einer gegebenen Linie AB als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck von vorgeschriebener Höhe zu konstruieren.

Man falte (s. Fig. 4) in dem vorgeschriebenen Höhenabstand, der mittelst eines Papierstreifens $= BF$ abgemessen wird, das Papier — durch Koinzidenz der Quadratseiten mit sich selbst — parallel zu AB, halbiere AB in D und wende DB um D so, daß B auf EF fällt in C; dann ist Dreieck ABC nicht nur von der verlangten Höhe, sondern auch rechtwinklig, weil $AD = BD = CD$ ist.

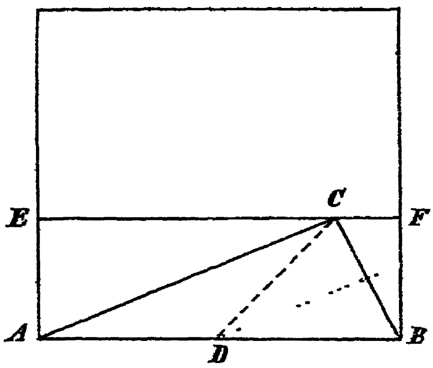


Fig 4

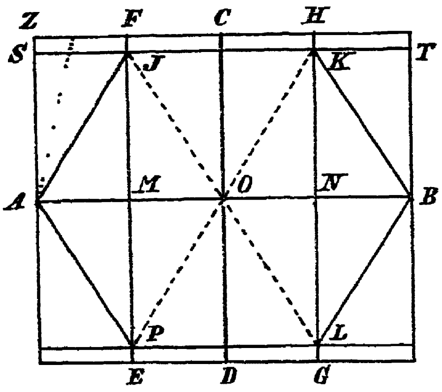


Fig 5

IV. Konstruktion eines regulären 6-Ecks.

Man falte das Blatt in den beiden Mittellinien AOB und COD (s Fig. 5) und errichte über AO und OB nach oben und unten gleichseitige Dreiecke; deren 4 Spitzen bilden alsdann mit A und B zusammen die Ecken eines regulären 6-Ecks. Die Konstruktion dieser 4 Dreiecksspitzen geschieht entweder streng nach II oder, einfacher wohl, folgendermaßen: Nachdem AOB und COD gefaltet sind, halbiere man jede der beiden Hälften nochmals durch vertikale Mittellinien, EMF und GNH, lege AZ um A auf MF, wobei Z auf J fällt, und falte nun das

Blatt in einer Parallelen ST zu FH durch J und durch Umklappen um AB auf der anderen Seite ebenso. Hierdurch erhält man zu A, B, J die 3 weiteren Ecken des regulären 6-Ecks K, L und P. — Aus dem 6-Eck ergibt sich dann leicht ein reguläres 12-Eck, von dem man übrigens 2 der neu hinzutretenden Ecken bereits in den Punkten C und D besitzt.

V. Konstruktion eines regulären 8-Ecks.

Man falte die Mittellinien AB und CD (s. Fig. 6) und lege jedes der so entstehenden 4 Quadrate um eine seiner Diagonalen so, daß das Quadrat $ADBC$ entsteht. Die Seiten desselben bilden mit denen des großen Winkel von je 45^0; diese 8 Winkel halbiert man und erhält so offenbar das reguläre 8-Eck $AEDFBGCH$.

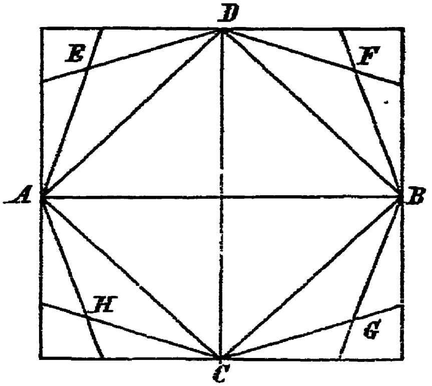


Fig 6

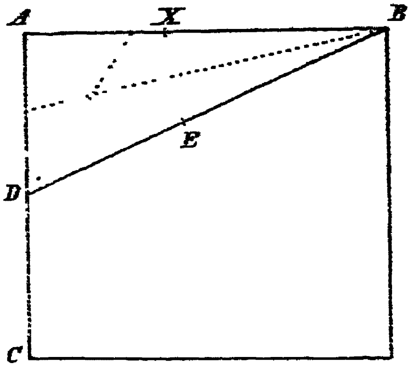


Fig 7

VI. Eine gegebene Linie AB nach goldenem Schnitt zu teilen.

Ist $AB = a$ (s Fig 7) die nach goldenem Schnitt zu teilende Linie, so muß ihr größerer Abschnitt x der Bedingung $a:x = x:(a-x)$ genügen, woraus folgt $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$. Die Konstruktion dieses Ausdrucks ergibt sich nun leicht, wie folgt: Man halbiere AC in D, falte $BD\left(=\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)$, lege $AD\left(=\frac{a}{2}\right)$ um D auf DB, so daß A auf E fällt, und lege $BE\left(=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)\right)$

um B auf AB, so daß E auf X fällt; dann ist AB in X stetig geteilt.[1])

Hiernach ergeben sich leicht die Konstruktionen eines regulären 5- und 10-Ecks, sowie eines regulären 15-Ecks. Auf diese, wie auch auf die gleichfalls von Sundara Row angegebene Konstruktion eines regulären 17-Ecks glaube ich hier verzichten zu sollen, dagegen mag wenigstens noch an einem Beispiel gezeigt werden, wie man mit diesen Hilfsmitteln, wenn auch natürlich nicht kontinuierliche Kurven (außer der geraden Linie), so doch beliebig viele diskrete Kurvenpunkte konstruieren kann. Für den Kreis wäre diese Konstruktion trivial, da seine Punkte durch Abmessen derselben Entfernung vom Mittelpunkt mittelst Papierstreifen erhalten werden würden; wir betrachten daher als Beispiel:

VII. Konstruktion von Ellipsenpunkten.

Man markiere auf einer Geraden zwei Punkte A und B (s. Fig. 8), errichte in dem Punkte C ein Lot auf der Geraden, nehme auf diesem Lot einen beliebigen Punkt D an, falte DA und DB und errichte auf DA in A ein Lot; der Schnittpunkt dieses Lotes mit DB sei P. Nimmt man nun andere und andere Punkte D auf dem in C errichteten Lot an, so liegen die zugehörigen Punkte P alle auf einer Ellipse.

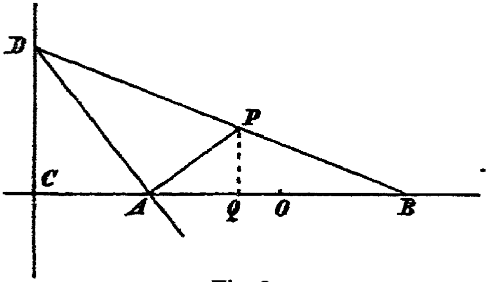


Fig. 8.

Betrachtet[2]) man nämlich die Linie AB als x-Achse eines Cartesischen Koordinatensystems und die Mitte O von AB als

1) Wie mir Herr E. B. Escott von der Universität Ann Arbor (Michigan) freundlichst mitteilte (Brief vom 9. März 1909), läßt sich eine andere Konstruktion angeben, die allerdings wohl ein wenig kürzer ist; für den Beweis ist aber die von Sundara Row angegebene wohl bequemer und daher hier bevorzugt.

2) Einige Bekanntschaft mit analytischer Geometrie vorausgesetzt.

Koordinatenanfangspunkt, so genügen die Koordinaten $y = PQ$ und $x = QO$ des Punktes P, wenn wir $AO = OB = a$, also $AQ = a - x$ und $BQ = a + x$ setzen, offenbar den Relationen:

$$y : (a + x) = DC : BC$$

$$\text{und} \quad y : (a - x) = AC : DC, \quad \text{also}$$

$$\frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{AC}{BC}.$$

Wenn man also die konstante und jedenfalls positive Größe $\frac{AC}{BC} = \frac{b^2}{a^2}$ setzt, so folgt: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Ellipsengleichung).

Kapitel XXIII.

Seltsame Verwandtschaften.

Ernest Legouvé (1807—1903), der bekannte französische Dramatiker, war einst in Plombières im Bade, und dort im Badebassin, so erzählt der Dichter selbst in seinen Lebenserinnerungen[1]), warf er vor den Badegenossen die Frage auf: „Ist es möglich, daß zwei Männer, die gar nicht miteinander verwandt sind, dieselbe Schwester haben?“ „Nein! Das ist unmöglich!“ erklärte auf der Stelle ein Notar, und ein Advokat war zwar nicht ganz so schnell mit der Antwort bereit, schloß sich aber nach einigem Überlegen nur um so bestimmter dem Notar an. Nach diesen Gutachten zweier Autoritäten rief dann die ganze Korona: „Nein! Solch' Fall ist ganz ausgeschlossen!“ „Und doch ist er möglich“, ließ jetzt wieder Legouvé sich vernehmen, „und zwar so wohl, daß ich Ihnen sogleich zwei Männer nennen will, die in dieser Lage sind: Es sind Eugène Sue und — ich.“ Ausrufe des Erstaunens, des Befremdens, des Zweifels waren der Widerhall. „Erklären Sie uns das!“ — „Garçon, geben Sie mir einmal die Schiefertafel, auf der Sie die Douchen anschreiben!“ — Legouvé nahm die Tafel und zeichnete darauf eine Figur, die hier in folgender Form wiedergegeben werden mag:

	II		I		III	
Frau Sue II	∾	Sue sen.	∾	Frl Sauvan	∾	Legouvé sen
	Eugène Sue		Flore Sue		Ernest Legouvé.	

Dabei soll das Zeichen ∾, wie auch weiterhin stets in diesem Kapitel, eine eheliche Verbindung und der vertikale Strich

1) Ernest Legouvé, „Soixante ans de souvenirs“, Première partie (Paris 1886), p. 331—333

(Deszendenzstrich) in üblicher Weise die Abstammung einer Person von einer anderen bzw. von einem Elternpaare angeben. Hiernach ist die Bedeutung unserer Skizze die folgende: Herr Sue sen. heiratete Frl. Sauvan, und aus dieser Ehe („Ehe I“) ging Flore Sue hervor. Später wurde diese Ehe getrennt, und jeder der beiden geschiedenen Gatten ging eine neue eheliche Verbindung ein. Der neuen Ehe des Herrn Sue sen. mit „Frau Sue II“, der „Ehe II“, entsproß Eugène Sue (1804—1857), der nachmals berühmte Romancier; aus der neuen Ehe des ehemaligen Frl. Sauvan mit einem Herrn Legouvé, der „Ehe III“, ging gleichfalls ein Sohn hervor: Ernest Legouvé. Eugène Sue und Ernest Legouvé waren somit gar nicht verwandt miteinander; denn die Eltern des einen waren von denen des anderen völlig verschieden und nicht verwandt miteinander. Dennoch hatten beide Männer eine gemeinsame Schwester (Halbschwester): Flore Sue, die mit Eugène Sue denselben Vater, mit Ernest Legouvé dieselbe Mutter hatte.

Wenn Herr Sue sen. oder Frau Legouvé (geb Sauvan) resp. beide, nach etwaiger Trennung der Ehe II bzw. III durch Scheidung oder Tod des anderen Teils, eine neue (dritte) Ehe eingegangen wären, so existierten eventuell als Sprossen dieser Ehen noch weitere Halbbrüder von Flore Sue und somit noch weitere solche Paare von Männern, die zwar dieselbe Halbschwester hätten, miteinander aber gar nicht verwandt wären. Der Fall freilich, daß drei Männer dieselbe Halbschwester haben und alle drei unter sich gar nicht verwandt sind, ist, wie hiernach leicht zu sehen, nicht denkbar; vielmehr müssen zwei der drei Männer mindestens Halbbrüder sein, brauchen dann aber mit dem dritten gar nicht verwandt zu sein (falls z. B. Sue sen. noch eine dritte Ehe eingegangen wäre, so würde ein Sohn dieser Ehe ein Halbbruder von Eugène Sue, mit Ernest Legouvé aber gar nicht verwandt sein)

Natürlich würden wir im wesentlichen die gleichen verwandtschaftlichen Verhältnisse haben, wenn zuerst die Ehen II und III unseres obigen Schemas und nach ihrer, etwa durch Tod der anderen Ehegatten, bewirkten Trennung die Ehe I geschlossen

wäre. Wir hätten dann also den folgenden Fall: *Ein Witwer und eine Witwe, die beide aus erster Ehe einen Sohn haben, heiraten einander; aus dieser neuen Ehe geht eine Tochter hervor. Die beiden Söhne der früheren Ehen, die unter sich natürlich gar nicht verwandt sind, haben alsdann dieselbe Halbschwester.* — Heiratet ein Witwer A, der aus erster Ehe einen Sohn B hat, eine Witwe a, die aus erster Ehe eine Tochter b mitbringt, so würde einer ehelichen Verbindung dieser Kinder B und b, da sie gar nicht verwandt miteinander sind, natürlich nichts im Wege stehen.[1]) A wäre alsdann, wie das Schema

$$\begin{array}{ccc} A & \sim & a \\ | & & \vdots \\ B & \sim & b \end{array}$$

noch besser verdeutlichen mag, nicht nur der Stiefvater von b, sondern auch deren Schwiegervater und a zugleich die Stief- und Schwiegermutter von B. —

In einer Sammlung sizilianischer Rätsel und Anekdoten[2]) finde ich eine vermutlich auch anderswo verbreitete Geschichte, die zwar nicht wegen besonderer Verwandtschaftsverhältnisse, wohl aber doch ihrer Eigenart wegen hier Erwähnung verdient: Ein Mann war zum Hungertode verurteilt und sollte nun im Gefängnis seinem furchtbaren Schicksal entgegengehen In dieser Zeit durfte er jeden Tag den Besuch seiner Tochter erhalten, die gerade ein neugeborenes Kind nährte: Merkwürdigerweise starb der Gefangene nicht, und die Tochter gab den Richtern die Lösung des Rätsels schließlich mit folgenden Worten: „Voriges Jahr war es mir Vater — und dieses Jahr ist es mir Sohn — ist der Gatte meiner Mutter — das Kind, das ich säuge.“ Die

1) Solche Ehen werden auch gewiß im Leben nicht so ganz selten vorkommen; so wurde einer Zeitungsnotiz zufolge anscheinend im Sommer 1914 in Meerane i S ein solches Paar getraut Ein Beispiel aus der Geschichte ist in meinem Buche „Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik“ (Berlin 1918), p. 113, erwähnt.

2) Giuseppe Pitrè, „Indovinelli, Dubbi, Scioglilingua del popolo siciliano“ = Biblioteca delle tradizioni popolari siciliane per cura di Giuseppe Pitrè, vol. XX (Torino-Palermo 1897), p. 294.

junge Mutter hatte ihrem Vater bei jedem Besuche heimlich die Brust gegeben. So war der Gefangene, wenn auch nicht der leibliche, so doch der Milchbruder seines eigenen Enkelkindes geworden. —

Ein Beispiel recht ungewöhnlicher verwandtschaftlicher Beziehungen bietet die Familiengeschichte der Hohenzollern: Kurfürst Joachim Friedrich von Brandenburg (geb. 1546, gest. 1608) war (seit dem Jahre 1570) mit der Markgräfin Katharina von Cüstrin verheiratet, und ihr beider Sohn, der Kurprinz, nachmalige Kurfürst Johann Sigismund, heiratete im Jahre 1594 Anna, die älteste, i. J. 1576 geborene Tochter des geistesschwachen Herzogs Albrecht Friedrich von Preußen. Die Kurfürstin Katharina starb im Jahre 1602, und ihr Witwer, Kurfürst Joachim Friedrich also, ging nun eine zweite Ehe ein, und diese Verbindung ist es, die wegen der getroffenen Wahl und der sich daraus ergebenden besonderen Verwandtschaftsbeziehungen hier unser Interesse erregt. Der Kurfürst heiratete nämlich die jüngere Schwester seiner Schwiegertochter, Eleonore, die vierte Tochter des Herzogs Albrecht Friedrich von Preußen. Ob der Kurfürst diese Ehe einging, um seinem Hause für die bevorstehende Sukzession in Jülich-Kleve neben den Erbansprüchen der ältesten Schwester auch die der jüngeren zu sichern, mit anderen Worten: um diese jüngere Tochter sozusagen kaltzustellen, oder ob diese Heirat vielmehr, wie Droysen in seiner „Geschichte der preußischen Politik“ sagt, überhaupt nicht von politischen Motiven diktiert war[1]), kommt für uns nicht in Betracht. Dagegen beachte man die sich ergebenden absonderlichen Verwandtschaftsverhältnisse: Kurfürst und Kurprinz, Vater und Sohn, hatten nunmehr zwei Schwestern zu Frauen: der Vater die jüngere, der Sohn die ältere Schwester. Kurfürst Joachim Friedrich war nunmehr der Schwager seiner Schwiegertochter Anna und zugleich, wenn auch nicht juristisch, wohl aber dem gewöhnlichen Sprach-

1) Joh. Gust Droysen, „Geschichte der preußischen Politik“, 2 Teil, 2 Abt. (Lpz 1859), p 559/560 „Politische Gründe konnten kaum dazu veranlaßt haben, er würde dann wohl eher die zweite als die vierte Tochter gewählt haben “

gebrauch nach[1]), der Schwager seines eigenen Sohnes, des Kurprinzen Johann Sigismund. Dieser wieder hatte jetzt in seiner Schwägerin Eleonore eine Stiefmutter erhalten. Von den beiden Schwestern Anna und Eleonore schließlich war die jüngere, Eleonore, jetzt die Schwiegermutter (Stiefschwiegermutter) der älteren. — Einen ganz analogen Fall verwandtschaftlicher Beziehungen bietet übrigens die Familie Blücher: Gebhard Lebrecht Fürst Blücher[2]) von Wahlstatt (geb. 18. März 1836, gest. Juli 1916) war in dritter, im Jahre 1895 geschlossener Ehe mit der am 30. Jan. 1877 geborenen, also nahezu 41 Jahre jüngeren Prinzessin Wanda Radziwill verbunden, während sein Sohn aus zweiter Ehe, Graf Lothar Blücher (geb. 1890), im Jahre 1913 die ältere Schwester seiner Stiefmutter, Prinzessin Luise Radziwill (geb. 5. April 1876), heiratete.

Erheblich seltsamer gestalten sich die Verwandtschaftsbeziehungen, wenn ein **Witwer** (bzw. geschiedener Ehemann)

---

1) Überhaupt folgte und folge ich hier auch sonst, da es sich ja nicht um eine juristische Schrift handelt, dem vulgären Sprachgebrauch und spreche beispielsweise auch da noch von „Verwandten“ bzw von „Verwandtschaft“, wo es in der Rechtssprache „Verschwägerte“ bzw. „Schwägerschaft“ heißen würde. „Verwandt“ im juristischen Sinne (s Bürgerl. Gesetzbuch, § 1589) sind nämlich zwei Personen nur, wenn die eine von der anderen abstammt (Vater und Sohn oder beispielsweise Großmutter und Enkel) oder aber beide von derselben dritten Person abstammen (Vetter und Kusine, beide etwa Enkelkinder desselben Mannes). „Verschwägert“ ist jemand dagegen mit allen „Verwandten“ seines Ehegatten (B G B. § 1590) Hiernach ist nun ein Ehemann der „Schwager“ von der Schwester seiner Frau, aber nicht mehr von dem Ehemann dieser Schwester, vielmehr mit diesem weder verwandt noch verschwägert, — es sei denn, daß ausnahmsweise zwischen beiden, wie in unserem obigen Falle, gleichzeitig noch eine weitere Beziehung — hier: Vater und Sohn — bestande.

2) Es ist dies ein Urenkel des „Marschall Vorwärts“ und der 3. Fürst Blücher· der berühmte Feldmarschall hatte die Fürstenwurde ad personam erhalten; am 18. Oktober 1861 wurde sie jedoch für seinen Enkel, Gebhard Grafen von Blücher, wiederhergestellt und dieser somit der 2. Fürst Blücher. Dessen Sohn ist der hier in Frage kommende 3. Fürst Blucher (s. Gothaischer genealogischer Hofkalender, 153. Jahrg, 1916, p. 275).

und sein Sohn nicht zwei Schwestern, wie in den vorstehenden Fällen, sondern **Mutter** (Witwe bzw. geschiedene Frau) **und Tochter heiraten und zwar der „Vater" die „Tochter", der „Sohn" die „Mutter"**.[1] Freilich, in der Wirklichkeit wird eine solche Verbindung über Kreuz so leicht nicht vorkommen, wohl aber in Werken der Phantasie: in Bühnenstücken[2]) oder in Märchen. Insbesondere ist hier ein altes indisches Märchen[3]) zu nennen, das heute in einer Form, die ihm der im 11. Jahrhundert lebende Somadeva gegeben hat, vorliegt, das aber, nach der von Somadeva benannten, heute zwar unbekannten Quelle zu urteilen, mindestens bis ins 6. Jahrhundert (n. Chr.) zurückgehen muß. Nach der Übertragung Friedrichs von der Leyen[4]) erzählt das Märchen, in Kürze wiedergegeben, folgendes: Ein König wurde von habgierigen Verwandten entthront und mußte mit Frau und Tochter fliehen. Auf dieser Flucht wurde er von Räubern überfallen und, während er selbst in tapferem Kampfe gegen die Überzahl sein Leben lassen mußte, hatten Frau und Tochter sich auf sein Geheiß noch rechtzeitig verstecken können und blieben unbemerkt. Später sahen sie den Leichnam des erschlagenen Königs am Boden liegen und flohen weiter. Dabei kamen sie in einen Wald, in dem der Fürst eines Nachbarreiches mit seinem Sohne gerade der Jagd oblag Diese bemerkten die Fußspuren der beiden Frauen im Sande und verabredeten schließlich, daß sie die Spuren verfolgen und der Vater, der Witwer war, die Frau mit den großen Fußspuren, der Sohn aber die mit den kleinen Füßen, die gewiß die jüngere von beiden sein werde, zur Gattin nehmen

---

1) Vgl Bd I, S 161 (Fall c)

2) Wenn ich recht erinnere, bietet beispielsweise das vor einigen Jahren viel aufgeführte Lustspiel „Mein alter Herr" von Franz Arnold und Victor Arnold einen solchen Fall, ohne daß jedoch die verzwickten Verwandtschaftsbeziehungen dort sonderlich ausgebeutet wären.

3) Den Hinweis hierauf verdanke ich dem in der Schachwelt als geistvoller Schachessayist bekannten Herrn Max Weiß, Rechtsanwalt in Bamberg.

4) Friedrich von der Leyen, „Indische Märchen" = Hendels Bibl. der Gesamtliteratur des In- und Auslandes, No 1188—1191, p. 107 bis 113; über Somadeva und seine Quellen s dort p. 2

sollte. Sie entdeckten die Frauen dann, nahmen sie freundlich auf und führten sie auf ihr Schloß. Entgegen der Erwartung zeigte sich nun, daß die großen Fußspuren von der Tochter, die kleinen von der Mutter, der verwitweten Königin, herrührten. Dennoch wurde die getroffene Vereinbarung durchgeführt:

Weil sie derart bei den Füßen irrten,
Ward die Tochter nun des Vaters Gattin
Und der Sohn erhielt für sich die Mutter.
Mutterschwiegermutter ward die Tochter,
Tochterschwiegertochter ward die Mutter.
Mit der Zeit erzeugten beide Gatten
Mit den Frauen Söhne, dazu Töchter,

und das Märchen wirft nun, allerdings ohne eine Antwort darauf zu geben, die Frage auf:

Jene Kinder, welche Sohn und Vater
Mit der Mutter und der Tochter zeugten,
Waren wie verwandt einander?

Nehmen wir der Einfachheit halber nur an, daß aus jeder dieser Ehen ein Sohn hervorging[1]), so ergeben sich Beziehungen, die wir in der oben bereits benutzten schematischen Darstellungsweise so ausdrücken:

$$\begin{array}{ccc} K \sim k & \qquad\qquad & F \sim f \\ | & & | \\ t \sim F & & S \sim k \\ | & & | \\ A & & B \end{array}$$

Dabei sollen die großen Buchstaben, wie auch oben schon, männliche, die kleinen weibliche Personen bedeuten. Im einzelnen bezeichnet K den von den Räubern erschlagenen König, aus dessen Ehe mit der Frau k die Tochter t hervorgegangen ist Diese heiratet nun unserem Märchen zufolge in der neuen Heimat den Fürsten F, und dieser Ehe entspringt ein Sohn: A. Das zweite Schema bringt zunächst zum Ausdruck, daß der Fürst F schon vorher, mit der verstorbenen Frau f, verheiratet war und aus

1) Siehe jedoch hier S. 363.

dieser Ehe der Sohn S hervorgegangen ist. Dieser S verbindet sich nun unserem Märchen zufolge mit der verwitweten Königin k, und dieser Ehe entspringt ein Sohn: B. Dies die schematische Darstellung der Verhältnisse, wie sie unser Märchen bietet, und wir erheben nun also mit dem Märchen die Frage: **Wie sind A und B miteinander verwandt?** [1])

Zunächst ist A der Halbbruder von S, da beide Söhne von F sind; da aber S der Vater von B ist, so also A der Vaterbruder, d. h. Onkel von B. Andererseits ist aber B der Halbbruder von t, da beide Kinder von k sind, und somit B der Mutterbruder oder Onkel von A. A und B stehen also in dem Verhältnis zueinander, daß *jeder zugleich der Onkel und der Neffe des anderen ist.* [2])

Daß k und t, Mutter und Tochter, durch ihre ehelichen Verbindungen mit S bzw. F in ein solches Verhältnis zueinander kommen, daß t die Schwiegermutter (Stiefschwiegermutter) ihrer leiblichen Mutter k, diese also umgekehrt die Stiefschwiegertochter ihrer Tochter t wird, wurde bereits oben mit den Worten des Märchens resp. mit den Versen von der Leyens gesagt. — Merkwürdig ist ferner das Verwandtschaftsverhältnis zwischen dem Thronerben S und der jungen Fürstin t: Als Fürstin, als Gemahlin von F, ist t die Stiefmutter von S, dieser also ihr Stiefsohn; andererseits ist S aber als Gatte von k der Stiefvater von t, so daß S also zugleich Stiefsohn und Stiefvater von t ist Da nun weiter der Stiefvater von t zugleich der Stiefgroßvater von deren Söhnen und Stiefsöhnen ist, so ist S, da er selbst zu diesen Stiefsöhnen gehört, sozusagen *sein eigener Stiefgroßvater* und ebenso natürlich auch *sein eigener Stiefenkel.* Ebenso ist t als Stieftochter und Stiefmutter von S ihre eigene Stiefgroßmutter und ebenso ihre eigene Stiefenkelin. Da t mit F, dem leiblichen

1) Obwohl die Antwort hierauf, wenn auch in anderem Zusammenhange, in der Hauptsache bereits in dem oben schon zitierten Abschnitt von Bd I (S 158—161) gegeben ist, wird manchem Leser doch eine nochmalige, speziell auf den gegenwärtigen Fall zugeschnittene Besprechung dieser verwandtschaftlichen Beziehungen nicht unerwünscht sein.

2) Vgl. Bd. I, S. 158

Großvater ihres Halbbruders B, verheiratet ist, so ist sie die Stiefgroßmutter ihres Halbbruders B, und entsprechend ist S der Stiefgroßvater seines Halbbruders A.

Wir hatten hier den Fall, daß Vater und Sohn Mutter und Tochter heiraten: der Vater die Tochter, der Sohn die Mutter. Ganz ähnliche paradoxe verwandtschaftliche Beziehungen, wie wir sie in diesem Falle erhielten, ergeben sich nun, wenn **zwei Männer** C und D, die miteinander in keinerlei verwandtschaftlichen Beziehungen bisher standen, **jeder die Mutter des anderen heimführen.**[1] Die alsdann bestehenden Beziehungen veranschaulichen wir durch folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccc} A \sim a & \qquad & B \sim b \\ | & & | \\ C \sim b & & D \sim a \\ | & & | \\ E & & F \end{array}$$

Dabei soll angenommen werden, daß A, der Vater des C, und ebenso B, der Vater des D, tot sind, und ferner, daß, wie unser Schema bereits angibt, aus jeder der beiden Ehen, die C und D mit der Mutter des anderen schließen, ein Sohn — E bzw. F — hervorgegangen ist. C ist nun als Ehemann von b der Stiefvater von D und D wiederum als Ehemann von a der Stiefvater von C; das Verhältnis zwischen C und D ist also ein solches, daß jeder der Stiefvater und zugleich der Stiefsohn des anderen ist; dann ist aber jeder von beiden, ähnlich wie im vorigen Falle, sozusagen sein eigener Stiefgroßvater und ebenso natürlich sein eigener Stiefenkel. Gleichfalls entsprechend den Verhältnissen des früheren Falles, sind E und F zugleich *Onkel und Neffe voneinander* (E ist Halbbruder von D und somit Onkel von F, und F ist Halbbruder von C und somit Onkel von E)[2] — Völlig analoge Verhältnisse haben wir, wenn von zwei Frauen, die bis-

---

1) Vgl. Bd. I, S. 160 (Fall a).

2) Ein Rätsel aus dem Ende des 15 Jahrhunderts (s. M[one], „Räthselsammlung", Anzeiger für Kunde der teutschen Vorzeit, herausg. von Franz Joseph Mone, 7. Jahrg., 1838, col 259, Nr. 172) kleidet

her in keinerlei verwandtschaftlichen Beziehungen zueinander standen, jede den Vater der anderen heiratet.[1])

Es sei gestattet, noch eine Anzahl Rätselfragen bzw. Aufgaben, bei denen es sich um Verwandtschaftsverhältnisse und -beziehungen handelt und die wir aus verschiedenen Quellen schöpfen, hier anzureihen. Zunächst eine sehr einfache Frage:

I. Zwei Väter und zwei Söhne essen zusammen drei Äpfel; jeder bekommt einen ganzen Apfel. Wie ist das möglich?

Wenn jeder einen ganzen Apfel erhält, so können es insge-

---

unseren Fall so ein, daß es zwei Frauen („Berta und Else") so sprechen läßt:

Dise kint sint unser kint,
unser man ir brüder sint,
nun kumt es als von rechter e,
nu raut, wie es um die kint ste.

„Berta und Else" sind in unserer Bezeichnung b und a; ihre Kinder sind E und F, die Brüder (Halbbrüder) ihrer Männer D und C. — In dem Werke: W.W. Rouse Ball, „Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes", zweite franzos. Ausg. von J. Fitz-Patrick, t. III (Paris 1909), p 204, finde ich — ohne Quellenangabe — einen ganz verwandten und jedenfalls auf denselben Fall gemünzten Vers, doch ist die zweite Zeile, die dort lautet: „Ihre vater unsere bruder sind" jedenfalls zu verbessern in: „Ihre väter ihre brüder sind". — In der bereits oben (S. 300, Anm. 2) zitierten volkskundlichen „Biblioteca" von Pitrè (vol. XX, p. 295, Nr. 934) ist unser Fall angegeben mit der Maßgabe, daß nur eine der beiden Frauen (b und a) aus der neuen Ehe einen Sohn erhält. Diesen Knaben trägt die andere Frau nun eines Tages auf dem Arm und gibt auf die Frage einer Nachbarin die folgende Auskunft über das Kind „Es ist der Sohn meines Sohnes und der Enkel meines Gatten" Ist E dieser Knabe, so darf die Frau a von ihm allerdings sagen, das Kind sei der Sohn ihres Sohnes C und der Enkel ihres (verstorbenen) Gatten A Sie hätte auch sagen konnen. „Der Bruder (Halbbruder) meines Gatten", namlich des gegenwärtigen Gatten (D), und in der Tat kommt nach den Angaben, die sich a a. O. finden, auch diese Fassung vor, und zwar ist sie offenbar die bessere, da die erste Antwort die Besonderheiten unseres Falles gar nicht zum Ausdruck bringt, vielmehr jede Großmutter — und a ist ja Großmutter von E — so sprechen könnte. — Es mag hier übrigens noch, wenn auch ohne näheres Eingehen, auf die bei Pitrè vorhergehende Nr. 933 (p 294/95) verwiesen werden

1) Vgl. Bd. I, S. 160 (Fall b)

samt nur 3 Personen sein; der eine der „Väter" muß also zugleich einer der „Söhne" sein, d. h. die 3 Personen sind: *Großvater, Vater und Sohn.*[1])

II. In einer Reichenauer Handschrift zu Karlsruhe stehen am Ende einer Sammlung arithmetischer Aufgaben für den Jugendunterricht eine Anzahl Rätsel aus dem Anfange des 10. Jahrhunderts, darunter das folgende[2]):

Equitavit homo cum femina, mater ejus matris meae socrus fuit.

Auf deutsch: **Es ritt ein Mann mit einer Frau; seine Mutter war die Schwiegermutter meiner Mutter.**

Die Schwiegermutter meiner Mutter ist die Mutter meines Vaters; der Mann ist also *„mein Vater"*.

III. Der schottische Mathematiker Alexander Macfarlane hat, nach Analogie der sogenannten „Algebra der Logik", eine Art Verwandtschafts-Kalkül („Algebra of Relationship") entwickelt und hierüber eine Reihe von Aufsätzen, insbesondere in den Proceedings der Royal Society of Edinburgh (10, 1878—1880; 11, 1882) veröffentlicht.[3]) In einem kleinen Artikel nun stellt Macfarlane drei Rätselfragen dieses Gebietes und löst sie mit den Methoden seines Kalküls[4]), jedoch gestalten sich diese Lösungen teilweise so umständlich, daß sie weit eher gegen als für den Wert dieses Verwandtschafts-Kalküls sprechen, und, wenn auch dessen Leistungsfähigkeit gewiß nicht nach wenigen Proben beurteilt werden soll und darf, so vermag ich doch nicht zu glau-

1) Ein Justizrat sagte einmal zu dem Verfasser dieses Buches: „Ich habe drei Söhne, zwei sind Theologen, einer Jurist und einer Landwirt." — Einer der beiden theologischen Söhne studierte nach der theologischen Ausbildung noch die Rechte. Dabei braucht nicht gesagt zu werden, daß diese Frage, als Rätselfrage angesehen, nicht eindeutig wäre, vielmehr, von unwesentlichen Unterschieden abgesehen, noch zwei weitere Lösungen besitzen würde.

2) Siehe die S. 306, Anm. 2 zitierte „Rathselsammlung" Mones, l. c. col. 40, Nr. 46.

3) Weitere Publikationen von Macfarlane über diesen Gegenstand s. nach dem literar. Index; s. a. Bd. I, S. 158, Anm. 3.

4) Siehe Educational Times Reprints, vol. 35, 1881, p. 110—111.

ben, daß er in der ganz überwiegenden Zahl der Fälle mehr oder auch nur ebensoviel zu leisten vermöge wie reine Verstandesschlüsse und die jedem von selbst sich darbietenden einfachen schematischen Veranschaulichungen, wie sie hier angewandt werden. Diese drei Rätselfragen Macfarlanes sind jedenfalls ohne alle „Algebra of Relationship", ohne alle wirkliche oder Pseudo-Mathematik, sehr leicht zu lösen, wie wir sogleich sehen werden; sie lauten (in absichtlich veränderter Reihenfolge) so:

1. Wenn Dick's Vater Tom's Sohn ist, in welcher Beziehung steht Dick dann zu Tom[1])?

Bezeichnet man den Vater von Dick mit *A*, so ergibt sich sofort folgendes Schema:

$$\begin{array}{c} \text{Tom} \\ | \\ \text{A} \\ | \\ \text{Dick} \end{array}$$

Dick ist der Enkel von Tom.

2. Schwestern und Brüder habe ich nicht, aber dieses Mannes Vater ist meines Vaters Sohn.

Wenn ich keine Brüder habe, so ist „meines Vaters Sohn" niemand als ich selbst In vereinfachter Fassung lautet der Satz also: „Dieses Mannes Vater bin ich." *Der „Mann" ist also mein Sohn.*

3. Eine Dame, die nach einer Photographie in ihrem Album gefragt wurde, gab folgende Antwort: **Ich habe, wie Sie wissen, keine Töchter; dieser Person Tochtersohn war der Vater meines Enkels.**

Die Dame hat keine Töchter; da sie aber einen Enkel hat, so muß sie wenigstens einen Sohn haben. „Der Vater meines Enkels" ist also dieser Sohn. In vereinfachter Fassung lautet mithin die Frage: „Der Tochtersohn dieser Person war mein Sohn." Die „Person" auf der Photographie ist also, wenn sie männlich war, *der Vater*, und, wenn sie weiblich war, *die Mutter* der Dame.

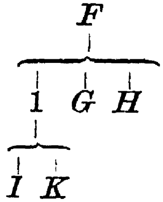
1) „Dick" und „Tom" bekanntlich Abkürzungen, = Richard bzw Thomas (Tommy).

IV. Auch der französische Mathematiker G. Brunel hat sich mit dem Verwandtschafts-Kalkül beschäftigt und in einem Vortrage, den er hierüber vor der Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux hielt[1]), zum Schluß als Beispiele für Anwendungen verschiedene Aufgaben angegeben, von denen hier eine größere Zahl, und zwar wieder ohne Anwendung eines besonderen Kalküls, besprochen werden mag. Dabei mag I stets die sprechende Person — „Ich" — sein; große lateinische Buchstaben sollen wieder männliche, kleine weibliche Personen bezeichnen, während in den Fällen, wo sowohl eine männliche wie eine weibliche Person den betreffenden Platz ausfüllen könnte, eine Zahl gesetzt werden mag. Von einem Ehepaar ist nur der eine Teil angegeben, wenn dies als ausreichend angesehen werden darf. Hiernach besagt beispielsweise das auf der nächsten Seite unter Nr. 3 stehende Schema folgendes: Von einem Vater G stammen, sei es von derselben, sei es von verschiedenen Müttern, die Geschwister 1 (Mann oder Frau) und H (Mann) ab; Kinder von 1 wiederum sind: I (= Ich), 2 und h, welch' letztere mit H verheiratet ist; 2 hat einen Sohn K.

Brunel beginnt mit einem ziemlich trivialen Satze, der keinerlei besondere Verwandtschaftsverhältnisse voraussetzt, nämlich dem folgenden:

1. **Der Bruder meines Onkels ist der Onkel meines Bruders.**

„Mein Onkel" (s. das nachfolgende Schema), Bruder meines Vaters oder meiner Mutter (1), ist G; dessen Bruder und gleich-



falls mein Onkel ist H; dieser ist zugleich der Onkel meines Bruders K.

1) Am 9. März 1893; ein Referat s. in den „Mém de la société des sciences physiques et naturelles ‚de Bordeaux", (4) IV, 1894, Extraits des procès-verbaux des séances, p. XXV/XXVI.

Gleichfalls nur eine Verklausulierung der einfachsten und normalsten Verhältnisse haben wir in der Frage

2. Mein Neffe hat einen Onkel, welcher der Enkel meines Großvaters ist.

Der „Onkel meines Neffen“ bin *ich* und zugleich der „Enkel meines Großvaters“. Es kann aber auch ebensogut *einer meiner Brüder* sein, nur natürlich in dem Falle, daß der „Neffe“ ein Brudersohn ist, nicht derjenige Bruder, der der Vater des „Neffen“ ist. Dagegen werden offenbar besondere Verwandtschaftsverhältnisse erfordert, wenn diese Frage 2 dahin abgeändert wird, daß man „Enkel“ durch „Sohn“ ersetzt. Demgemäß lautet Frage

3. Mein Neffe hat einen Onkel, welcher der Sohn meines Großvaters ist.

„Mein Neffe“ (K) hat einen Onkel: H, den Mann seiner Tante h, und dieser Onkel H ist „der Sohn meines Großvaters“

G

1 H

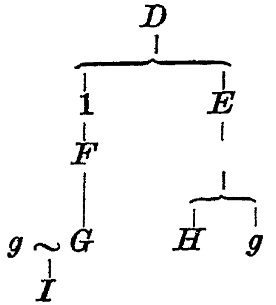
I 2 $h \sim H$

K

G. *H hat,* wie unser Schema ja ausdrückt, *seine Nichte h geheiratet.* — Der Leser wolle selbst prüfen, welche etwaigen weiteren Lösungen das Problem besitzt. Auch bei den folgenden Aufgaben werden wir uns, wie hier, im wesentlichen mit einer Lösung begnügen.

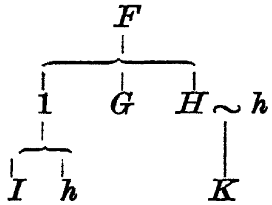
4. Der Onkel meines Großvaters war der Großvater meines Onkels.

„Mein Großvater“ ist F (s. das umstehende Schema), dessen Onkel ist E, und dieser wieder ist der Großvater von H, der mein Onkel ist als Bruder meiner Mutter g. *In dem Ehebunde $G \sim g$ sind Vetter und Kusine zweiten Grades vereinigt* — Übrigens ist es zulässig, in unserem Schema und dementsprechend in unserer Lösung G und g zu vertauschen.



5. Einer meiner Onkel hat zum Neffen einen meiner Neffen.

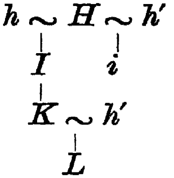
Einer meiner Onkel: G, hat einen Neffen (K), der als Sohn meiner Schwester h auch mein Neffe ist. *H hat seine*



Nichte h geheiratet. — Es wäre übrigens angängig, H und h zu vertauschen (dann wären Tante und Neffe miteinander verheiratet).

6. Mein Enkel ist der Bruder der Tochter meines Vaters.

Meine Eltern sind H und h; mein Sohn K. Nach dem Tode meiner Mutter h geht mein Vater H, bereits Großvater eines



erwachsenen Enkels K, eine zweite Ehe, mit dem jugendlichen Fräulein h', ein. Aus dieser Ehe geht eine Tochter: i, meine Halbschwester also, hervor. Die Ehe $H \sim h'$ wird bald geschieden, und die geschiedene Frau h' heiratet den Enkel K ihres ersten Mannes[1]); aus dieser Ehe geht L hervor. Alsdann

1) Diese Ehe dürfte freilich nach dem heute herrschenden deutschen Recht nicht geschlossen werden (B. G B. § 1310, Abs. 2), doch

gilt folgendes: „Mein Enkel“ (L) ist der Bruder (Halbbruder) von i, weil beide Kinder von h' sind, ist also „der Bruder der Tochter meines Vaters“.

7. Ich habe nur eine Enkelin, meine Nichte.

„Meine Enkelin“, Tochter meiner Tochter k, ist l. Diese ist, da mein Bruder K meine Tochter k, also seine Nichte, geheiratet

$$\begin{array}{cccc}
 & & \multicolumn{2}{c}{H} \\
 & & I & K \\
K & \sim k & & \\
l & & &
\end{array}$$

hat, zugleich — als Tochter meines Bruders — meine Nichte. — Es wäre übrigens zulässig, K und k überall zu vertauschen (dann wären Tante und Neffe miteinander verheiratet).

8. Kann mein Onkel väterlicherseits der Onkel mütterlicherseits für meinen Bruder sein?

Wir haben es hier mit ähnlichen ehelichen Verhältnissen, wie in dem eingangs dieses Kapitels besprochenen Falle Sue-Legouvé, zu tun: Man stelle sich etwa vor, daß die Ehe $E \sim e$, aus der G hervorgegangen ist, geschieden und jeder der beiden

$$\begin{array}{ccccccc}
 & E' & \sim & e & \sim & E & \sim e' \\
f \sim & F & \sim & f' & G & & f \\
H & & I & & & &
\end{array}$$

geschiedenen Ehegatten (e und E) eine neue Ehe eingegangen ist; diesen neuen Ehen $E' \sim e$ und $E \sim e'$ mögen F bzw. f entsprossen sein. Die Kinder dieser neuen Ehen, Herr F also und Fräulein f, sind, wie in unserem früheren Beispiele Eugène Sue und Ernest Legouvé, gar nicht verwandt miteinander, dürfen sich also heiraten; ein Sproß ihrer Ehe sei H. Nach dem

---

war eine solche Eheschließung nach früherem Recht wohl überall erlaubt und ist, was ich nicht näher geprüft habe, vermutlich auch heute noch im Ausland vielfach, wenn nicht gar fast überall, zulässig.

Tode von f schließt F nun eine neue Ehe: mit f', und aus dieser Ehe geht I hervor. Alsdann besteht folgendes: H ist „mein Bruder“ (Halbbruder), weil wir beide Söhne von F sind. G ist der Halbbruder meines Vaters F (beide sind Söhne von e), also „mein Onkel väterlicherseits“; zugleich ist aber G der Halbbruder von f (beide sind Kinder von E), also „der Onkel mütterlicherseits“ meines Bruders H, freilich zugleich auch — als Halbbruder von F — dessen Onkel väterlicherseits.

V. Nach einem alten Buche[1]) steht oder stand auf einem Grabstein zu Alicourt (?) bei Paris:

Ci gît le Fils, ci gît la Mére
Ci gît la Fille, avec le Pére,
Ci gît la Soeur, ci gît le Frére,
Ci gît la Femme, et le Mari
Et n'y a que 3 Corps ici.

Wenn es im ganzen nur drei Personen sein sollen, so sind dies, da beide Geschlechter vertreten sind, entweder 1 männliche und 2 weibliche oder aber 2 männliche und 1 weibliche Person. Hiernach findet man folgende zwei Lösungen:

a) *Mutter nebst Sohn und Tochter,*
b) *Vater nebst Tochter und Sohn,*

jedoch mit der Besonderheit, daß im ersteren Falle Mutter und Sohn, im anderen Vater und Tochter miteinander verheiratet sind.[2]) „Sohn“ und „Tochter“ im ersteren Falle sind alsdann nicht nur, als Kinder derselben Mutter, Bruder und Schwester, sondern auch Vater (Stiefvater) und Tochter. Im anderen Falle ist es entsprechend.

---

1) P. L. Berkenmeyer, „Le curieux antiquaire, ou recueil geographique et historique“ (Leyden 1729), t. I, p 73.

2) Davon, daß solche Verbindungen in allen modernen Kulturländern verboten sind, ist hier natürlich abzusehen

Nachträge und Berichtigungen zu Bd. I.

Zu Kap. I, § 1 („Wolf, Ziege, Kohlkopf").

Eine Veröffentlichung von Johannes Bolte[1]), die zum Teil auf den Kollektaneen Reinhold Köhlers beruht und zu der auch von dritter Seite ein Paar Beiträge beigesteuert sind, bietet über die Aufgabe von „Wolf, Ziege, Kohlkopf" eine Fülle von Material, das recht interessant, insbesondere in volkskundlicher Beziehung, ist. Dieser Arbeit in erster Linie verdanke ich die Bekanntschaft mit zahlreichen unsere Aufgabe betreffenden und mir früher unbekannten Literaturstellen und sehe mich so zu folgenden nachträglichen Bemerkungen veranlaßt:

Zu den S. 1/2, Anm. 2, von mir aufgeführten ältesten Vorkommnissen ist zunächst noch nachzutragen eine Handschrift des 12. Jahrhunderts.[2]) Sie gibt unsere „Lösung II" (S. 2) der Aufgabe, und zwar in der Form des folgenden Hexameter-Merkverses:

It capra. fertur olus redit hec lupus it. capra transit[3])

---

1) Joh. Bolte, „Der Mann mit der Ziege, dem Wolf und dem Kohle", Zeitschr. des Vereins für Volkskunde, 13. Jahrg., 1903 (Berlin), p. 95—96; ein Nachtrag dazu ebendort p. 311

2) Es ist Cod 111 des steirischen Augustinerstiftes Vorau (an der ungarischen Grenze unweit Hartberg). Aus dieser Handschrift, „einer reichen Fundgrube lateinischer Gedichte aus dem 12. Jahrh.", teilte W Wattenbach („Bericht über eine Reise durch Steiermark im August 1876", Neues Arch. der Gesellsch für ältere deutsche Geschichtskunde, 2. Bd., 1877, p 401/402) u. a. den obigen Merkvers mit, ohne freilich die „Fabel", auf die „angespielt wird", zu kennen Die richtige Auslegung gab in Bd. 3 (1878, p. 223) derselben Zeitschrift Superintendent Dr G D. Teutsch aus Hermannstadt (Siebenbürgen)

3) Mit im wesentlichen demselben Merkvers findet sich unsere Aufgabe übrigens auch in dem Münchener latein Pergamentcodex 14 684 (fol 32v) aus dem 14 Jahrhundert; s M Curtze, „Arithmetische Scherzaufgaben aus dem 14 Jahrhundert", Bibl. math. N. F. 9, 1895, p. 83, Nr. XXVII (in dem Merkvers ist wohl „haec" für „hoc" zu emendieren). Dazu sei sogleich bemerkt, daß diese Handschrift (fol. 32/32v) auch die Aufgabe der drei Ehepaare (bei mir § 2 des Kap I) enthält (s Curtze, p. 82/83, Nr. XXVI), und zwar mit der Einkleidung „Tres hystriones cum tribus uxoribus transituri erant amnem cum cimba, que non valuit, nisi duos homines transferre. Unde talem fecerunt inter se constitucionem, quod si aliqua parte portus sine proprio marito uxor inveniretur, licitum fiat viris astantibus eam subagere Questio igitur est, qualiter isti transituri sunt aquam bini et bini, ne aliquis cum amica alterius incestum

Da die „Propositiones" (Alcuin?) die Lösung in unserer Form „I" geben, so dürfte diese Handschrift des 12. Jahrhunderts das älteste, z. Z. bekannte Vorkommnis für die Lösung II darstellen, die freilich nicht minder leicht als I zu finden ist — Sodann findet sich in einer dem 14. Jahrhundert entstammenden Rätselsammlung[1]) die „Lösung I" unserer Aufgabe und zwar in Form des Distichons:

O natat, L sequitur, redit O, C navigat ultra,
nauta recurrit ad O, bisque natavit ovis.

Dabei bedeutet O, wie schon das letzte Wort des Pentameters und zudem eine in der Handschrift folgende Erläuterung[2]) angibt, „ovis", während L = lupus, C = caulis ist.

Eine Reihe von Schriften der folkloristischen Literatur erwähnen unsere Rätselfrage, da diese auch volkstümliche Verbreitung gefunden hat. Für die verschiedensten Volksstämme, wie die Friesen[3]), die Dänen[4]), die Siebenbürger Sachsen[5]), liegen in dieser Hinsicht Zeugnisse vor[6]). Auch in den romanischen Ländern scheint das Rätsel seit langem ver-

faciat." Hierauf folgt die richtige Lösung und zum Schluß noch der bei mir (S. 7) nach den „Annales Stadenses" gegebene Merkvers. — Wie Curtze ibid. p. 85 angibt, findet sich diese Sammlung von Scherzaufgaben der Münchner Handschrift auch im Codex Amplonianus (Erfurt) Qu 345, fol. 16/16v, der aus der ersten Hälfte des 14. Jahrhunderts stammt.

1) Diese Rätselsammlung findet sich unter vielerlei Gegenständen in der Reimser Handschrift Nr. 743 und wurde veröffentlicht von Franz Joseph Mone; s. M[one], „Räthselsammlung" in Mone's Anzeiger für Kunde der teutschen Vorzeit, 7. Jahrg, 1838 (Karlsruhe), col. 45 (Nr. 105).

2) Diese lautet: „ovis · lupus · ovis · caulis · ovis. de transitu lupi et ovis et caulis"

3) Siehe Waling Dykstra en T. G van der Meulen, „In doaze fol alde Snypsnaren" (Frjentsjer 1882), p 110 (unsere „Lösung I", dabei, wie in dem obigen latein. Merkvers der Rätselsammlung des 14 Jahrh . „Schaf" statt „Ziege").

4) Siehe das hier schon mehrfach, z. B. S. 188, zitierte Werk von Jens Kamp (1877), p. 326/7, Nr. 18: Fuchs (oder Wolf), Lamm und Weißkohlkopf.

5) G. D. Teutsch in der oben (vorige Seite, Anm 2) zitierten Notiz sagt, daß die Geschichte in den Siebenbürger Bauerngemeinden seit Geschlechtern heimisch ist

6) Auch Karl Simrock gibt in seinem „Deutschen Räthselbuch" (Frankfurt a M., o J.; die „Nachrede" ist von „August 1850"), 2. Sammlung, p. 36, Nr 234, die Rätselfrage (Wolf, Ziege und Kohlkopf), allerdings ohne Lösung, an — Hinsichtlich der Wahl der beiden Tiere und auch des dritten Gegenstandes kommen begreiflicherweise Varianten vor, wie uns soeben schon Schaf statt Ziege und Fuchs statt Wolf begegnete; in einem englischen Werke — Thomas Dilworth, „School-master's Assistant" (London 1744 oder 1745) — soll unsere Aufgabe sich finden in der Form: A fox, a goose and a peck of corn Ich habe das genannte Werk freilich nicht einsehen können und weiß auch nicht mehr zu sagen, wo ich diese Notiz gefunden habe

breitet zu sein [1]), und man hat sogar eine sprichwörtliche Wendung, die sowohl dem Französischen wie dem Italienischen eigen ist, auf unser Rätsel zurückführen wollen: *Ménager* resp. *sauver la chèvre et le chou* sagt man im Französischen in dem Sinne: zwischen zwei Parteien von widerstreitenden Interessen so geschickt lavieren, daß man es mit keiner verdirbt.[2]) Die entsprechende, in gleicher Bedeutung gebrauchte italienische Wendung ist *salvar capra e cavoli* [3]), die im sizilianischen Dialekt, mit Metathesis des zweiten Wortes, in der Form *sarvari crapa e cavuli* [4]) gebraucht wird. Eine zwingende Notwendigkeit dafür, den Ursprung dieser Redewendungen in unserer Rätselfrage zu erblicken, wie die meisten der zitierten Autoren wollen [5]), vermag ich freilich keineswegs zu erkennen, es sei denn, daß positive sprachgeschichtliche Gründe für diese Erklärung

---

1) Siehe z B. Carlo Casalicchio, „L'utile col dolce, overo quattro centurie di Argutissimi Detti, e Fatti di Savissimi Huomini" (Ven. 1723), cent. 2, dec. 9, arg. 3, p. 329; s. a. eine deutsche Ausgabe dieses Werkes („Utile cum dulci"), 2. T. (Augsburg 1706), p. 222 („Die 83. Sinnreiche History").

2) „Ménager ou sauver la chèvre et le chou, c'est-à-dire se comporter entre deux personnes qui sont divisées d'intérêts ou de passions, de manière à n'indisposer aucune d'elles", heißt es bei É. Littré, „Dictionnaire de la langue française", t. I (Paris 1863), p. 599. Ähnlich das „Dictionnaire de l'académie française", 7e éd, t. I (1878), p. 304; 6e éd., t I, p. 311.

3) Siehe Pico Luri di Vassano, „Modi di dire proverbiali e motti popolari italiani spiegati e commentati" (Roma 1875), p 324—325; Vittorio Imbriani, „La novellaja fiorentina Fiabe e novelline, stenografate in Firenze dal dettato popolare" (2 verm. Ausg., Livorno 1877), p. 240 und Note 2, p 251

4) Siehe Giuseppe Pitrè, „Fiabe, Novelle e Racconti", vol IV = Biblioteca delle tradizioni popolari siciliane per cura di Giuseppe Pitrè, vol VII (Palermo 1875), p 138, num 260 und p. 448, s a „crapa" im „Glossario" p. 319, und von demselben· „Proverbi siciliani raccolti e confrontati con quelli degli altri dialetti d'Italia", vol. IV = „Biblioteca" .., vol. XI (Palermo 1880), p 361; s a vol III der „Proverbi" = vol X der „Biblioteca"..., p. 288; sowie abermals von demselben „Indovinelli, Dubbi, Scioglilingua del popolo siciliano = „Biblioteca" . , vol. XX (Torino-Palermo 1897), p 292/3, Nr 929; siehe auch Arrigo Balladoro, „Indovinelli-Aneddoti veronesi", Archivio per lo studio delle tradizioni popolari, vol XVIII (1899), p 370, Nr. IX und von demselben „Folk-lore veronese" „Novelline" (Verona & Padova 1900), p 14 15, Nr XIII

5) Freilich, die oben (Anm 2) zitierten großen französischen Wörterbucher. das der Akademie und Littré, der lediglich die hier wiedergegebene Erklarung gibt, erwahnen unsere Ratselfrage hierbei mit keinem Worte. Dagegen fuhrt das „Dictionnaire d'anecdotes, de traits singuliers et caractéristiques, historiettes, bons mots, naivetés, saillies, reparties ingénieuses .", Seconde partie (Amsterdam 1767), p 239/240 oder Ausg Paris 1767 (beide Teile in einem Bande), p 545 resp Nouvelle edition, t. II (Paris 1768), p 238—239 „Question", die sprichwortliche Wendung auf unsere Rätselfrage zuruck; ebenso die sämtlichen in den vorstehenden Anm 3 und 4 zitierten italienischen Autoren. Auch Bolte scheint diese Erklärung zu billigen

beigebracht werden können, was aber wohl nicht der Fall ist und wofür die hier zitierten Schriften jedenfalls nichts ergeben Schon von vornherein muß diese Zurückführung auf das Rätsel, dessen volkstümliche Verbreitung vermutlich doch überschätzt wird, etwas gesucht erscheinen und jedenfalls vermag, wie mir scheint, der an sich, ganz unabhängig von dem Rätsel, bestehende Antagonismus zwischen „chèvre“ und „chou“ eine weit natürlichere und auch bessere Erklärung [1]) für die Entstehung jener Wendung zu geben. Mit ebensoviel oder gar noch mehr Recht konnte man wohl auch noch andere sprichwörtliche Wendungen, z. B eine, in der Ziege und Wolf kombiniert sind: „La chèvre a pris le loup“ [2]), auf unser Rätsel zurückführen wollen

Zu Kap. II (Überspringungsaufgaben).

Das Problem kommt — in der S. 14 angegebenen Form — bereits in der älteren japanischen Literatur vor, zuerst anscheinend, wie T. Hayashi in Bibl. mathem. (3) VI, 1905, p 323 angibt, in einem Werke von Genjun Nakane (resp. Hōjiku Nakane) von 1743, das betitelt ist „Kanja-otogi-soschi“, zu deutsch: „Buch amüsanter Probleme zur Unterhaltung von Denkern“. Weitere, den Jahren 1844 und 1879 angehörende Beispiele für das Vorkommen des Problems in der japanischen Literatur gibt Hayashi ebendort.

Auch in den skandinavischen und möglicherweise auch anderen europäischen Ländern scheinen Aufgaben dieses Komplexes, zum mindesten die S. 15, § 2 angegebene Aufgabe, schon seit Jahrzehnten volkstümliche Verbreitung zu besitzen. Ich schließe dies insbesondere aus dem hier schon mehrfach zitierten folkloristischen Werke von Jens Kamp (1877;

---

1) Der Kohl ist durch die Ziege bedroht, aber auch umgekehrt ist deren Leben gefährdet, wenn ihr Besitzer ihr den Kohl, d h. alle Nahrung, vorenthält Wenn jemand also beide, Ziege und Futter, erhalten möchte oder erhalten soll, so befindet er sich in einer sehr schwierigen Lage, und diese Vorstellung, die mit unsrer Rätselfrage ganz und gar nichts zu tun hat, scheint mir eine vollig ausreichende Erklärung für die sprichwörtliche Redensart zu sein. Jedenfalls besteht zwischen dieser Vorstellung und der geflügelten Sprachwendung ein vollkommener Parallelismus, während in dem Sachverhalt der Rätselfrage nur die Ziege den Kohl gefährdet, ohne daß eine Reziprozität zwischen beiden in dieser Beziehung bestände. Wenn man nun auch gewiß derartige Sprachfragen nicht einseitig nach logischen Gesichtspunkten beurteilen darf, da eben die lebendige Sprache bekanntlich sehr oft alle Logik außer Acht läßt, so vermag ich doch nicht einzusehen, warum man genötigt sein sollte, eine logische Erklärung zugunsten einer unlogischen zu verwerfen, wenn erstere zugleich die einfachere und natürlichere ist.

2) „La chèvre a pris le loup, se dit de ceux qui, pensant prendre ou tromper des gens plus faibles ou plus simples qu'eux, demeurent pris eux-mêmes“ (Littré, l. c).

Titel s. hier S. 188), in dem p. 325 (Nr. 12) die gedachte Aufgabe als in Dänemark allgemein bekannt aufgeführt ist. Die dort gegebene Lösung hat übrigens, abgesehen von der Vertauschung der beiden letzten, unter sich vertauschbaren Operationen, genau dieselbe Form wie die unsere (Bd I, S 15, § 2).

Die Überschrift, die wir dem Kapitel in Bd. I gaben: „Ein Problem Taits“, ist daher im Grunde wenig angebracht. Denn nicht nur rührt das eigentliche Problem, wie schon dort gesagt war, nicht von Tait her, sondern, wie diese Nachträge zeigen, ist Tait auch nicht einmal der erste Autor, der diese Aufgaben behandelt bzw. erwähnt, vielmehr hat er im Morgen- wie im Abendlande Vorläufer. Lediglich die S. 14/15 gegebene Spielvariante stammt von Tait.

Zu S. 17 nebst Anm. 2: Die von Ed. Lucas benutzten und andere damit zusammenhängende Untersuchungen von F. J. van den Berg finden sich anscheinend in dessen, mir freilich nicht zugänglicher Abhandlung, die hier im liter. Index als Nr 441 aufgeführt ist; s. eventuell das Referat im Jahrbuch üb. d. Fortsch. der Mathem. 17, 1885, p. 121.

Zu Kap. III, § 1 („Verschiedene Zahlensysteme“) und § 2 („Das dyadische oder binäre System“).

Zu S. 25: Nach Friedrich von Hellwald („Ethnographische Rösselsprünge Kultur- und volksgeschichtliche Bilder und Skizzen“, Lpz 1891, p. 64) haben die Senegalneger ein Fünfersystem, eine Angabe, deren Richtigkeit näher zu prüfen ich freilich nicht versucht habe.

Zu interessanten Aufschlüssen über die Entstehung des Zählens und der Zahlwörter bei den Naturvölkern gelangte K. von den Steinen durch seine Erforschung der Bakaïrí und anderer Stämme Zentral-Brasiliens (s. Karl von den Steinen, „Unter den Naturvolkern Zentral-Brasiliens. Reiseschilderung und Ergebnisse der Zweiten Schingú-Expedition 1887—1888“, Berlin 1894, p. 405—418) Von diesen in der Gegenwart ziemlich vereinzelt dastehenden Urmenschen (Steinzeitmenschen) vermögen die Bakaïrí nur bis 6 zu zahlen, und zwar geschieht dies — schon bei 2 und ausnahmslos bereits bei 3 — unter Benutzung der Finger als Zählmaschine und nach dem Verfahren, die Gegenstände — Körner z. B. — immer paarweise zusammenzufassen, einem Verfahren, das sich denn auch in den Zahlwörtern: *tokále* = 1, *ahåge* = 2, *ahåge tokále* (zwei-eins) = 3, *ahåge ahåge* (zwei-zwei) = 4, *ahåge ahåge tokále* (zwei-zwei-eins) = 5, *ahåge ahåge ahåge* (zwei-zwei-zwei) = 6, widerspiegelt (l c. p. 408 und 406) Dennoch kann man hier natürlich nicht von einem eigentlichen Zweier-System sprechen, vielmehr würde auch dieses Zählverfahren bei weiterer Ausbildung, infolge des beständigen Abzählens an den Fingern, zweifellos zu einem Quinar- oder Dezimal-

system bzw. eventuell zu einem Vigesimalsystem geführt haben (s K. v. d. Steinen, p. 410). Andere, verwandte Stämme haben übrigens für die Zahl 5 zwar vereinzelt Namen, die nichts mit „Hand" zu tun haben, jedoch scheinen solche Bezeichnungen wie „Hand hört auf" oder „eine Hand" oder „Hand" (l. c. p. 405) unter den Indianerstämmen Zentral-Brasiliens zu überwiegen; die Tamanako des Orinoko sagen nicht nur für 5 „ganze Hand" und für 10 „beide Hände", sondern für 15 „ganzer Fuß" und für 20 „ein Mann" (p. 410).

Zu **S. 26:** Die dort, z. T. übrigens nicht in moderner Schreibweise, angegebenen vigesimalen Zahlwörter des Dänischen — halvtredsindstyve oder kurz halvtreds = dritthalbzwanzig oder 50, tredsindstyve = 60, halvfjerdsindstyve oder kurz halvfjerds = 70, firsindstyve oder kurz firs = 80, halvfemsindstyve resp halvfemtesindstyve oder kurz halvfemts resp. halvfems = 90 — stammen nach Zeuthen[1]) nicht aus der nordischen Ursprache, sondern sind wahrscheinlich erst in späterer Zeit dadurch in die Sprache eingedrungen, daß 20 im Handel oft eine bequeme Einheit — man denke an unsere Stiege, Steige — abgab; die Bruchbildung — dritthalbzwanzig — deutet in der Tat, wie Zeuthen mit Recht bemerkt, auf einen vorgeschrittenen Standpunkt hin. Mit dieser Auffassung harmoniert übrigens vortrefflich das Vorkommen von ein Paar vigesimalen Zahlwörtern, die im Englischen gelegentlich an Stelle der gewöhnlichen dezimalen Bezeichnungen gebraucht werden und die darüber, daß sie in der angegebenen Weise entstanden sind, ihrer Zusammensetzung nach keinen Zweifel lassen: man sagt bisweilen *threescore* statt sixty und *fourscore* statt eighty[2]) (score = Stiege).

In diesem Zusammenhang sei abermals auf die bereits in Bd. I (S. 26, Anm 1 und 5) zitierten Ausführungen von Paul Tannery hingewiesen, der auch für die vigesimalen Formen des Französischen, wie schon dort gesagt, eine spätere Entstehung annimmt und der oft gehorten Behauptung von dem keltischen Ursprunge[3]) dieser Ausdrücke entschieden widerspricht. Ein Faktor, den Tannery, wenn auch nicht für die Entstehung, so doch für die Verbreitung und die Einbürgerung der vigesimalen Bezeichnungen geltend macht, entspricht durchaus der soeben fur die analogen dänischen Formen genannten Entstehungsursache es sind die Münzen sol (sou) und livre (franc), indem 20 sols = 1 livre Nach alledem scheint die Hypothese, der „ungestiefelte" Mensch habe überall oder fast über-

1) H. G. Zeuthen, „Die Mathematik im Altertum und Mittelalter" = Kultur der Gegenwart, Teil III, Abt I, B, p. 3/4.

2) Nach Hellwald (l. c. p 65) werden auch Verbindungen wie threescore and ten, fourscore and thirteen usw. gebraucht.

3) Siehe z. B Cantor, „Geschichte", I (3. Aufl.), p 9, sowie die vorstehend zitierten Autoren: Zeuthen, l. c. p 3 und Hellwald, l c p 65; vgl a. N J Hatzidakis, Interméd. des mathém. 9, 1902, p 145, s. a. Berdellé ibidem, 10, 1903, p 164; vgl. a. 11, 1904, p 150/1 und 290.

all zunächst ein Vigesimalsystem geschaffen, auf recht schwachem Fundament zu ruhen. — Erwähnt sei dabei übrigens noch, daß auch das Albanische vigesimale Zahlwörterformen haben soll.[1])

Außer der in **Anm. 2, S. 26** zitierten Schrift von C. A. Laisant, in der für den Anfangsunterricht im Rechnen entschieden der Gebrauch der veralteten dezimalen Formen septante, octante, nonante an Stelle der „widersinnigen und in das ganze System nicht hineinpassenden" vigesimalen Ausdrücke gefordert wird, sei noch verwiesen auf L'Enseignement mathématique I, 1899, p. 23/24, wo derselbe Autor zur Verwirklichung seines Postulats eine ministerielle Verfügung wünscht, die den französischen Lehrern die Rückkehr zu den alten Benennungen zur unbedingten Pflicht mache. Der Minister, der diese Verfügung erlasse, werde dem Lande einen großen Dienst erweisen. „Ce qui l'empêchera peut-être à tout jamais", heißt es dann weiter, „c'est l'habitude que nous avons prise de parler si souvent des immortels principes de *quatre-vingt-neuf*; remplacer cette expression par *octante-neuf* deviendrait peut-être trop cruel pour un grand nombre de mes compatriotes." Vgl. a. R. Baron, „Sur un paradoxe de notre numération parlée", ibidem p 101—105.

Zu **S. 27/28, Anm. 4:** Außer den dort bereits zitierten zahlreichen Briefen und Schriften Leibniz' kommen für seine Beschäftigung mit der Dyadik auch einige Stellen aus seinen Briefen an Johann Bernoulli in Betracht; siehe „Virorum celeberr. G G Leibnitii et Johan Bernoullii Commercium philosophicum et mathematicum" (Lausanne und Genf 1745), t II, p. 36—37 (Brief v. 5 April 1701), p 38—39 (29 April 1701), p. 47 (16. Mai 1701), vgl. a p 140 (30. Okt 1705), sowie Bernoullis Brief v. 7. Mai 1701, p. 44—45 — Der Brief Leibniz' an den Herzog Rudolf August von Braunschweig vom 2 Jan. 1697 findet sich, außer in der zitierten Schrift von R. A Nolten, auch abgedruckt bei· Carl Günther Ludovici, „Ausführlicher Entwurff einer vollständigen Historie der Leibnitzischen Philosophie" (Lpz 1737), T I, p 132—138 (Druckfehler s. p. 413 f. und am Ende des Bandes), sowie in „Leibnitz's Deutsche Schriften", herausg. von G E. Guhrauer, Bd I (Berlin 1838), p 401—407, über einen weiteren früheren Abdruck des Briefes s. Ludovici, l c., T. I, p. 411—412 resp. Guhrauer, l c. p 394 Über diese „Erfindung" Leibnizens, als welche Ludovici die Dyadik bezeichnet[2]) und die seiner Ansicht nach (l c T. II, p 307), „ob sie wohl nicht so sehr großes Aufsehen unter den Mathematicklehrern gemacht hat, als die Differential-Rechnung: dennoch in Ansehung ihres Nutzens und ihrer Annehmlichkeit dieser bey nahe gleich zu schätzen ist", macht der genannte Autor (T II,

---

1) Siehe Hatzidakis, l. c.

2) Von einer „Erfindung" Leibniz' kann in Wirklichkeit überhaupt kaum gesprochen werden; vgl J. Tropfke, „Gesch der Elem.-Mathem.", Bd. I, 1902, p. 4, Anm. 3.

p. 307—317) und in Anlehnung an ihn Guhrauer (l. c. p. 394—400) mancherlei bibliographische und historische Angaben. Ohne auf diese näher einzugehen, sei daran nur die Bemerkung geknüpft, daß der bei Ludovici (l. c. p. 312f.) resp. Guhrauer (p. 397) genannte Mathematiker „Lagni“ der bekannte Thomas Fantet de Lagny, und seine hier in Betracht kommende Schrift, wie übrigens auch Lecat im Interméd. des mathém., t. 17, 1910, p. 180, angibt[1]), die „Arithmétique nouvelle“ (Rochefort 1703, 4°) ist. — Ich benutze diese Gelegenheit, um von der schon in Bd. I, a. a. O., erwähnten Medaille, die Leibniz zur Verherrlichung der Dyadik entwarf, nach dem Werke Ludovici's (T. I, neben p 128) hier eine verkleinerte Reproduktion zu bringen (Fig 1). Wie gleichfalls schon in Bd. I gesagt wurde, war es der Herzog Rudolf August von Braunschweig, dem Leibniz diese Medaille widmete: ihm hatte er schon mündlich von den Wundern der Dyadik gesprochen und unterhielt ihn dann bald darauf, in dem obengenannten Neujahrsglückwunschschreiben vom 2. Januar 1697 und zwar unter Überreichung dieses Medaillenentwurfs, erneut von diesem Thema. Die Bildseite des Medaillons, die in der Hauptsache nur eine Huldigung für den genannten Fürsten bedeutet und daher hier weniger Interesse bietet, hatte Leibniz freilich nur in Worten skizziert. Auf die Rückseite schrieb er den auch schon in Bd I erwähnten Hexameter-Sinnspruch: *OMNIBVS EX. NIHILO. DVCENDIS. SVFFICIT. VNVM*,

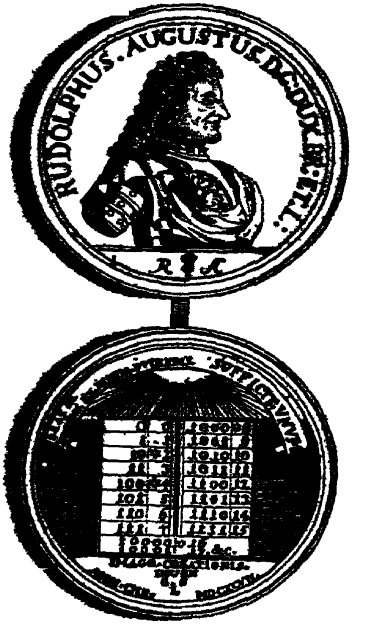


Fig 1

und zwar unter starker Hervorhebung der beiden letzten Worte: „Um Alles aus dem Nichts zu schaffen, genügt die Einheit“ Über dem *OMNIBVS* stehen zur Erläuterung die Zahlen „2. 3. 4 5 etc.“[2]) sie sind es, die sich vermöge der 1 aus der 0 herleiten lassen, und die Zahlentafel, der Hauptbestandteil der Medaillenrückseite, gibt für die Zahlen 0—17 diese dyadische Schreibweise, also diese Darstellung allein durch 0 und 1. Links von der Zahlentafel sieht man ein Additions-, rechts ein Multiplikationsexempel in dyadischer und (zur Erklärung) in dekadischer Schreibweise. Dieses Bild der Herleitung aller Zahlen ledig-

1) Ebendort — in Beantwortung von Question 3663 (t. 17, p 49) — auch eine Notiz von H Brocard zur Literatur der Dyadik

2) Nach Leibnizens Brief sollte entsprechend über dem *NIHILO* das Zeichen 0 stehen, doch weist die von uns benutzte Vorlage dieses nicht auf.

lich aus 0 und 1 hatte für Leibniz eine tiefe sinnbildliche Bedeutung, da er hierin ein Gleichnis für einen der wichtigsten Glaubenssätze der christlichen Kirche sah: für die Erschaffung der Welt aus Nichts durch Gott. Wie es der 1 möglich sei, aus der 0 alle Zahlen zu entwickeln, so, meinte er, habe die Gottheit (1) aus dem Nichts (0) das All geschaffen (vgl. dazu auch in Bd. I, S. 35 das Wort Laplaces). *IMAGO CREATIONIS* (Abbild der Schöpfung), so schrieb er daher unter die Zahlentafel, ebenso wie das oberhalb der Zahlentafel durch Strahlen angedeutete Licht Leibnizens eigener brieflichen Erklärung zufolge den Geist Gottes bedeuten sollte, der „auf dem Wasser" — dem dunklen Teil der Medaille — „schwebt." Die Medaille, die unten noch die Initialen ihres Urhebers, sowie das Jahr (1697), angibt, ist übrigens weder in Silber, wie Leibniz mit Rücksicht auf die große Bedeutung des Gegenstandes vorgeschlagen hatte, noch in anderem Metall geprägt worden; ob dies, wie Ludovici (T. II, p. 309) und nach ihm Guhrauer (p. 400) meint, nur wegen des bald darauf erfolgten Ablebens des Herzogs, der übrigens noch bis zum Jahre 1704 gelebt hat, unterblieben ist, muß hier dahingestellt bleiben. Dagegen hatte der Herzog sich einen Siegelring mit der auf die Dyadik hinweisenden Inschrift „0 & 1" anfertigen lassen und pflegte für die Briefe an Leibniz dieses Siegel zu benutzen, wie dieser in dem oben zitierten Briefe v. 29. April 1701 an Johann Bernoulli bemerkt.

Zu S. 30/31 nebst S. 399: Über die Entstehung des Sexagesimalsystems, das die Babylonier, neben dem Dezimalsystem des praktischen Lebens, für den Gebrauch in der Astronomie sich gebildet hatten, ist in neuerer Zeit eine lebhafte Kontroverse entstanden, an der sich sowohl Mathematiker wie Assyriologen beteiligt haben. Es mag genügen, hier folgende Abhandlungen von Autoren der ersten Gruppe zu nennen: G. Kewitsch, „Zweifel an der astronom. u. geometr. Grundlage des 60-Systems", Bezolds Zeitschr. für Assyriologie 18, 1904/05, p. 73—95 und „Zur Entstehung des 60-Systems", Arch. Math. Phys. (3) 18, 1911, p. 165—168, Edm. Hoppe, „Das Sexagesimalsystem und die Kreisteilung", Arch. Math. Phys. (3) 15, 1909, p. 304—313, s. a. ibid. 16, 1910, p. 277 (Kewitsch) und p. 278—279 (Hoppe), sowie ibid. 24, 1915, p. 286—287 (Kewitsch u. Hoppe); Max Simon, „Geschichte der Mathematik im Altertum" (Berlin 1909), p. 101—105; Eugen Löffler, „Die arithmetischen Kenntnisse der Babylonier und das Sexagesimalsystem", Arch. Math. Phys. (3) 17, 1911, p. 135—144; in diesen Abhandlungen, zumal in der letztgenannten, weitere Literaturangaben.

Zu S. 32, Anm. 2: In Herbert Spencers Autobiographie, Deutsche (verkürzte) Ausgabe von L. und H. Stein (Stuttgart 1905), Bd. I, p. 106, findet sich folgende Äußerung: „Schon in früheren Jahren [vor 1843/44] bedauerte ich oft den Fortschritt des Dezimalsystems, dessen allgemeine Anwendung den meisten Menschen so wünschenswert scheint. Daß dieses Zahlensystem sehr viele Vorteile hat, steht außer Frage. Es hat indessen

auch viele Nachteile, und die Einsicht verdroß mich oft, daß sich alle Vorteile des Dezimalsystems ohne Einbuße mit denen des Duodezimalsystems verbinden ließen. An Stelle der Grundzahl 10 müßte man die 12 setzen"...

Zu S. 33: Zu den Teilungen in 2, 4, 8, 16 usw. Teile sei noch auf eine Abhandlung von V. V. Bobynin, „Esquisse de l'histoire du calcul fractionnaire", Bibl. mathem. N. F. 10, 1896, p. 97, hingewiesen, in der ausgeführt wird, daß Teilungen in zwei Hälften und, durch Wiederholung dieses Verfahrens, in zwei Halb-Hälften, zwei Halb-Halb-Hälften usw. die frühesten Bruchrechnungen der Menschheit waren Russische Aktenstücke über Feldmessung aus der Zeit vor Peter dem Großen weisen, wie Bobynin angibt, als Ackermaße solche Bildungen wie Halb-Halb-Halb-Hälften, und zwar bis zu 8-, 9- und selbst 10-maliger Wiederholung des „Halb" vor „Hälfte", auf.

Zu S. 33—35: „Die Frage nach der geeignetsten Grundzahl des Zahlensystems" erörterte neuerdings L G. Du Pasquier in einem auf der Salzburger Naturforscherversammlung (1909) gehaltenen Vortrage; der Vortragende stellte 5 Postulate auf und kam unter Berücksichtigung dieser verschiedenen Momente zu dem Resultat, daß die Zahl 4 als Grundzahl am geeignetsten sei. Insbesondere ist nach den Berechnungen des Redners ein Vierersystem „etwa hundertmal leichter zu erlernen und zu beherrschen als unser Dezimalsystem." „An eine praktische Reform ist wohl nicht zu denken; denn fast überall sind Maße, Gewichte, Munzen usw. dezimal eingeteilt, und es ist zu wünschen, daß ein einziges System (auch wenn es nicht das beste ist) möglichst überall und konsequent durchgeführt werde." Siehe „Verhandl. der Gesellsch deutscher Naturf. u Ärzte", 81. Vers., Salzburg 1909, 2. Teil, 1. Hälfte (Lpz. 1910), p. 8—9; siehe a. eine ausführlichere (mir nicht bekannte) Abh. desselben Verf in der Zeitschrift L'enseignement mathématique, 12. Jahrg, 1910, p 265—293

Zu S. 37 (**Aufgabe der Weizenkörner auf dem Schachbrett**). Die Legende hat kürzlich eine eingehende historisch-bibliographische Behandlung und Untersuchung auf Grund der einschlägigen arabischen wie abendländischen Literatur erfahren durch J. Ruska („Zur Geschichte der Schachbrettaufgabe", Zeitschr. f math. u naturw. Unterr, 47. Jahrg, 1916, p. 275—282). Das Ergebnis dieser gründlichen Untersuchung ist, daß die überlieferte Fassung, wie sie sich mit geringen Varianten durch die gesamte Schulbücherliteratur hindurchzieht und wie sie auch hier in Bd I reproduziert ist, jedenfalls preisgegeben werden muß Will man die Klippen der unter sich widerspruchsvollen Angaben der älteren Quellen meiden, so wird man gut tun, die Namen des Schacherfinders und des indischen Königs ganz fortzulassen, und nach Ruska etwa so sagen: „Nach einem Bericht des Historikers Ja'qūbī (um 880) erbat sich der Erfinder des Schachspiels als Ehrengeschenk die Zahl der Weizenkörner" usw

Zu Kap. III, § 3 („Verschiedene dyadische Spiele und Aufgaben").

Zu S. 48, Anfang von Abschnitt IV („Gitterschrift"): Von dem Ansehen, das die „Steganographie" ehemals genoß, zeugt eine Stelle, die mir in einem älteren numismatischen Werke[1]) begegnet ist. Da sie zugleich eine Charakteristik von Daniel Schwenter (1585—1636) gibt, dem ersten deutschen Mathematiker, der über unser Gebiet der delektablen Mathematik ein eigenes größeres Buch verfaßte und dessen hierdurch und mehr noch durch andere mathematische Werke erworbene Verdienste übrigens um so höher zu veranschlagen sind, als die Jahre seines wissenschaftlichen und schriftstellerischen Wirkens überwiegend in eine der trübsten Perioden deutscher Geschichte fallen, so sei jene Charakteristik hier wiedergegeben: „Der allerangenehmste und liebenswürdigste Mann", so wird Schwenter beschrieben, „von dem die artigsten Anekdoten erzählet werden, die so fein und kurzweilig sind, als sein *Peter Squenz*, war ein Erfinder in der Mathematik, in der Bevestigungs- und Belagerungs-Kunst, in der ihn Generale zu Rath und Hülfe nahmen, . . . und in tausenderley Künsten, so gar wenn es für seinen Ruhm nicht zu klein ist, im Chartenspiele. Man hielt ihn auch für einen der stärksten Steganologen, woraus man damals gar viel machte, und wodurch er sich wol unter andern des gelehrten Herzog Augusts von Braunschweig-Lüneburg[2]) Freundschaft, darf ich schier sagen, erwarb. . . Er war in den orientalischen Sprachen so gelehrt[3]), daß ihn der Magistrat[4]) durch den damaligen Prokanzler der Universität zum Poeten der ebräischen, chaldäischen und syrischen Sprache ausrufen ließ" Bei Schwenters steganologischen Künsten wird es sich allerdings vorwiegend um ganz

1) Siehe „Nürnbergische Münz-Belustigungen", herausg. von Georg Andreas Will, 4. Teil (Altdorf 1767), p 71.

2) Herzog August von Braunschweig (1579—1666), Vater des soeben (S 321—323) genannten Herzogs Rudolf August, der Begründer der Wolfenbütteler Bibliothek, wurde von seinen Zeitgenossen als ein Wunder von Gelehrsamkeit angesehen. Als „Gustavus Selenus" verfaßte er ein Werk über das Schachspiel, und unter seinen sonstigen Schriften ist ein Werk über „Cryptomenytica et Cryptographia" (1624). Von diesem Werke des Herzogs über „Criptologia" und seinen Erfindungen in der Steganographie spricht auch Athanasius Kircher („Arithmologia", 1665, p. 149; dort Druckfehler „Cristologia", hinten verbessert), der selbst vom Herzog einen in Geheimschrift abgefaßten Brief erhalten hatte. Die bei diesem Brief befolgte Methode bestand darin, die Silben oder Worter in die Felder eines Quadrats einzuschreiben und zwar in einer durch Zahlen vorgeschriebenen Reihenfolge der Felder. Natürlich mußte dies Zahlenquadrat dem Briefempfänger bereits bekannt sein, um ihm beim Lesen des Briefes als Schlüssel zu dienen.

3) Vgl. a. S. 120.

4) Von Altdorf, an dessen Universität Schwenter, wie schon an der in voriger Anm zitierten Stelle gesagt ist, als Professor lehrte.

unmathematische Dinge[1]) gehandelt haben, und insbesondere die Bd. I, S. 49 ff. von uns besprochene „Gitterschrift" mit der auf der Dyadik beruhenden „Gitterformel" wird er keinesfalls gebraucht und gekannt haben.

Zu S. 52/53, Abschnitt V („Turm von Hanoï"), 1 Absatz: Anscheinend ist Édouard Lucas schon im Jahre 1883 oder früher mit dem Spiel hervorgetreten und hat es schon damals mit Erläuterungen in den Handel gebracht.[2])

Zu Abschnitt VI („Baguenaudier", Zankeisen).

Zu S. 61: Bei gelegentlichem erneutem Nachlesen der unser Spiel betreffenden Stelle in dem zitierten Werke Cardans empfand ich, daß der ihm gewidmete Satz in Bd. I keinesfalls genügt und jedenfalls geeignet ist, ganz falsche Vorstellungen zu erwecken. Wenn es auch richtig ist, daß die Ausführungen Cardans keinerlei mathematische Gesichtspunkte enthalten, wenn auch seine Abbildung nichts außer der bloßen „Spange", wie wir sagen, — dem Schiffchen („navicula"), wie es dort heißt, — aufweist[3]) und somit recht dürftig und in dieser Form wohl eigentlich überflüssig ist und wenn auch die ganze Stelle der wünschenswerten Klarheit und Präzision ermangelt[4]), so gibt doch Cardan das praktische Verfahren und die hierbei zu beachtenden Regeln richtig an und kennt insbesondere auch, zum mindesten für seinen Spezialfall der 7 Ringe und demnach auch für alle einfacheren Fälle, die Zahl der für die verschiedenen Aufgaben erforderlichen Umstellungen genau. 64 Schritte, so gibt er an, sind erforderlich, um alle 7 Ringe auf die Spange hinaufzubringen[5]),

---

1) Vgl. a. in Schwenters „Deliciae physico-mathematicae" (1651) den 4. Teil: „Auffgaben, die Schreibkunst betreffend" (p. 521 und p. 524/525)

2) Siehe neben dem schon zitierten Abschnitt aus Lucas' „Récr. mathém.", III (p. 55 und p 58/59) einen Artikel von Henri de Parville. „La Tour d'Hanoï et la Question du Tonkin" (La Nature, 12ième année, 1884, premier semestre, p. 285—286), der anscheinend zuerst im „Journal des Débats" vom 27. Dezbr. 1883 erschienen ist; s hierzu R. E Allardice und A. Y Fraser, „La Tour d'Hanoi", Proc. of the Edinburgh Mathem Soc. II, 1883—1884 (Edinburgh 1884), p. 50—52, wo der Artikel aus dem „Journal des Débats" abgedruckt ist — Die von Allardice und Fraser ibidem, p 52—53, gegebene Spieltheorie steht übrigens an Übersichtlichkeit hinter der hier gegebenen und im wesentlichen auf P. H Schoutes Arbeit beruhenden Fassung zurück, wenn beide auch in ihren Resultaten natürlich auf dasselbe hinauskommen

3) Cardan denkt sich nämlich Spange und Ringsystem von einander getrennt und fordert also, die Ringe auf die Spange zu bringen.

4) Außerdem ist der Text noch durch Druckfehler entstellt; über den am meisten störenden s die nächste Anmerkung

5) In der mir jetzt vorliegenden Ausgabe (De subtilitate libri XXI, Basel 1554, p. 408) ist diese Stelle mit einem sinnstörenden Interpunktionsfehler behaftet und lautet so: „primum uoco eum annulum, qui liber est in LXIIII uicibus. Si sine errore agatur nauicula, in omnibus includitur annulis" ., und der Herausgeber einer Ausgabe von 1582 (Basel, p 736) stand diesem wunderlichen Passus offenbar völlig verständnislos gegen-

während es entsprechend für die Ringe 2—7 allein — diese Zahlen in unserer Bezeichnungsweise der Fig. 9 (S. 64) — nur 31 Umstellungen sind. Hieran schließt Cardan den für seinen besonderen Fall der 7 Ringe längsten aller Prozesse, nämlich den, daß anfangs das ganze Ringsystem von der Spange frei ist und die Stellung hergestellt werden soll, in der allein Ring 1 auf der Spange sitzt (vgl. unsere Ausführungen Bd. I, S. 68 über die hierzu inverse Aufgabe). 95, die Summe der beiden vorgenannten Zahlen 64 und 31, gibt Cardan als Anzahl der hierfür erforderlichen Operationen richtig an und, wenn man sodann von der so erreichten Endstellung (allein Ring 1 auf der Spange) zu der anfänglichen (das ganze Ringsystem frei von der Spange) zurückkehren wolle, so würde somit, wie er weiter sagt, dieser vollständige Kreisprozeß („circulus totus") 190 Umstellungen erfordern. Daß das alles in der knappen lateinischen Fassung klar hervortritt, läßt sich freilich nicht wohl behaupten.

Auch Wallis findet [1]) — mit Recht — diese Partie Cardans dunkel („tam obscure, ut qui rem non aliunde noverit, haud facile conjecerit quid rei sit quod velit") und gibt nun selbst eine Darstellung, die an Deutlichkeit und Ausführlichkeit nichts zu wünschen läßt: Nicht nur hat er diesen Abschnitt mit reichlichen Abbildungen versehen, sondern er gibt auch für die einzelnen Ringe genau die erforderlichen Operationen an [2]), wobei er übrigens das, was bei Cardan und hier als eine Operation gerechnet ist, unzweckmäßigerweise in mehrere zerlegt. In wirklicher Beherrschung des Gegenstandes ist Wallis über Cardan nicht hinausgekommen, ja er hat möglicherweise nicht einmal die Angaben Cardans in allen Punkten verstanden. — Über das Alter des Spielzeugs sagt Wallis: „Quam vetusta sit haec res, haud dixerim; sed Cardani saltem aetate notam esse, satis constat. Neque eam ille ut rem à se excogitatam tradit, sed ut ante cognitam." Beachtung verdient übrigens wohl noch die Bemerkung Cardans, das Spielzeug, das zwar an sich keinen Nutzen gewähre, könne zu Querriegeln (Vorlegeschlossern) für Kisten (Truhen) verwandt werden [3]).

über und setzte „primum uoco eum annulum, qui liber est in sexagintaquatuor uicibus (si sine errore agatur) nauicula in omnibus includitur annulis." Die richtige Lesart ist natürlich: „primum voco eum annulum, qui liber est. In sexagintaquatuor vicibus (si sine errore agatur) navicula in omnibus includitur annulis . . ." — Ob sich diese Fassung auch nur in einer einzigen Ausgabe findet? Zufällig und kurioserweise finde ich freilich bei Ludovic Lalanne, „Curiosités bibliographiques" (Paris 1857), p. 275/276, als seltenes Beispiel eines fehlerfreien Druckes die Ausgabe 1557 von Cardans „de Subtilitate" angegeben. Diese Ausgabe habe ich allerdings nicht gesehen; ob sie wirklich fehlerfrei ist?

1) L. c. (Opera mathem., 1693, II, p. 472).

2) Die Aufgabe des Spiels ist bei Wallis ebenso gefaßt wie bei Cardan (s. hier links Anm. 3), nur hat er 9 statt 7 Ringe.

3) „Inutile est hoc per se, sed tamen ad seras artificiosas arcarum transferri potest."

Möglicherweise ist die S. 63 (Bd. I) von uns wiedergegebene irrtümliche Behauptung von O. J. Broch letzten Endes auf diesen Satz Cardans zurückzuführen.

S. 62, 7. Zeile der Anm. 2: Lies „Ausgaben“ statt „Angaben“.

Zu **S. 62/63:** Aus verschiedenen Mitteilungen und sonstigen Erfahrungen schließe ich, daß das Spiel („Zankeisen“, „Nürnberger Tand“) in Deutschland doch seit längerer Zeit recht verbreitet ist [1]) Auch für England darf man dies annehmen [2]) In Indien ist das Spielzeug, das dort goruk-dhunda heißt, in den Händen der Fakire etwas gewöhnliches.[3]) Das Leipziger Museum für Völkerkunde besitzt ein aus China (Provinz Schantung) stammendes Exemplar mit neun Ringen.[4])

---

1) Als älteste, mir bekannte Stelle der deutschen Literatur, an der unser Spielzeug genannt ist, vermag ich heute — im Gegensatz zu den S. 62 (Bd. I) gemachten Angaben — anzuführen Johann Heinrich Zedlers bekanntes „Großes vollständiges Universal-Lexicon aller Wissenschaften und Künste“, Bd. 24 (Leipzig u. Halle 1740), col 1615/1616, wo das Spiel, und zwar unter dem Namen „Nürnberger Tand“, freilich nur ganz kurz, beschrieben ist (die Stelle ist wiederabgedruckt in den „Geschichtsblättern für Technik, Industrie und Gewerbe“, denen ich diesen Hinweis verdanke, Bd. III, 1916, p 62: „Anfrage 67“; die Antwort s. dort p. 348/349). Zum Zeugnis fur die Verbreitung des Spiels in Deutschland zu Anfang des vorigen Jahrhunderts nenne ich die „Jugenderinnerungen eines alten Berliners“ (Berlin 1878) von Felix Eberty, der i. J. 1820 und folgenden Jahren die bekannte Cauersche Pensions- und Erziehungsanstalt in Berlin besuchte und bei Gelegenheit der dort unter den Schülern gepflegten Spiele, wie Schach und Mühlespiel, bemerkt: „Bei einigen Knaben, auch bei mir selbst, war ein gewisses Geduldspiel sehr beliebt, welches fast eine Stunde Zeit erforderte, um zwölf elfenbeinerne Ringe von einer Messinggabel herab und wieder hinauf zu bringen“ (p. 193) In den umfangreichen Musterbüchern resp Preislisten der ehemals (etwa 1850) in Nürnberg existierenden Spielwarenfabrik G G Fendler u. Comp. ist ein „Zankeisen“ mit sieben Ringen abgebildet (eine Photographie dieser Abbildung aus den mir nicht zugänglichen Preislisten verdanke ich Herrn Franz M Feldhaus, der in dem soeben schon zitierten Bd. III, p. 171—175, seiner „Geschichtsblätter f Technik“ usw diese „funf schweren Bände“ (Querfolio-Format), freilich ohne Wiedergabe des „Zankeisens“, besprochen hat) — Siehe a meinen Aufsatz „Mathematik im Spiel und in der Liebe“, Zeitschr. f. Bucherfreunde VIII², 1916, p 84/85.

2) Siehe eine Notiz von H. J Purkiss in Educ. Times Reprints III, 1865, p 66. Das Spiel wird dort als „ring-puzzle“ resp. als System der „complicati annuli“ — dies der Ausdruck von Wallis (vgl. hier Bd I, S. 61, Anm 2) — bezeichnet. Die mathematische Darlegung (p 67) endet bei Purkiss übrigens mit genau derselben Formel, die bei uns diesen Abschnitt (Bd. I, S. 72) beschließt

3) Siehe Jaffur Shurreef [Scherif], „Qanoon-e-Islam, or the Customs of the Moosulmans of India“, herausg u übers. von G. A Herklots (London 1832), p. 295; s. a. Tafel IV, wo in Fig. 6 ein Exemplar von neun Ringen abgebildet ist.

4) Den Hinweis auf dieses Leipziger Vorkommnis verdanke ich Herrn Pastor Fritz Jahn, dem Leiter der Züllchower Anstalten und

Zu Kap. III, § 4, S. 88ff. („Gewichtsproblem“).

Zu S. 88f. in Verbindung mit S. 41f.: An diesen Stellen handelt es sich um die Darstellbarkeit aller Zahlen als algebraischer Summen von Potenzen der 3, wobei jede einzelne Potenz in der betreffenden Summe höchstens einmal vorkommt. Um nun für eine bestimmte Zahl diese Darstellung durch Potenzen der 3 zu erhalten, gaben wir in Bd. I kein besonderes Verfahren an, vielmehr ergibt sich dieses von selbst. In der Tat bietet sich, wie an einem einfachen Beispiel, etwa der Zahl 46, dargelegt werde, ohne weiteres folgendes Verfahren:

$$\begin{aligned}
46 &= 1 + 45 \\
&= 1 + 3 \cdot 15 \\
&= 1 + 3 \cdot (0 + 3 \cdot 5) \\
&= 1 + 3 \cdot (0 + 3 \cdot [-1 + 3 \cdot 2]) \\
&= 1 + 3 \cdot (0 + 3 \cdot [-1 + 3 \cdot \{-1 + 3\}]) \\
&= 1 + 0 \cdot 3^1 - 1 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4 \\
&= 1 - 9 - 27 + 81.
\end{aligned}$$

Will man aber an die Stelle dieses natürlichen und selbstverständlichen Verfahrens unbedingt einen gewissen Schematismus setzen, so bietet sich hierfür, gleichfalls von selbst, die folgende Form:

$$\begin{array}{rrrrr|r|rr}
46 = & +1 & +3 & \cdot 15 & & 1 & +1 & \\
15 = & 0 & +3 & 5 & & 3 & 0 & 3 \\
5 = & -1 & +3 & 2 & & 9 & -1 & 9 \\
2 = & -1 & +3 & & & 27 & -1 & \cdot 27 \\
3 = & & 3 & 1 & & 81 & +81 & \\
\hline
 & & & & & & \multicolumn{2}{r}{+1 - 9 - 27 + 81}
\end{array}$$

Für die Darstellung durch Potenzen der 2 (vgl. Bd. I, S 35f) liegen die Verhaltnisse, wenn möglich, noch einfacher — Wenn demgegenuber eine Notiz im Interméd. des mathém 18, 1911, p 170 (Question 3898) für diese Darstellungen eine besondere „Methode“ angibt, so liegt erstlich, wie gesagt, kein Bedurfnis für eine solche vor, und zweitens kommt das dort gelehrte Verfahren, wie leicht ersichtlich, auf genau dasselbe hinaus wie das obige, nur unterscheidet sich jenes von diesem dadurch, daß es weniger durchsichtig und weniger einfach ist. Vgl dazu einen in Bd. I, S 166,7 zitierten Ausspruch Schopenhauers

Zu S. 90—92 In Erganzung oder vielmehr in teilweiser Ersetzung dieser Ausfuhrungen mochte ich, einer Anregung von sehr geschätzter Seite folgend, noch dieses hinzufügen Aus der S 41 (Bd I) angegebenen Identitat:

---

eifrigen Forderer des Spiels in allen seinen Formen. Eine Abbildung dieses chinesischen Stuckes ist in meinem vorerwahnten Aufsatz, Zeitschr. f Bücherfreunde, l. c p 84, nach einer Skizze, die ich dem Museumsdirektor, Herrn Prof. Dr. Weule, verdanke, gegeben.

$$\text{(I)} \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{3^r - 1} =$$
$$(1 + x + x^2)\cdot(1 + x^3 + x^6)\cdot(1 + x^9 + x^{18})\cdots\left(1 + x^{(3^{r-1})} + x^{2\,(3^{r-1})}\right)$$

oder vielmehr aus der daraus hergeleiteten und gleichfalls dort angegebenen weiteren Identität

$$x^{-\frac{1}{2}(3^r-1)} + x^{-\frac{1}{2}(3^r-3)} + \cdots + x^{-2} + x^{-1} + 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots$$
$$+ x^{\frac{1}{2}(3^r-1)} = (x^{-1} + 1 + x^1)\cdot(x^{-3} + 1 + x^3)\;(x^{-9} + 1 + x^9)\cdot\;.$$
$$\cdot\left(x^{-(3^{r-1})} + 1 + x^{(3^{r-1})}\right)$$

folgerten wir (S. 42, Bd I), daß alle ganzen Zahlen von $-\frac{1}{2}(3^r - 1)$ bis $+\frac{1}{2}(3^r - 1)$ mit Einschluß dieser Grenzen sich auf eine und nur eine Art als algebraische Summen der Zahlen 1, 3, 9, 27, . . 3^{r-1} darstellen lassen, und im Sinne unseres Gewichtsproblems bedeutet dies, daß mit Gewichten von bzw. 1, 3, 9, 27, . 3^{r-1} Gramm alle Wägungen von 1 bis $\frac{3^r - 1}{2}$ Gramm von Gramm zu Gramm ausgeführt werden können Andererseits sind aber mit r verschiedenen Gewichten höchstens $\frac{3^r-1}{2}$ verschiedene Wägungen möglich (s. S. 90, Bd I) und auch dies, wie dort gezeigt ist, nur dann, wenn die Maßzahlen a_1, a_2, . a_r der r Gewichte lauter unter sich verschiedene algebraische Summen ergeben, wobei dann die Summe aller dieser Zahlen a die Zahl $\frac{3^r-1}{2}$ sein muß. Wenn wir also einen zweiten Gewichtssatz von $a_1, a_2, a_3, .\; a_r$ Gramm hätten, der dasselbe leistete wie derjenige von 1, 3, 9, 27, . 3^{r-1} Gramm, so bedeutete dies, daß die sämtlichen algebraischen Summen, die aus den Zahlen a_1, a_2, .. a_r gebildet werden können, alle ganzzahligen Werte von $-\frac{1}{2}(3^r - 1)$ bis $+\frac{1}{2}(3^r - 1)$ mit Einschluß beider Grenzen ergeben, und offenbar besteht dann die Identitat:

$$x^{-\frac{1}{2}(3^r-1)} + x^{-\frac{1}{2}(3^r-3)} + \cdots + x^{-2} + x^{-1} + 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \;.$$
$$+ x^{\frac{1}{2}(3^r-1)} = (x^{-a_1} + 1 + x^{a_1})\cdot(x^{-a_2} + 1 + x^{a_2})\cdot(x^{-a_3} + 1 + x^{a_3})\;..$$
$$(x^{-a_r} + 1 + x^{a_r}),$$

und daraus folgt durch Multiplikation mit $x^{\frac{1}{2}(3^r-1)} = x^{a_1 + a_2 + \quad + a_r}$.

$$\text{(II)} \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdot\;\cdot + x^{3^r-1} =$$
$$(1 + x^{a_1} + x^{2a_1})\cdot(1 + x^{a_2} + x^{2a_2})\cdot(1 + x^{a_3} + x^{2a_3})\cdot\cdot\;(1 + x^{a_r} + x^{2a_r}),$$

also eine Relation, die uns ebenso, wie Gleichung I, eine Zerlegung des-

selben Polynoms $1 + x + x^2 + \cdots + x^{3^r - 1}$ in r Faktoren liefert. Von den in Gleichung I auf der rechten Seite stehenden Faktoren ist nun der erste bekanntlich gerade das Polynom, das, $= 0$ gesetzt, die primitiven dritten Einheitswurzeln liefert; der zweite Faktor: $1 + x^3 + x^6$, $= 0$ gesetzt, gibt die primitiven neunten Einheitswurzeln (s. etwa P. Bachmann, „Die Lehre von der Kreistheilung", Lpz. 1872, p 16); sodann $1 + x^9 + x^{18} = 0$ die primitiven 27-ten Einheitswurzeln usw. Nun sind aber alle diese Gleichungen bzw. Polynome bekanntlich irreduktibel (s. etwa Bachmann, p. 32ff.), und die Faktorenzerlegung unserer Identität I ist daher die einzig mögliche Zerlegung des Polynoms in r Faktoren. Das bedeutet, daß die Reihe der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_r$ mit derjenigen der Zahlen $1, 3, 9, \ldots 3^{r-1}$ identisch sein muß, w. z b. w.

Zu Kap. III, § 5, S. 98ff. („Gergonnes Haufenproblem").

An Literatur der früheren Zeit sind verschiedene, der Periode 1850 bis 1875 angehörende Abhandlungen nachzutragen, die hier nur mit den Jahreszahlen und den Nummern des literarischen Index angegeben seien: A. L. Crelle (1852, Nr. 216), J. L. A. Le Cointe (1863, Nr. 266), sowie die mir nicht bekannten und unter Nr. 596 des Index nachgetragenen Abhandlungen von Ad Steen (1865—1873), S. Hertzsprung (1867), L V. Lorenz (1871).

Le Cointe behandelt den Fall von m^n Karten, die bei dem Spiel zu m Haufen von je m^{n-1} Karten angeordnet werden Die Untersuchungen Gergonnes (s. Bd I, S. 100), die den spezielleren Fall $n = m$ betreffen, scheint der Verfasser ebensowenig wie sonstige Literatur gekannt zu haben, vielmehr war er nur durch eine mündliche Mitteilung seines Freundes und früheren Lehrers Gascheau (Prof. der Faculté des Sciences in Toulouse) mit dem Problem und zwar dem einfachen Falle $m = n = 3$ bekannt geworden, von dem aus er sodann den genannten allgemeineren Fall einer Untersuchung unterwarf Crelle (l c p 317—332) betrachtet den Fall, daß $h \cdot k$ Karten immer in h Haufen von je k Karten angeordnet werden (h und k beliebige ungerade Zahlen), und zeigt, daß, wenn man den Haufen, der die gedachte Karte enthält, bei jedem Zusammennehmen der h Haufen in die Mitte nimmt, die gedachte Karte schließlich auf den Mittelplatz des ganzen Haufens gelangt. Die Anzahl σ der Haufenanordnungen, die hierfür jedenfalls hinreichend, für besondere Fälle — je nach Lage der gedachten Karte — aber auch notwendig sind, bestimmt sich nach ihm durch die Ungleichung[1])

$$h^{\sigma-2} < k < h^{\sigma-1}$$

1) Abgesehen davon, daß wir die Formel natürlich in unseren Bezeichnungen (Bd. I, S 103) geben, hat diese bei Crelle auch insofern ein anderes Aussehen, als er — im Gegensatz freilich zu dem, was über den als Ausgang (l. c p 317/8) benutzten Spezialfall ($h = 3$, $k = 7$) gesagt ist, — die erste Haufenanordnung nicht mitzählt.

Aus neuester Zeit sind insbesondere Arbeiten von H Onnen sen. (Nr. 691, 731, 731[a] des Index) zu nennen. In der ersten dieser Arbeiten (l. c. p. 121—123) betrachtet Onnen zunächst, in Weiterentwicklung der Untersuchungen von C. T. Hudson und L. E. Dickson (s. Bd. I, S 104) Anordnungen von $h \cdot k$ Karten in h Haufen zu je k und bestimmt die Anzahl der Anordnungen, die notwendig und hinreichend sind, um die auserwählte Karte auf einen bestimmten, $r$ten, Platz des ganzen Haufens zu bringen. In dem Hauptteil der Abhandlung und in den folgenden beiden, von denen übrigens Nr. 731a nur ein Extrakt von Nr. 731 gibt, behandelt H. Onnen ein wesentlich allgemeineres Problem als alle seine Vorgänger, indem er nämlich annimmt, daß bei den verschiedenen, aufeinanderfolgenden Haufenanordnungen Zahl der Haufen und demzufolge auch Zahl der Karten jedes Haufens verschieden sind. Wir haben also den Fall, daß die Karten bei der ersten Haufenbildnng zu h_1 Haufen von je k_1 Karten, bei der zweiten zu h_2 Haufen von je k_2 Karten usw., angeordnet werden, wobei natürlich

$$h_1 \cdot k_1 = h_2 \cdot k_2 = h_3 \ k_3 = \ldots \qquad = N \text{ (Gesamtzahl der Karten)}$$

sein muß. Auch für diese wesentlich allgemeinere Fassung des Problems werden dieselben Fragen wie für die spezielleren Probleme gestellt und beantwortet. Dabei unterscheidet Onnen hinsichtlich der Art und Weise, wie das Kartenkunststück praktisch ausgefuhrt wird, zwei verschiedene Fälle, und es erscheint in Ergänzung unserer Betrachtungen in Bd. I geboten, auf diesen Punkt etwas näher einzugehen· Wenn wir bei jeder Karte von einer „Bildseite“ und von ihrem „Rücken“ sprechen, so gibt es für die Art, wie die Karten in dem ganzen Paket liegen und wie sie auf die einzelnen Haufen verteilt werden, offenbar folgende 4 Moglichkeiten

	Lage der Karten im ganzen Paket	Lage der Karten in den einzelnen Haufen
I	Rücken oben	Rucken oben
I[a]	Bildseite oben	Bildseite oben
II	Rücken oben	Bildseite oben
II[a]	Bildseite oben	Rücken oben

Das Verfahren I ist dasjenige, das wir in Bd. I, S 98—100 dem dort behandelten Fall der 27 Karten zugrunde legten, und offenbar gilt die dort erhaltene Endformel auch sogleich für das Verfahren I[a]; nur muß man dann natürlich gleichfalls von der obersten Karte des ganzen Haufens, die jetzt jedoch ihr Bild, nicht ihren Rücken, nach oben kehrt, abzahlen bis zu $9c - 3b + a$, um die gedachte Karte zu erhalten. Dieses Verfahren I resp das nur unwesentlich davon verschiedene I[a] bezeichnet Onnen als das Verfahren „ohne Umkehrung“. Bei Anwendung des Verfahrens II und ebenso bei II[a], das offenbar zu II in demselben Verhältnis, wie I[a] zu I, steht, bezitzt unsere Formel von S. 100 dagegen keine

Gültigkeit mehr. Mit geringen Änderungen in der Deduktion von S. 99/100 findet man, daß die unter den 27 auserwählte Karte nach 3 Haufenanordnungen als die $(9c + 3b + a - 12)$te des ganzen Pakets erscheint [1]) Dieses Verfahren nennt Onnen das „mit Umkehrung" [2]). Die wesentliche Verschiedenheit der beiden Verfahren erhellt u. a. daraus, daß in unserem Falle der 27 Karten bei 3 Haufen zu je 9 unter Anwendung des Verfahrens I die 7., 14. und 21. Karte des ganzen Pakets und sie allein von allen 27 Karten ihre Plätze im ganzen Paket unverändert beibehalten, während bei Anwendung des Verfahrens II die 3 in dieser Weise ausgezeichneten Karten die erste und letzte des ganzen Pakets sind und neben ihnen freilich auch wieder die mittlere (14.)

Die unter Nr 678 des literar. Index aufgeführte Abhandlung von J. G. van Deventer, deren zweiter Teil jedenfalls hierhergehört, war mir nicht zugänglich.

Zu Kap. IV, § 1 („Umfüllungsaufgaben", Literatur und Geschichte).

Die Teilungsaufgabe unseres § 1 findet sich auch in dem schon oben (S 315, Anm 3) genannten Münchner latein. Pergamentcodex 14684 aus dem 14. Jahrhundert und zwar dort sogar in zwei Fassungen: fol. 31ʳ und 32ʳ, und ebenso in der ebendort gleichfalls zitierten Amplonianischen Handschrift aus der ersten Hälfte des 14. Jahrhunderts; s M. Curtze, l. c. (Bibl. math. 9, 1895), p. 80 (Nr XVIII) und p. 83 (Nr XXIX), sowie p 85 Die angegebene Lösung, die an der zweiten Stelle (fol. 32ʳ) der Münchner Handschrift freilich mit verschiedenen (von Curtze emendierten) Korruptelen behaftet ist, ist die bei mir (S 109) als erste aufgeführte. Auch ein auf der Stuttgarter Landesbibliothek unter der Signatur HB XI 22 vorhandener handschriftlicher deutscher Algorismus aus dem Jahre 1488, über dessen Verfasser und Herkunft nichts bekannt ist, enthält die Aufgabe und zwar auch mit der soeben genannten „ersten" Lösung. s E. Rath, Bibl mathem. (3) 14, 1913/14, p 246

Wie diese Umfüllungsaufgabe in älterer Zeit mit der in Kap. I, § 1, von uns besprochenen Aufgabe von „Wolf, Ziege, Kohlkopf" zumeist in den gleichen Schriften · den „Annales Stadenses", der Aufgabensammlung zu Chuquets „Triparty", dem „General Trattato" Tartaglias, sowie den soeben genannten Münchner und Erfurter Handschriften, vorkommt, so scheinen auch beide Aufgaben in gleicher Weise volkstümliche Verbrei-

1) Auch im ursprünglichen Paket hatte die gedachte Karte übrigens diesen Platz innegehabt; denn sowohl bei dem Verfahren II wie bei I stellt eine dreimalige Haufenbildung — für 27 Karten und 3 Haufen von je 9 — die ursprüngliche Reihenfolge wieder her

2) Das Verfahren „mit Umkehrung" legen beispielsweise zugrunde folgende Autoren: Hudson, Dickson, Le Cointe.

tung gefunden zu haben, und so findet sich denn auch unsere Umfüllungsaufgabe in unmittelbarem Anschluß an die andere Aufgabe in den folgenden, schon oben (S. 316 f.), in den Nachträgen zu jener, erwähnten volkskundlichen Werken aufgeführt: Simrock, l. c. p. 36, Nr. 235; Jens Kamp, l. c. p. 326, Nr. 17; Pitrè, „Indovinelli, Dubbi“ usw., p. 292, Nr. 928 (statt 4 bzw. „quattru“ in den Maßzahlen lies dort 3); sowie bei Casalicchio, italien. Ausg. von 1723, p. 329/330 resp. deutsche Ausg. von 1706, 2. T., p. 222/3.

Zu Kap. V („Parkettierungen“).

Zu S. 125 und S. 129, Anm. 1: Auch Albrecht Dürer verdient wohl, hier genannt zu werden. Finden sich doch in seiner „Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt, in Linien ebnen unnd gantzen corporen“ (1525) im 2. Buche in den Figuren 22, 23, 25, 27 die Parkettierungen nicht nur unserer Figuren 2, 3, 4, also die schon im Altertum bekannten Fälle, sondern auch die unserer Figuren 9, 10, 11, und zwar mit dem Bemerken: „Soliche ding mag man braucht zu stuben tillen und estrichen“; s. a. die lateinische Ausgabe („Institutiones geometricae“) 1532, p. 62—67. — Die beiden letzten Zeichnungen von Dürers Figur 26 nebst dem zugehörigen Text sind freilich fehlerhaft, doch kommen diese Fragen für unsere Fassung des Themas nicht in Betracht.

Zu S. 141, letzter Absatz: Mit unserem Fall XV (3, 3, 3, 4, 4) beschäftigt sich eine kurze Note von W. A. Whitworth in den Educ. Times Reprints, vol. 40, 1883 (1884), p. 59, jedoch sind die dortigen Angaben z. T. unrichtig. Bemerkt sei insbesondere eins: Für alle verschiedenen Formen dieser Parkettierung, also ohne Unterschied beispielsweise zwischen den Formen unserer Figuren 19—22, gilt, wofern die Parkettfigur nur hinlänglich groß ist, stets, daß die Zahl der vorkommenden Dreiecke doppelt so groß wie die der Quadrate ist. Ist nämlich n die Anzahl aller „Punkte der Parkettierung“ — n sehr groß —, so ist, da jeder „Punkt“ 3 Dreiecke beansprucht, andererseits aber jedes Dreieck in 3 „Punkten“ vorkommt, die Zahl der Dreiecke auch n, während die Zahl der Quadrate, da jeder „Punkt“ deren 2 beansprucht, jedes Quadrat aber in 4 „Punkten“ vorkommt, nur $\frac{n}{2}$ beträgt.

Zu Kap. VI („Einige kleinere Unterhaltungen“).

Zu § 1 („Ein Bachetsches Spiel“): Eine interressante Abart des Spiels schlägt W. W. Rouse Ball, „Récréations et problèmes mathématiques“, Franz. Ausg. von J. Fitz-Patrick, Paris 1898, p. 30 f.; 2. französ. Ausg., t. I, Paris 1907, p. 95 f., unter Vorführung zweier konkreter Spielpartien vor: Die Freiheit der Spielenden wird insofern weiter eingeschränkt, als **jeder Spieler während derselben Partie nur eine be-**

stimmte Anzahl von Malen, etwa drei- oder auch nur zweimal, um dieselbe Zahl bzw. um dieselbe „Sprungstufe" fortschreiten darf. Eine mathematische Untersuchung hat diese Spielform wohl bisher noch gar nicht erfahren.

Zu § 2 (**„Mutus dedit nomen cocis"**): In einer der Besprechungen des ersten Bandes dieses Buches vermißt der Rezensent eine Angabe über die Entstehung der Merkregel „Mutus dedit nomen cocis", und ich muß gestehen, daß mir hierüber in der Tat nichts bekannt ist. Bis auf weiteres möchte ich glauben, daß die Merkregel von irgend jemandem ad hoc konstruiert ist: Es handelt sich für dieses Kartenkunststück darum, als Merkspruch vier Worte A, B, C, D von folgenden Eigenschaften zu finden: Jedes Wort muß 5 Buchstaben, darunter zwei gleiche, enthalten, und zwar müssen diese insgesamt 20 Buchstaben aus 10 untereinander verschiedenen, je zweimal vorkommenden Buchstaben bestehen. Von diesen 10 Paaren gleicher Buchstaben entfällt zunächst, wie soeben schon gesagt wurde, auf jedes der 4 Worte ein Paar, und die übrigen 2 6 Buchstaben müssen so auf die 4 Worte verteilt werden, daß jedes der 4 Worte mit jedem der anderen 3 Worte einen und auch nur einen Buchstaben gemein hat. — Dabei will ich nicht gerade behaupten, daß das Kartenkunststück in der vorliegenden bestimmten Form bereits vorher existiert haben muß und die adaequate Merkregel hinterher dazu erfunden ist, vielmehr mögen beide, Kunststück und Merkspruch, etwa gleichzeitig entstanden oder doch einander gegenseitig angepaßt sein. Dem Urheber des Merkspruches kann übrigens eine gewisse Findigkeit nicht abgesprochen werden, da es ihm gelang, die angegebenen Postulate durch 4 wirkliche Worte, nicht bloße Buchstabenaggregate, zu befriedigen und zwar sogar durch solche Worte, die zusammen einen wirklichen Satz bilden [1]), was zu erreichen im allgemeinen schwierig, wenn nicht unmöglich, sein wird.[2]) Natürlich darf man von einem solchen ad hoc gebildeten Merksatz keinen tiefen Sinn erwarten [3]), und ebenso verfehlt wird es in solchen Fällen im allgemeinen sein, nach einer besonderen Entstehungsgeschichte für solche Buchstabenspielereien zu suchen. Die Entstehung ist zumeist eine sehr einfache und natürliche. — Auch andere verwandte Buchstabenspielereien, wie die im Aberglauben vielgebrauchte Sator-Arepo-Formel [4]) oder das bekannte Abra-

1) Cocus (coquus) = Koch.

2) Vgl. z. B. den S. 150 (Bd. I) für einen anderen Spezialfall des Kartenkunststückes angegebenen Merkspruch.

3) Der Merksatz wird manchen Leser an die lateinischen Übungssätze erinnern, die er in der Sexta oder Quinta hat übersetzen müssen und die bisweilen um nichts „geistvoller" sind; auch sie sind, wenngleich ihre Bildung viel weniger schwierig oder überhaupt nicht schwierig ist, ad hoc konstruiert, um nämlich gewisse Vokabeln, Formen usw. anzubringen.

4) Siehe darüber mein Buch „Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik" (Berlin 1918), p. 168—203.

cadabra-Dreieck oder das im islamischen Orient so weit verbreitete mystisch-magische Beduh[1]), sind, wie mir scheint, nach ähnlichen Gesichtspunkten zu beurteilen bzw. zu erklären.

Zu § 3 („Ein Kartenkunststück Monges"): Für die mathematische Theorie des Mongeschen Kartenmischens ist außer den in Bd. I bereits zitierten Abhandlungen insbesondere noch zu nennen eine Notiz von Lloyd Tanner in Educ. Times Reprints 33, 1880, p. 74—75 (Antwort auf Frage 6189, ibid p. 73). Gegenüber diesen älteren Arbeiten bieten die neueren Veröffentlichungen über den Gegenstand, nämlich: A. Bienaymé, „Sur un problème de substitutions étudié par Monge", Nouv. ann. de mathém. (4) II, 1902, p. 443—446, sowie die Notizen im Interméd. des mathém. 19, 1912, p. 121 (Question 4027; Worms); p. 208—210 (A. Boutin; L. Aubry); p. 285 (Worms), die von der früheren Literatur übrigens fast gar keine Notiz nehmen, nichts wesentlich Neues mehr.

Zu § 4 („Onkel und Neffe").

Zu S. 156/7 nebst Anm. 3: Ein anscheinend hierauf zielendes Rätsel ohne Lösung findet sich bereits, aus dem Anfange des 10. Jahrhunderts stammend, in der Reichenauer Handschrift Nr. 205 (3) zu Karlsruhe; s. die von Franz Joseph Mone in seinem „Anzeiger fur Kunde der teutschen Vorzeit", Jahrg. 7, 1838, veröffentlichte „Räthselsammlung" (l c col. 40: Rätsel 47)

Zu S. 158ff.: Schon in den *Digesten*, der bekannten romischen Rechtssammlung, findet sich, wie ich freilich nur aus zweiter Hand zitiere, die Frage: **Patruus ego tibi sum, tu mihi.**

Zu Kap. VII („Brettspiele").

Zu S. 166: Dem Titel nach wäre hier eine unter Nr. 718 des literar. Index aufgeführte Abhandlung von E. Fiorilli, die mir nicht zugänglich ist, nachzutragen, doch gibt der Titel anscheinend nicht die richtige Vorstellung von dem Inhalt der Untersuchung. Um eine „mathematische Theorie des Schachspiels" in unserem Sinne handelt es sich dort jedenfalls nicht, vielmehr gibt der Verf, nach dem Referat von G. Vivanti im Jahrbuch über die Fortschr. d. Math. 42, 1911, p. 254 zu schließen, wohl nur die längst bekannten und ziemlich wertlosen Gleichungen der verschiedenen Schachfiguren.

Dagegen hat, wie der Kuriosität halber erwahnt sei, Graf Libri, der bekannte Mathematiker, Bibliograph und Bibliomane, allem Anschein nach sich einmal anheischig gemacht, eine mathematische Theorie des Schach aus dem Ärmel zu schütteln. Erzählt doch E. Catalan in seiner Nouv. correspondance mathém., t. 2, 1876, p 33, Fußnote, folgendes:

---

1) Vgl z B. meinen Aufsatz „Studien über die magischen Quadrate der Araber" in der Zeitschrift „Der Islam", Bd VII, 1916, p. 238—240.

Libri ne connaissait pas d'obstacles! Dans un journal de Mathématiques, qu'il publiait à Florence, on peut lire cet énoncé: **Étant donnés deux joueurs d'échecs, qui jouent aussi bien que possible, et une partie d'échecs dans une position quelconque; déterminer au bout de combien de coups il y aura échec et mat**[1]**. La solution du problème sera donnée dans le prochain numéro.**

Bien entendu, la solution n'est jamais venue!

1) Je cite de mémoire, n'ayant pas le texte sous les yeux; mais je garantis l'exactitude du sens.

Zu **S. 170,** letzte Zeile: Lies „Taylor" statt „Tailor".

Zu **S. 171/172 (Preisverteilung bei Turnieren):** E. Landau hat neuerdings, in einer auch mathematisch interessanten Abhandlung (Nr. 748 des literar. Index), gezeigt, daß auch der von ihm sr. Zt. gegebene Ansatz des Problems in besonderen Fällen zu praktischen Resultaten führt, die unbefriedigend sind, da sie einem in dieser neuen Abh. aufgestellten, sicher überall als richtig und billig empfundenen Grundsatze widersprechen würden.

Zu Kap. VIII („Nonnen- oder Solitärspiel").

Zu **S. 190 (Aufgabe I)** in Verbindung mit **S. 192:** Die Frage nach der Anzahl der verschiedenen Verfahren, die eine Lösung der Hauptaufgabe I liefern, ist bereits von A. L Crelle in seinem Journ. f Math., Bd 44, 1852, p. 334, gestellt worden. doch ist dies Problem, das Crelle — gewiß mit Recht — als voraussichtlich „ziemlich schwierig" bezeichnet, bisher wohl von niemandem in Angriff genommen.

Zu der Literatur über das Solitärspiel ist noch ein unter Nr. 180 des literar Index aufgeführter Bericht über eine Arbeit von A. Suremain de Missery nachzutragen, die mir im Original nicht bekannt und die vielleicht auch gar nicht gedruckt ist. Der Verfasser dieses „Rapport" ist übrigens Vallot, von dem auch der S 183, Anm 3 (Bd I) zitierte, an Férussac gerichtete und in dessen Bulletin veröffentlichte Brief herrührt

Zu **§ 7 (S. 205 ff.):** Wie wir sahen, besitzt für das französische Spielbrett von 37 Löchern die „Hauptaufgabe des Spiels" nur eine sehr beschränkte Lösbarkeit von den 37 Löchern sind nicht weniger als 21 als „Anfangsloch" ganz unzulässig, und nur 16 ermöglichen eine Lösung Um nun zu erreichen, daß die Hauptaufgabe stets lösbar ist, modifiziert L. F. J Gardès „Contribution a l'étude du solitaire", Assoc franç. 41, Congrès de Nîmes 1912 (Paris 1913), p. 80—87, s a Procès-verbaux (Paris 1912), p 69) das Spiel so, daß er **zu Beginn ein leeres Mittelfeld (44) und außerdem noch ein zweites leeres Feld** annimmt; dieses zweite Feld kann alsdann beliebig gewählt werden, und die Hauptaufgabe ist stets lösbar. Ob man auch beide anfänglich leeren Felder beliebig wählen, also das Mittelloch durch irgendein anderes ersetzen darf, hat Gardès

nicht erschöpfend geprüft (l. c. p. 87); in zahlreichen Fällen erhält man jedenfalls auch dann Lösungen, immerhin mag es aber auch unter diesen Bedingungen unlösbare Fälle geben.

Zu Kap. IX („Achtköniginnenproblem").

Zu S. 227 (Problem der 16 Königinnen). Zu diesem Problem hat mir im September 1915 Herr S. L. Langedyk, damals techn. stud. in Amsterdam, interessante briefliche Mitteilungen gemacht, die ich in der Hauptsache hier wiedergebe: Sucht man, eine Lösung des Sechzehnköniginnenproblems zu bilden, so liegt es nahe, diesen Versuch durch Juxtaposition zweier Stellungen des Achtköniginnenproblems zu machen (vgl. die Anm. S. 227 in Bd. I). Denken wir uns also irgend zwei Lösungen des Achtköniginnenproblems, die eine mit blauen, die andere mit roten Spielsteinen, auf demselben Schachbrett aufgebaut! Alsdann werden, wie man sofort sieht, folgende zwei Fälle als wesentlich verschieden zu unterscheiden sein: 1. Ein oder mehrere Felder des Brettes weisen sowohl einen blauen wie einen roten Stein auf; 2. kein einziges Feld des Brettes vereinigt einen blauen mit einem roten Stein. Im ersten Falle hat unser Versuch offenbar keine Lösung des Sechzehnköniginnenproblems gezeitigt (es sind ja überhaupt nicht 16, sondern höchstens 15 Felder des Brettes besetzt), wohl aber haben wir im zweiten Falle stets eine Lösung vor uns. Denn in jeder horizontalen, vertikalen oder diagonalgerichteten Reihe sind alsdann höchstens zwei Felder besetzt: eins mit einem blauen, das andere mit einem roten Stein. Daß nämlich keine dieser Reihen zwei oder mehr Steine derselben Farbe aufweisen kann, liegt ja in der Voraussetzung, daß sowohl die roten, wie die blauen Steine für sich eine Lösung des Achtköniginnenproblems bilden. So sehen wir: *Zwei Lösungen des Achtköniginnenproblems, die kein Feld gemein haben, ergeben durch Kombination eine Lösung des Sechzehnköniginnenproblems.*

Besitzen wir nun eine in dieser Weise aus zwei Lösungen L_8 und L'_8 des Achtköniginnenproblems gewonnene Lösung L_{16} — wir wollen symbolisch so schreiben: $L_{16} = L_8 + L'_8$ —, so können wir uns jedenfalls die Konfiguration L_{16} nach Bedarf so gedreht und gespiegelt denken, daß wenigstens eine der beiden Komponenten L_8 und L'_8 in die Form übergeht, die wir auf S. 225/6 (Bd. I) angegeben und als „Stammlösung" bezeichnet haben. Ohne Beschränkung dürfen wir also hinfort stets annehmen, daß wenigstens eine der beiden erzeugenden Lösungen, etwa L_8, in der Form einer unserer „Stammlösungen" vorliegt, und die Aufgabe, alle diejenigen Lösungen des Sechzehnköniginnenproblems, die aus je zwei Lösungen des Achtköniginnenproblems sich zusammensetzen lassen, zu finden, läßt sich somit in der Weise erledigen, daß man jede der 12 Stammlösungen der Reihe nach mit allen 91 anderen Lösungen des Achtköniginnenproblems kombiniert und hierbei alle diejenigen Paare als

unbrauchbar streicht, die ein oder mehrere Brettfelder gemein haben. Diese 12 · 91 Kombinationen hat Herr **Langedyk** geprüft, und das Resultat seiner Kombinationstafel, auf deren Wiedergabe wir verzichten dürfen, stellt sich so dar:

Brauchbare Kombinationen liefert:

Stammlösung	mit eigenen Derivierten[1]	mit den 84 bzw. 88 anderen Lösungen des Achtköniginnenproblems
1	4	33
2	3	34
3	3	29
4	5	34
5	4	33
6	5	27
7	4	30
8	3	36
9	5	29
10	3	16
11	2	36
12	3	27
	Summe 44	Summe 364

Dabei ist nun in der letzten Spalte jede dort verzeichnete Lösung des Sechzehnköniginnenproblems zweimal gezählt. Liefert die Stammlösung 1 nämlich mit der Stammlösung 6 eine brauchbare Kombination, so ist diese sowohl in der ersten Zeile — Stammlösung 1 —, wie in der sechsten — Stammlösung 6 — mitgezählt. Handelt es sich aber um eine Kombination einer Stammlösung, z. B. 2, mit einer „Derivierten“, z. B. einer solchen von 5 — wir wollen sie 5_p nennen, wo p die Operation (Drehung, Spiegelung) andeuten mag, die 5 in 5_p überführt —, so wäre die resultierende Lösung des Sechzehnköniginnenproblems in unserer symbolischen Schreibweise also durch $2 + 5_p$ zu bezeichnen. Wenden wir auf diese Konfiguration nun die zu p inverse Operation q an, so erhalten wir die

1) Definition s. Bd. I, S. 218

Konfiguration $2_q + 5$, die natürlich von der vorigen nicht wesentlich verschieden ist, uns aber zeigt, daß unsere Lösung, außer in der zweiten, auch in der fünften Zeile mitgezählt ist Wir haben demnach von der Summe 364 die Hälfte zu nehmen und erhalten somit das Resultat, daß *sich durch Kombination von je zwei Lösungen des Achtköniginnenproblems 226 wesentlich verschiedene, d h. nicht durch Drehungen und Spiegelungen ineinander überführbare Lösungen des Sechzehnköniginnenproblems ergeben*

Wie die vorstehende Tabelle zeigt, nimmt die Stammlösung 10, die einzige einfach-symmetrische Lösung des Achtköniginnenproblems, auch hier eine Sonderstellung ein, indem sie sich nur mit 16 der übrigen 88 Lösungen paart, während sich für die unsymmetrischen Stammlösungen durchschnittlich etwa doppelt so viel Paarungen ergeben.[1] Auch darin bildet die einfach-symmetrische Lösung unter allen eine Ausnahme, daß sie mit ihren sämtlichen Derivierten kombiniert werden kann. Von den so sich ergebenden 3 Lösungen des Sechzehnköniginnenproblems geben wir zwei in den Fig 2 und 3 wieder, die wir in der Ausführung der

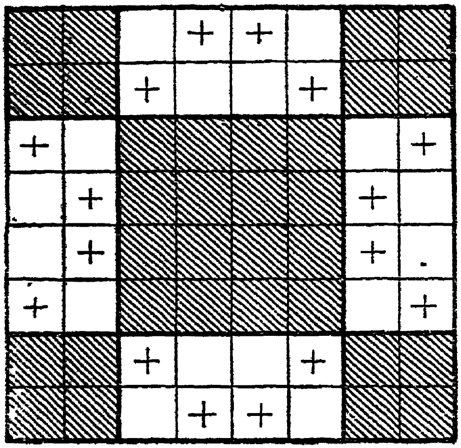


Fig. 2

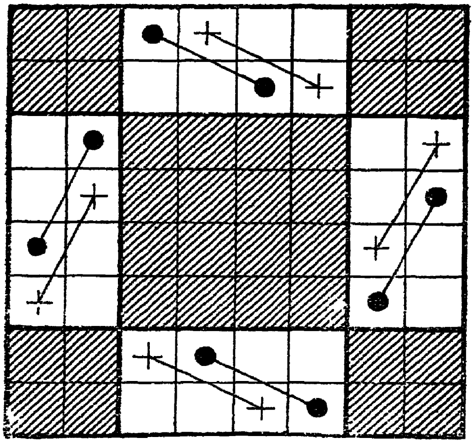


Fig 3

entsprechenden Figur des Achtköniginnenproblems — Fig 13 auf S 227 von Bd I — angepaßt haben. In Fig 2, die die einfach-symmetrische Stammlösung, also die Konfiguration dieser soeben genannten Fig 13, nebst ihrem Spiegelbilde widergibt, haben wir, um die Symmetrie nicht zu stören, alle 16 Königinnen durch Kreuze dargestellt, während in Fig. 3 nur die 8 Königinnen der Stammlösung durch Kreuze, dagegen

1) Es sei hierbei nach der Langedykschen Kombinationstafel bemerkt, daß sich gar keine brauchbaren Kombinationen ergeben zwischen folgenden Gruppen: 5 und 6; 6 und 12; 10 und 12, wobei auch hier die Zahlen wieder im Sinne unserer Liste S 225/6, Bd. I, zu verstehen sind.

die 8 der durch Drehung um 90° aus jener hervorgehenden Derivierten durch schwarze Kreise repräsentiert werden.

Außer den aus je zwei Stellungen des Achtköniginnenproblems sich ergebenden 226 Lösungen besitzt unser Problem nun noch Lösungen anderer Struktur in bisher nicht bestimmter Anzahl. Die in Bd. I, S. 227, Fig. 14 wiedergegebene Lösung ist, wie dort (Anm.) schon gesagt wurde, eine hiervon, und Herr **Langedyk** hat mir noch 17 weitere Lösungen dieser Art mitgeteilt, von denen ich in Fig 4—7 einige durch

+							+
			+	+			
	+					+	
		+			+		
		+			+		
	+					+	
			+	+			
+							+

Fig 4.

+							+
			+		+		
	+			+			
		+				+	
	+				+		
			+			+	
		+		+			
+							+

Fig. 5.

		+			+		
	+					+	
			+	+			
+							+
+							+
			+	+			
	+					+	
		+			+		

Fig 6

			+		+		
		+		+			
+						+	
	+						+
+						+	
	+						+
			+		+		
		+		+			

Fig. 7

Symmetrie ausgezeichnete reproduziere Daß diese Konfigurationen der Fig. 4—7 nicht durch Kombination je zweier Lösungen des Achtköniginnenproblems entstanden sein können, ist leicht zu sehen: In

Fig. 4 und 5 sind alle 4 Eckfelder besetzt, während in einer Losung des Achtköniginnenproblems höchstens ein Eckfeld besetzt sein kann, da eine dort stehende Königin die anderen 3 Eckfelder beherrscht. In Fig. 6 sodann haben wir ganz entsprechend, nur nicht auf den Eckfeldern, sondern auf den zu diesen benachbarten Diagonalfeldern, 4 ein Quadrat bildende Königinnen, von denen jede die 3 anderen angreift. Schließlich in Fig. 7 haben wir ebenso, wie übrigens auch in Fig 5 hier und wie in der Lösung von Bd I, S. 227, Konstellationen in der Art der Fig. 8, also 3 Königinnen, die sich alle gegenseitig angreifen und die daher nicht zu zwei Lösungen des Achtköniginnenproblems gehören können.

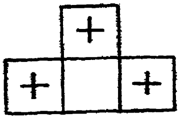


Fig. 8.

Sechs weitere, unter den Langedykschen nicht enthaltene Lösungen verdanke ich Herrn Amtsgerichtsrat Scholle in Rostock; zwei dieser sechs Lösungen geben die Fig 9 und 10 wieder. Daß diese sich nicht

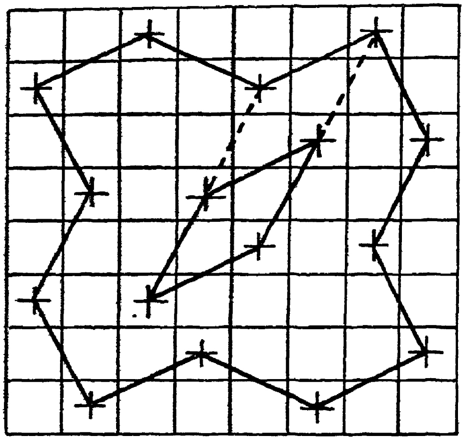


Fig 9

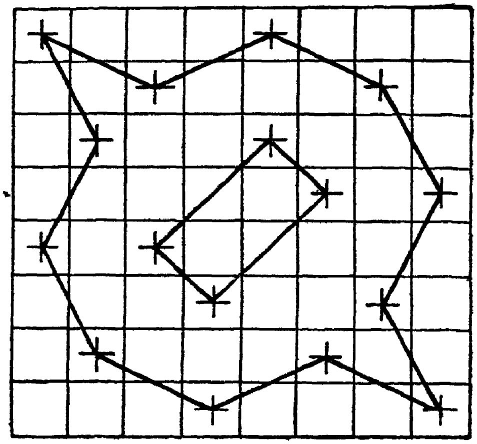


Fig 10

durch Kombination je zweier Losungen des Achtkoniginnenproblems erhalten lassen, erkennt man leicht daran, daß sowohl Fig 9 wie Fig. 10 Gruppen von je drei Koniginnen aufweisen, die sich alle gegenseitig angreifen: in Fig. 9 z. B. *a* 3, *a* 7, *e* 7 (Feldernotation wie in Bd I, S 172, Fig 1); in Fig 10 z. B *a* 4, *a* 8, *e* 8. Die Konfiguration Fig. 9 hat durch die zwischen den einzelnen Königinnen gezogenen Linien (die beiden gestrichelten Linien denke man sich hier vorläufig fort) eine solche Form bekommen, daß sie aus einer äußeren Figur (12 Königinnen) und einer inneren (4 Königinnen) besteht Von diesen beiden Figuren geht die äußere schon bei Drehung um 90°, die innere freilich erst bei einer um 180° in sich über Die ganze Stellung ist mithin einfach-symmetrisch

und liefert durch Drehungen und Spiegelungen drei Nebenformen. Dagegen reproduziert Fig. 10 sich sowohl bei Drehung um 180° wie auch bei Spiegelungen an den Diagonalen; sie ist mithin doppelt-symmetrisch und liefert bei allen Drehungen und Spiegelungen nur noch eine Nebenform. Dazu weist die Fig. 9 noch eine der Fig. 10 abgehende Eigenschaft auf: die 16 besetzten Felder können in geschlossenem Rösselsprung durchlaufen werden (man braucht zu dem Ende nur die beiden gestrichelten Linien an die Stelle der beiden anderen, die mit ihnen einen Rhombus bilden, zu setzen). — Von den weiteren Lösungen Scholles seien noch folgende zwei einfach-symmetrische angemerkt: I) *a* 3, *a* 4, *b* 7, *b* 8, *c* 5, *c* 6, *d* 1, *d* 2, *e* 1, *e* 2, *f* 5, *f* 6, *g* 7, *g* 8, *h* 3, *h* 4 und II) *a* 4, *a* 5, *b* 1, *b* 8, *c* 6, *c* 7, *d* 2, *d* 3, *e* 2, *e* 3, *f* 6, *f* 7, *g* 1, *g* 8, *h* 4, *h* 5. Dabei ergibt sich II aus I dadurch, daß man die oberste Zeile von I fortnimmt und sie unten wieder ansetzt. Nimmt man dagegen in I die unterste Zeile fort und setzt sie oben wieder an, so erhält man zwar auch wieder eine Lösung des Sechzehnköniginnenproblems, jedoch jetzt eine solche, die sich aus zwei Lösungen des Achtdamenproblems, nämlich aus unserer Stammlösung 9 (S. 226, Bd. I) und deren Spiegelbild, zusammensetzt. Daß die soeben angegebenen Lösungen I und II dagegen zu dieser besonderen (Langedykschen) Kategorie nicht gehören, ersieht man auf den ersten Blick daraus, daß jede ein Quadrupel von sich gegenseitig angreifenden Königinnen — *d* 1, *d* 2, *e* 1, *e* 2 in I; *d* 2, *d* 3, *e* 2, *e* 3 in II — besitzt.

Bei unserem Sechzehnköniginnenproblem wird die einzelne Königin mindestens zweimal, sie kann aber auch drei- und höchstens viermal angegriffen werden. In unserer Fig. 9 beispielsweise haben wir zwei Königinnen, die nur von je zwei anderen, — 8 Königinnen, die von je drei anderen, — schließlich 6 Königinnen, die von je vier anderen Königinnen angegriffen werden; in Fig 10 erfahren nicht weniger als 12 Königinnen einen vierfachen und die übrigen 4 einen dreifachen Angriff. Um nun Konfigurationen mit überall gleichmäßigem Angriff zu erhalten, wirft Amtsgerichtsrat Scholle die Frage auf **Wie viele Königinnen lassen sich auf dem Schachbrette höchstens aufstellen, wenn jede von zwei und auch nur zwei anderen angegriffen sein soll**[1]?, und findet als Antwort: 11. Von den mir hierfür mitgeteilten zwei Stellungen gebe ich die eine in Fig. 11 wieder. Die mit Zahlen bezeichneten Felder seien mit Königinnen besetzt, dann wird jede Königin gerade von den Königinnen der beiden Nachbarzahlen angegriffen, d. h. Königin 7 z. B. von den Königinnen 6 und 8 und auch nur von diesen beiden, die größte und kleinste Zahl, d h 11 und 1, sollen dabei auch

1) Daß die Mindestzahl von solchen Königinnen 3 ist, braucht nicht gesagt zu werden.

1				2			
						10	
	6		7				
						9	
					8		
	5						
		4		3			
11							

Fig. 11.

als Nachbarzahlen gelten. Ob es auch Lösungen gibt, in denen die Gesamtheit der Königinnen nicht, wie hier, einen einzigen Zyklus bildet, sondern sich in mehrere Zyklen spaltet, habe ich nicht geprüft.

Zu **S. 230, Z. 2**: Nach brieflicher Mitteilung von Herrn H. Onnen sen (Haag, 12. Mai 1910) ist die Zahl „1766“ in „1787“ zu verbessern.[1]) Prof. Kopfermann hat nach Vergleichung seiner Tabellen mit denen Onnens diese Zahl 1787 bestätigt (Brief v 27 Sept. 1910). Auch die in Zeile 5 angegebene Zahl 1346 wird hiernach einer Berichtigung bedurfen.

Zu S. 238, Anm. 1 (Raumschach).

Auf die hier beiläufig erwähnte „Erfindung“ — sit venia verbo! — eines sogenannten „Raumschachs“ war ich geflissentlich nicht näher eingegangen. Inzwischen ist es dem „Erfinder“, einem Hamburger Arzte, aber wider Erwarten sogar gelungen, eine mathematische Zeitschrift für seine „Erfindung“ zu interessieren, und so glaube auch ich denn, diesen Kulturfortschritt hier nicht länger ignorieren zu dürfen

Mit gewaltigem Tamtam war die „Erfindung“ vor gut 10 Jahren hervorgetreten: Bevor noch die Spielregeln prazise formuliert waren, verkündete unser „Erfinder“ urbi orbique, „das übergeordnete Raumspiel werde dem untergeordneten Flachen- oder Brettspiel theoretisch höchst wertvoll werden“; denn das Raumschach sei „das primäre Urschach“ (sic!) und „das Brettschach nur dessen sekundäre Ableitung“; „alle Gesetze des Brettspiels seien kunstliche Surrogate fur die natürlichen Gesetze des Raumspiels.“ So der „Erfinder“ beispielsweise in der „Deutschen Brief-Zeitung“ vom Febr. 1908 in einem gegen meine Kritik gerichteten und zu meiner Belehrung geschriebenen Aufsatze! In Wirklichkeit ist das gespreizt einherschreitende „ubergeordnete“ Raumschach nichts anderes als die simple und mechanische, völlig geistlose Übertragung des gewöhnlichen Schachspiels von zwei auf drei Dimensionen, eine Spielabart, die schon i. J 1851 bei dem Londoner Schachturnier als Kuriosität

1) An den angegebenen Zahlen für die einfach- und doppelt-symmetrischen Lösungen ändert sich dabei nichts

vorgeführt wurde (s. Bd. I), von der aber der geniale Anderssen mit Recht nichts wissen wollte und die für die „kausale Schachforschung", wie der jetzige „Erfinder" in seiner unverkennbaren Vorliebe für nebelhafte Begriffe sich ausdrückt, zu deutsch: für die Schachtheorie, nichts geleistet hat, nichts leistet und nichts leisten wird; vgl. meine bereits in Bd. I zitierten, beim ersten Auftreten der „Erfindung" geschriebenen Aufsätze.

Nun hat aber unser „Erfinder" plötzlich entdeckt — und das ist der neueste Fortschritt in der ruhmreichen Geschichte seiner „Erfindung" —, daß sein „Raumschach" „ein ausgezeichnetes Lehrmittel zur Ausbildung des Raumanschauungsvermögens" ist, und dieser Vorzug hat der neuen Erfindung sogar die Pforten der mathematischen Literatur zu öffnen vermocht. Wenn ein hervorragender Schachtheoretiker und Schachmeister, wie Dr. Siegbert Tarrasch, die Einführung des Schachspiels in den Lehrplan der Schulen vorschlägt, so vermag ich zwar nicht zuzustimmen, verkenne deswegen aber den hohen bildenden und ethischen Wert des „königlichen Spiels" natürlich nicht. Bettelarm aber müßte der mathematische Unterricht sein, wenn er für Ausbildung der Raumanschauung zu so dürftigen und materiell wie methodisch so wertlosen Lehrmitteln, wie diesem „Raumschach", seine Zuflucht nehmen sollte. Doch nein! Zu welchen Höhen und Tiefen der Erkenntnis der „Erfinder" uns Unwissende vermöge des neuen Lehrmittels zu führen vermag, zeigt mit überzeugender Eindringlichkeit der „Nachtrag" seines Aufsatzes. Die durch eine unerreichbare Schärfe der Bilder und Gedanken, durch unwiderstehliche Logik ebenso wie durch unverkennbare Originalität ausgezeichneten Ausführungen lauten wort-wörtlich so: „Schach und Krieg. Inzwischen, nach Abgabe des Manuskriptes, ist der Krieg ausgebrochen. Von jeher hat man das Schachspiel mit einem Kriegsspiel verglichen. Da nun parallele Beziehungen zwischen Spiel und Kulturstufe bestehen (Spiele der Kinder, der Wilden usw.), so muß auch das Charakteristische eines modernen Krieges in dem modernen Schachspiel zum Ausdruck kommen. Was aber ist das Charakteristikum unseres gegenwärtigen Krieges? Die dritte Dimension! Zum Krieg auf der Oberfläche des Landes und Wassers (Schach-„Brett") gesellt sich der Krieg über dem Lande und Wasser in der Luft (Luftschiffe), unter dem Wasser (Unterseeboote und Minen) und unter der Erde (Schützengräben). Das moderne Schlachtfeld ist „leer". Man sieht nichts. Die Hauptsache spielt sich in der dritten Dimension ab. Sogar unsere schwere Artillerie kann mit ihren Tausende von Metern hochgehenden Steilschüssen ohne dritte Dimension nicht auskommen" [1]) Und diese tiefsinnigen Enthüllungen stehen nicht etwa in einer Faschingszeitung, sondern haben sich — hoffentlich ohne Wissen der Schriftleitung — in eine ernsthafte pädagogische Zeitschrift,

1) Das hier gesperrt Gedruckte ist auch dort gesperrt.

die „Unterrichtsblätter für Mathem. u. Naturwissenschaften" (1915, Nr. 1), einzuschleichen gewußt.

Wenn ich auch von der „Erfindung" nichts halte, so halte ich umsomehr von dem „Erfinder". Einen beneidenswert glücklichen Menschen muß ich in ihm sehen, der jetzt — nach einem Jahrzehnt! — immer noch an seine „Erfindung" und ihren Wert glaubt und mit ungeminderter Begeisterung von ihr spricht. Glücklich diejenigen, die sich reich wähnen, wenn sie Dinge besitzen, die, wie die atmosphärische Luft oder der Sand des Seestrandes, res communes omnium, Gemeingut, sind! glücklich diejenigen, denen ein gütiges Geschick die Fähigkeit verlieh, Trivialitäten für bedeutsame Erfindungen, ein Nebelgewölk von Phrasen für eine aufschlußreiche Wissenschaft, blühendsten Unsinn für folgerichtige Gedanken, zu halten!

Das nächste Ziel, des Schweißes des Edlen wert, wird gewiß das sein, nach der mathematischen auch die — zoologische Literatur dem Raumschach zu erobern Schon jetzt kommen in dem Raumschach als Unterarten oder wohl richtiger als „Überarten" des vulgären Läufers und Springers die Figuren „Einhorn", „Zebra", „Antilope", „Giraffe", „Reh", „Okapi" und „Hirsch" vor und, wenn der „Erfinder" im Adlerfluge seiner kühnen Gedanken erst in die vierte Dimension, von der bislang nur zaghaft in Fußnoten und Parenthesen die Rede war, aufgestiegen sein wird[1]), dann werden gewiß Flußpferde, Dromedare (mit 1, 2, 3 oder 4 Höckern) und andere Quadrupeden sich dazu gesellen. Bisher freilich wurden die „einem praktischen Bedürfnis entsprungenen Bezeichnungen" der neuen Springerformen tunlichst so gewählt, daß „der Pferdetypus gewahrt blieb" („Zebra"), doch schon hat sich bei dieser Gelegenheit in Gestalt der „Antilope" und des „Okapi" die Familie der „Wiederkauer" — nomen

1) Daß es dahin kommen wird, kommen muß, folgt ja aus den oben wiedergegebenen lichtvollen Darlegungen unseres „Erfinders" mit mathematischer Strenge: Alle früheren Kriege vom Trojanischen an bis auf unsere Tage wurden in einer oder in zwei Dimensionen ausgefochten; erst für den gegenwärtigen Weltkrieg ist „das Charakteristikum die dritte Dimension". Die Artillerie der Vergangenheit beschrankte sich bescheiden auf eine oder zwei Dimensionen; dagegen unsere jetzige „schwere Artillerie kann mit ihren Tausende von Metern hochgehenden Steilschüssen ohne dritte Dimension nicht auskommen" Nun steht aber die Menschheit gewiß noch nicht am Ende aller artilleristischen Entwicklung höher und immer höher werden die „Steilschüsse" der Zukunft gehen, und schließlich wird, sei es in näherer, sei es in ferner Zukunft, eine Zeit kommen, wo die Artillerie „ohne vierte Dimension" nicht mehr „auskommen kann", ebenso wie sie jetzt im Weltkriege plötzlich und zum ersten Male die dritte Dimension zu Hilfe nehmen mußte. Da aber „das Charakteristische eines modernen Krieges in dem modernen Schachspiel zum Ausdruck kommen muß", so wird alsdann auch mit zwingender Notwendigkeit das gewöhnliche „untergeordnete" Raumschach durch ein vierdimensionales verdrängt werden müssen, w. z. b w

et omen — der Raumschach-„Erfindung" bemächtigt, und da scheint mir denn doch der bos primigenius als das dem „primären Urschach" geistig meistverwandte Beast die größten Ansprüche auf Aufnahme zu besitzen, ein Vorschlag, mit dem ich zugleich ein wertvolles Steinchen zu dem weiteren Ausbau der genialen Erfindung beigetragen zu haben hoffe. Auch Megatherium, Iguanodon, Pterodactylus und andere paläontologische Viecher werden gewiß imstande sein, im Schachspiel höherer Dimensionen wichtige Dienste zu leisten. Da unser Erfinder ferner bereits „Schachkristalle" — zur „plastischen Gestaltung der Zugkraft der Figuren" — konstruiert hat und zwar Schachkristalle sowohl von „statischem" wie auch von „dynamischem" Ursprunge, so haben wir die größte Aussicht, im „Raumschach" bald ein mathematisch-zoologisch-paläontologisch-kristallographisch-statisch-dynamisches Lehrmittel vom ersten Range zu besitzen.

Nachschrift bei der Drucklegung: Auch in anderen Schriften desselben Verfassers, die ich mir inzwischen in müßigen Stunden zu meiner Erheiterung angesehen habe, finden sich ähnlich gährende, aber durchaus ungare und ungenießbare, ja verworrene Gedanken und Ausführungen, und zwar, wenn ich mich bloß auf das Themengebiet meines Buches beschränke, nicht nur über das Raumschach, sondern auch über den Rösselsprung und das magische Quadrat, „Gebiete, auf denen wir selbst geforscht haben und die wir damit einem besseren Verständnis als früher entgegengeführt zu haben glauben" (p. 105 eines neueren, Berlin 1913, erschienenen Buches). Wie weit in Wirklichkeit diese „Forschungen" über Raumschach vorgeschritten sind, mag man daran ermessen, daß der gedankenreiche Erfinder nach jahrelangem heißem Bemühen und zahlreichen, darüber vergossenen Tintenfässern immer noch nicht in der Lage ist, auch nur die Spielregeln seines Raumschach in endgültiger Fassung aufzustellen Erklart er doch selbst das „Schlagen" der Figuren und auch das „Königsmatt", also die wesentlichsten Elemente des Schachspiels, für „mechanistische Ungeheuerlichkeiten" (p. 126), behalt diese Ungeheuerlichkeiten aber „vorläufig" bei (ibidem), da er offenbar keiner eigenen Gedanken fähig ist und jedenfalls „vorläufig" nicht das „Richtige" an die Stelle zu setzen weiß Dennoch kommt der geniale Denker und Erfinder sich gewiß ungeheuer tiefsinnig vor, wenn er vor seinem Raumschachspiel sitzt — ein Ereignis, von dem übrigens bereits in den Anfängen der „Erfindung" photographische Aufnahmen hergestellt und mehrfach veröffentlicht wurden —, und mit mitleidiger Geringschätzung sieht er von der erhabenen Höhe seines Raumschach auf die gewohnlichen „Schächer" herab, die in der „Bretthypnose" begriffen sind, von denen aber nicht wenige trotz „Brett" und trotz „Hypnose" zahlreiche Partien geliefert haben, in denen sehr oft ein einziger Zug an Scharfsinn und Gedankeninhalt die gesammelten Werke unseres Autors viel-

tausendmal aufwiegt. Übrigens dürfte das in Rede stehende Buch, im Gegensatz zu anderen, selbstverlegten Schriften des Verfassers, in einem Verlage erscheinen, der wohl eine besondere Literaturgattung pflegt, aber jedenfalls innerhalb dieser auch einige durchaus gediegene Werke herausgebracht hat. Im Gegensatz dazu ist das Elaborat unseres „Forschers", insbesondere soweit es sich um die hier in Frage kommenden Themen „Raumschach", „Rösselsprung" und „magisches Quadrat" handelt, nichts als ein hohles oder unklares Gerede, aufgeputzt mit allerlei pomphaften, selbstgeschmiedeten Fremdwörtern und Ausdrücken wie „zellulare Zatrikiologie" (p. 124), „Stereoanalyse magischer Quadrate" (p. 125), „Stereosophie" (p. 120), „Rössel-Tapete" (p. 111), „allomatische Erkenntnistheorie" (p 112), „allomatisches Nicht-Selbst" (p. 109), und mit nicht minder bombastischen Aussprüchen, wie: „die Schachmechanik ist ein Analogon zur Weltmechanik" (p. 125) oder „was vom transzendental-allomatischen Standpunkt aus gesehen reell ist, wird, wenn es phaenomenalisiert, autofiziert werden soll, imaginär" (p. 114, in dem Abschnitt über Rösselsprünge!). Wie uns für das Schach Heil und Enthüllung vom Raumschach kommen soll, so erwartet unser Denker, der, wie gesagt, von Beruf Arzt ist, für die Heilkunde von der Zukunft eine „Stereo-Therapie" (p. 104). Jammerschade, daß wir diese „Raumtherapie" nicht bereits besitzen! Die gegenwärtige Heilkunde, die, hiernach zu urteilen, also wohl eine Flächen-, wenn nicht Punkt-Therapie, ist, wird jedenfalls kaum imstande sein, unseren Autor von dem Wahn, ein Forscher, Denker und Erfinder zu sein, zu heilen, und selbst, wenn sie sich entschlösse, ihm die „gelehrten Zeugungsglieder", wie Lichtenberg die Vorderextremitäten des homo sapiens seu insipiens scribens benamst hat, zu amputieren, würde der Verstümmelte gewiß mit den Beinen fortfahren, unfreiwillige Humoristica über „Stereozatrikiologie" zu verfassen. Wenn ich dem Verfasser auch gewiß einen Dienst erweise, indem ich seinen Namen hier verschweige, so glaube ich doch den wunderlichen Titel des wunderlichen Buches, aus dem ich hier — für die „Nachschrift" — ausschließlich geschöpft habe, nennen zu sollen. „Elias Artista redivivus oder das Buch vom Salz und Raum", so heißt es. „Salz und Raum" — eine seltsame Paarung! Die „Brücke" zwischen beiden, so hören wir mit Staunen (p. 105), bildet — „das Chaos". Daß dieses in dem Buche vorherrscht, vermag ich freilich nicht zu leugnen, wie überhaupt alle mir bekannten Arbeiten dieses Autors an jenen Zustand erinnern, in dem der mosaischen Schöpfungsgeschichte nach (Gen. I, 2) Mutter Erde sich vor Erschaffung der Welt befand.

Zu S. 240: Für die Tatsache, daß sich **nur 6 Lösungen des Achtköniginnenproblems gleichzeitig auf dem Schachbrett aufstellen lassen, ohne daß ein Feld doppelt besetzt wird,** hat G. T Bennett

einen Beweis gegeben[1]), der in modifizierter und etwas vereinfachter Fassung so lautet: Bezeichnet man mit Gauß (s. Bd. I, S. 220/1, Anm. 3) die Spalten (Vertikalreihen) des Schachbretts von links nach rechts der Reihe nach mit -7, -5, -3, -1, $+1$, $+3$, $+5$, $+7$ und die Zeilen (Horizontalreihen), von unten nach oben gerechnet, ebenso und versteht man unter a, b das Feld[2]) der Spalte a und der Zeile b, so stellt sich, wie in Bd I a. a. O. schon gesagt ist, die Gesamtheit der 8 symmetrisch gelegenen Felder, der das Feld a, b angehört, in der Form:

1)	$+a, +b$	5)	$-a, +b$
2)	$+b, -a$	6)	$-b, -a$
3)	$-a, -b$	7)	$+a, -b$
4)	$-b, +a$	8)	$+b, +a$

dar. Eine solche „Gruppe“ von 8 zusammengehörigen Feldern $+a$, $+b$ usw. wollen wir kurz bezeichnen durch das Symbol G (a, b). Ist $b = a$, d. h. gehört das fragliche Feld einer der Diagonalen des Brettes an, so umfaßt die entsprechende Gruppe — wir bezeichnen sie folgerichtig mit G (a, a) — natürlich nur 4 Felder.

Nach dieser Vorbemerkung wollen wir nun die 12 Stammlösungen des Achtköniginnenproblems in Gaußscher Feldernotation angeben, und zwar nehmen wir diese 12 Lösungen wieder in der Reihenfolge, in der unsere Liste S. 225/6 (Bd. I) sie gibt; nur mögen sie jetzt durch römische Ziffern I—XII unterschieden werden. Wir bekommen so die auf der folgenden Seite (oben) gegebene Zusammenstellung

Diese Schreibweise gewährt u a den Vorteil, daß man sehr schnell entscheiden kann, wie stark eine bestimmte Feldergruppe an einer Stammlösung beteiligt ist So sieht man beispielsweise sofort, daß von den Feldern der Gruppe G (1,7) in der Stammlösung XII zwei vorkommen, nämlich Feld $+1$, $+7$ und Feld $+7$, -1. Wir brauchen dazu übrigens kaum noch zu bemerken, daß, wenn die Stammlösung XII zwei und nur zwei Felder der Gruppe G (1,7) aufweist, dasselbe natürlich auch für jede Derivierte von XII gilt; denn die Felder einer „Gruppe“ gehen ja bei allen Drehungen und Spiegelungen immer nur wieder in Felder derselben Gruppe über

Die soeben beispielsweise angeführte Feldergruppe G (1,7) nimmt insofern eine Ausnahmestellung ein, als ihre Felder in den 92 Lösungen

---

1) G. T. Bennett, „The eight queens problem“, The Messenger of Mathem., 39, 1909—1910 (1910), p 19—21 Siehe auch die hiervon unabhängige Arbeit von Heinr Behmann, „Das gesamte Schachbrett unter Beachtung der Regeln des Achtköniginnenproblems zu besetzen“, Mathem.-naturw Bl 8, 1911, p 87—89

2) Ich ziehe hier — aus mehreren Gründen — diese Bezeichnung a, b für die Brettfelder der von Gauß gebrauchten $a + bi$ vor; der Unterschied ist ja nur ein äußerlicher

Spalte:	−7	−5	−3	−1	+1	+3	+5	+7
Stammlösung I	−7	+1	+7	+3	−3	+5	−5	−1
„ II	−7	+3	+7	−3	+5	−1	−5	+1
„ III	−5	−1	+3	+7	−3	−7	+5	+1
„ IV	−5	+1	+5	−7	−3	+7	+3	−1
„ V	−5	+1	+5	−1	−7	+7	+3	−3
„ VI	−5	+3	−7	+5	−1	+7	−3	+1
„ VII	−5	+3	+7	−3	−7	−1	+5	+1
„ VIII	−5	+5	−3	+3	+7	+1	−7	−1
„ IX	−5	+5	+1	+7	−7	−1	+3	−3
„ X	−3	+1	−5	+7	−7	+5	−1	+3
„ XI	−3	+1	+7	−1	−7	+5	−5	+3
„ XII	−3	+3	−5	+1	+7	−7	+5	−1

des Problems am häufigsten unter allen Feldern vorkommen[1]); ihr zunächst stehen in dieser Beziehung die beiden Gruppen G (3,7) und G (5,5). Diese drei Feldergruppen, die ersten beiden mit je 8, die dritte mit 4 Feldern, wollen wir herausgreifen, und auf Grund der vorstehenden Tabelle in einer zweiten tabellarischen Übersicht angeben, mit wieviel Feldern oder Königinnen jede dieser 3 Gruppen an den einzelnen Stammlösungen I—XII beteiligt ist. Man erhält so leicht:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
G (1,7)	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	2
G (3,7)	1	1	1	1	2	2	1	0	1	2	3	2
G (5,5)	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
Summe	3	3	4	3	3	3	4	3	4	4	5	5

Die Gesamtheit der 20 Felder, die unsere 3 Gruppen G (1,7), G (3,7), G (5,5) zusammen umfassen, ist also in jeder der 12 Stammlösungen, und

1) Siehe die übrigens schon von Nauck gegebene Zusammenstellung bei Pein, l. c. p 40.

demzufolge in jeder der 92 Lösungen des Achtdamenproblems überhaupt, durch mindestens 3 Felder vertreten. Wenn wir also irgendwelche 7 Lösungen nebeneinander auf dem Schachbrett aufstellen, so muß dabei die Gesamtheit unserer 3 Gruppen durch mindestens 21 Königinnen vertreten sein; nun umfaßt aber diese Gesamtheit nur 20 Felder, es muß also wenigstens ein Feld doppelt besetzt sein. Damit ist die behauptete Unmöglichkeit dargetan.

Daß andererseits die gleichzeitige Aufstellung von 6 Lösungen möglich ist, beweisen die angegebenen Beispiele (Bd. I, S. 240: Fig. 19 nebst Anm. 2 dort).[1]) Daß auf einem Brett von n^2 Feldern für ein durch 2 oder 3 nicht teilbares n sich stets n Lösungen des n-Damenproblems neben einander aufstellen lassen, ist bereits in Bd. I (S. 240 und 247/8) implizite gesagt. Eine dieser Aufstellungsmöglichkeiten — es gibt deren, wie leicht zu sehen, mehrere — ergibt sich nach dem Muster unserer Fig. 18 (S. 240), in der aus der untersten, die alphabetische Ordnung aufweisenden Zeile die darüber stehenden Zeilen sukzessive durch zyklisches Vorrücken der Elemente um je 2 Plätze hervorgehen.

S. 246, Z. 20 v. o.: lies „Glieder" statt „Glleder".

Zu Kap. X („Die 5 Königinnen auf dem Schachbrett").

Während es in diesem Kapitel sich um das Problem handelte, eine Mindestzahl von Königinnen so auf dem Brett aufzustellen, daß sie dieses ganz beherrschen, könnte man als Gegenstück dazu die Frage aufwerfen: **Welche Maximalzahl von Königinnen kann auf dem Schachbrett aufgestellt werden, ohne daß das ganze Brett beherrscht wird?**

Soll nicht das ganze Brett beherrscht sein, so muß es also wenigstens ein unbeherrschtes Feld geben, und, damit ein solches Feld F existiert, muß dieses selbst und die k Felder, auf die eine Königin von F aus durch je einen Zug gelangen kann, unbesetzt sein. Dagegen dürfen alle übrigen $64 - (k + 1)$ Felder mit Königinnen besetzt sein, und Feld F ist alsdann jedenfalls noch unbeherrscht. Diese Zahl $63 - k$ hat nun ihren größten Wert natürlich dann, wenn k seinen kleinsten Wert hat, und das ist der Fall, wenn Feld F auf dem in Fig. 38 (S. 278 von Bd. I) mit IV bezeichneten Randgebiete liegt. k ist dann, wie dort be-

1) Bennett gibt (l. c. p. 21) von solchen Konfigurationen zunächst 3 nach Lucas an, von denen die an erster Stelle genannte mit der Konfiguration unserer Fig. 19 (S. 240) identisch ist. Von den beiden weiteren Konfigurationen, die Bennett als von ihm selbst gefunden dann noch anführt, ist die eine die von uns in Anm. 2 (S. 240/1) genannte zweite Stellung von J. C. St. Clair; diese gestattet, wie dort schon gesagt ist, eine 180°-Drehung des einen der 6 Systeme, und die so sich ergebende Konfiguration ist die andere Bennettsche.

reits angegeben wurde, = 21, und die Zahl der Königinnen, die man auf dem Schachbrette aufstellen kann, ohne daß dieses ganz beherrscht ist, ist somit in maximo 42.

Fig. 12 stellt eine solche Aufstellung dar: alle Felder mit Ausnahme derjenigen, die in der Figur mit kleinen Kreisen bezeichnet sind, sind als mit Königinnen besetzt zu denken; wir haben dann die angegebene Maximalzahl von 42 Königinnen auf dem Brett, und dieses besitzt dennoch ein unbeherrschtes Feld, das Eckfeld unten links. 43 oder mehr Königinnen würden stets das ganze Schachbrett beherrschen.

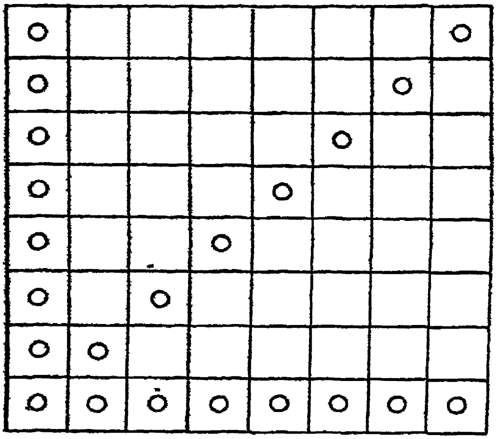


Fig 12.

Man kann nun weiter fragen: **Wenn man m Königinnen ($m < 42$) auf das Brett setzt, wie viele Felder bleiben dann höchstens unbeherrscht? Wie groß ist diese Maximalzahl insbesondere bei 8 Königinnen?** — Ball, der auf diese Frage durch einen Herrn Turton hingewiesen wurde, gibt[1]) folgende einfach-symmetrische Stellung von 8 Königinnen an[2]): 12, 17, 21, 23, 27, 32, 71, 72, bei der 11 Felder unbeherrscht bleiben. Eine zweite einfach-symmetrische Stellung dieser Art: 13, 14, 15, 31, 35, 41, 51, 53 teilte mir Amtsgerichtsrat Scholle mit. Daß 11 nun die gesuchte Feldermaximalzahl bei 8 Königinnen ist, ist zwar anzunehmen, bedarf aber jedenfalls noch eines Beweises.

Zu S. 293: Auch drei Königinnen und zwei Türme vermögen das ganze Schachbrett zu beherrschen, in der folgenden Stellung nämlich, die von C. Planck angegeben sein soll und die ich einem mir nur im Ausschnitt vorliegenden Artikel von Henry E. Dudeney („The world's best puzzles", The Strand Magazine 36, 1908(?), p. 781) entnehme: Königinnen: 22, 26, 84; Türme: 48, 64. Dudeney stellt dort die Aufgabe, eine Aufstellung von drei Königinnen, einem Turm und einem Springer so anzugeben, daß das ganze Brett beherrscht wird. Die folgende Num-

1) W. W. Rouse Ball, „Récréations et problèmes mathématiques", Französ. Ausg. von J. Fitz-Patrick, 1898, p. 151 oder 2. französ. Ausg., t. II, 1908, p. 123.

2) Felder-Notation wie in Bd. I, S. 287/288.

mer des Journals, die die Lösungen der verschiedenen Probleme bringen sollte, ist mir nicht zugänglich; da ich aber beim ersten Versuch sogleich die folgende Lösung finde: Königinnen: 11, 25, 82; Turm: 58; Springer: 55, so darf man bis zu genauerer Prüfung wohl annehmen, daß eine größere Zahl Lösungen existiert.

Zu **S. 305**: Für $n = 17$ hat mir Herr Amtsgerichtsrat Scholle eine weitere Lösung mitgeteilt[1]): 1, 5; 3, 11; 5, 17; 7, 3; 9, 9; 11, 15; 13, 1; 15, 7; 17, 13. Die Konfiguration dieser Lösung ist der durch Fig. 27 (Bd. I) dargestellten nahe verwandt: Wie diese, ist sie doppelt-symmetrisch und besteht gleichfalls aus dem besetzten Quadratmittelfelde und zwei „Symmetriequadrupeln"; nur stehen die 8 Königinnen nicht, wie in Fig. 27, auf dem inneren Quadrat der 49 Felder, vielmehr sind alle 8 von hier auf die 8 Randgebiete (4 Eckquadrate und 4 Mittelrechtecke) abgewandert, so zwar, daß auf jedem dieser 8 Gebiete eine Königin steht. Ferner läßt auch diese neue Konfiguration sich, wie die der Fig. 27, zusammenhängend mit dem Springer durchlaufen, nur dürfen wir dafür nicht, wie bei Fig. 27, einen Springer von gewöhnlicher, sondern einen solchen von besonderer Gangart zugrunde legen, einen Springer nämlich, der mit jedem Zuge um 2 Zeilen und 6 Spalten resp. vice versa fortschreitet (vgl. S. 274, Bd I). — Natürlich läßt sich auch aus dieser neuen Lösung nach dem S. 306 angewandten Prinzip — Spiegelung eines Symmetriequadrupels — eine weitere doppelt-symmetrische Lösung herleiten, nämlich die folgende. 1, 5; 3, 7; 5, 17; 7, 15; 9, 9; 11, 3; 13, 1; 15, 11; 17, 13

Zu **S. 310**: Für $n = 14$ scheint nach Scholle $k = 8$ und für $n = 15$ nach demselben $k = 9$ zu sein (8 Königinnen beherrschen zwar in zahlreichen Stellungen $15^2 - 1$, aber anscheinend in keiner Stellung alle 15^2 Felder). Auch fur verschiedene größere Werte von n sind mir von demselben Herrn Lösungen des Damen-Minimalproblems mitgeteilt, so für $n = 25$ eine Stellung von 14 und für $n = 31$ eine solche von 17 Königinnen, die das ganze Brett beherrschen. Die letztgenannte Lösung, die doppelt-symmetrisch ist, lautet folgendermaßen 1, 7; 3, 15; 5, 23: 7, 31; 9, 5; 11, 13; 13, 21; 15, 29; 16, 16; 17, 3; 19, 11; 21, 19; 23, 27; 25, 1; 27, 9; 29, 17; 31, 25, während diejenige für $n = 25$ die folgende ist: 1, 1; 9, 14; 10, 12; 11, 15; 12, 9; 12, 18; 13, 11; 13, 14; 14, 17; 15, 10; 16, 13; 17, 11; 17, 16; 18, 14. Sollte sich bestätigen, daß die Werte $k = 9, 14, 17$ in der Tat die kleinstmöglichen für bzw. $n = 15, 25, 31$ sind, oder sollte sich dies auch nur für einen von ihnen bewahrheiten, so ware damit erwiesen, daß die auf S. 302 (oben) nach v. Szily angegebene Ungleichung

1) Wie in Bd I (s S. 301, Anm. 1), werden die Nummern der Zeilen und Spalten, weil z T zweiziffrig, durch Kommata und die einzelnen Felder demzufolge durch Semikola abgetrennt.

keine allgemeine, vielmehr nur eine recht begrenzte Gültigkeit besitzt, wie übrigens von vornherein, insbesondere bei der Enge des durch jene Ungleichung definierten Intervalls, nicht unwahrscheinlich war.

Zu S. 311 f. (Springer-Minimalproblem).

Zu diesem Problem hat mir Herr W. Prager, Obersekundaner in Darmstadt, interessante Mitteilungen gemacht (Januar 1918), von denen ich die voranstelle, daß die Beherrschung des gewöhnlichen Schachbretts schon mit weniger als 14 (vgl. S. 311), nämlich bereits mit 12 Springern, zu erreichen ist. Unsere Fig. 13 gibt die Lösung Pragers wieder; die Konfiguration geht bei allen Drehungen, nicht aber bei Spiegelungen, in sich über, ist also doppelt-symmetrisch und stellt eine Lösung des „Hauptproblems" (Definition S. 286/287) dar. Der Genannte, wie auch ein anderer Freund dieses Buches, dem ich die Lösung mitteilte, haben mir unabhängig voneinander die Überzeugung ausgesprochen, daß dies die einzige Lösung des Falles $n = 8$ sei. Ist diese Behauptung richtig, so würden mithin die beiden „Nebenprobleme" für $n = 8$ überhaupt nicht durch 12 Springer befriedigt werden.

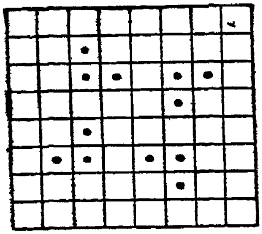


Fig 13.

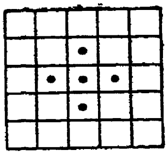


Fig. 14

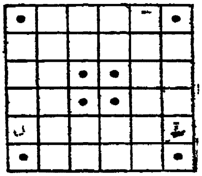


Fig 15

Für Bretter von 5^2 und 6^2 Feldern teilte mir Herr Prager die bei allen Drehungen und Spiegelungen in sich übergehenden, d h dreifach-symmetrischen Stellungen der Figuren 14 und 15 mit. Insgesamt erhalte ich für diese beiden Brettformen folgende Lösungen (Bezeichnungsweise wie auf S 289, Bd. I):

$n = 5$

1)	11, 23, 33, 34, 43	8 Lös	
2)	11, 24, 33, 34, 43	8 „	
3)	11, 33, 34, 43, 44	4 „	V.
4)	13, 23, 32, 33, 43	8 „	
5)	13, 23, 33, 41, 43	8 „	
6)	13, 23, 33, 43, 53	2 „	V
7)	22, 23, 32, 33, 34	8 „	
8)	23, 32, 33, 34, 43	1 „	V. (Fig 14)

$n = 6$

1)	11, 16, 33, 34, 42, 43, 44, 45	4 Lös.	
2)	11, 16, 33, 34, 42, 43, 44, 54	8 „	
3)	11, 16, 33, 34, 43, 44, 45, 61	8 „	
4)	11, 16, 33, 34, 43, 44, 53, 54	4 „	
5)	11, 16, 33, 34, 43, 44, 61, 66	1 „	*V.* (Fig. 15.)
6)	11, 24, 33, 34, 42, 43, 44, 45	8 „	
7)	11, 24, 33, 34, 42, 43, 44, 66	4 „	
8)	11, 24, 33, 34, 43, 44, 45, 53	8 „	
9)	11, 24, 33, 34, 43, 44, 53, 54	8 „	
10)	11, 24, 33, 34, 43, 44, 53, 66	4 „	
11)	11, 33, 34, 35, 43, 44, 45, 53	8 „	
12)	12, 32, 34, 35, 42, 44, 45, 62	4 „	
13)	13, 14, 23, 24, 43, 44, 53, 54	4 „	
14)	13, 14, 23, 24, 53, 54, 63, 64	2 „	*V.*
15)	13, 23, 24, 26, 43, 44, 53, 54	8 „	
16)	22, 23, 24, 25, 42, 43, 44, 45	4 „	*F.*
17)	22, 23, 24, 34, 42, 43, 44, 45	8 „	*F.*
18)	22, 23, 24, 34, 42, 43, 44, 54	8 „	*F.*
19)	23, 24, 33, 34, 42, 43, 44, 45	4 „	*F.*
20)	23, 24, 33, 34, 42, 43, 44, 54	8 „	*F.*
21)	23, 24, 33, 34, 43, 44, 53, 54	2 „	*F.*
22)	23, 33, 34, 35, 42, 43, 44, 54	2 „	*F.*

Die Liste für $n = 6$ erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, ist aber möglicherweise doch erschöpfend.[1]) Übrigens ergeben sich die meisten dieser Lösungen, nämlich alle mit Ausnahme von Nr 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, sehr leicht aus der dreifach-symmetrischen unserer Fig 15 und zwar durch folgende Erwägung Die vier Springer des Mittelquadrats der Fig 15 beherrschen alle Felder des Brettes mit Ausnahme der vier Eckfelder Die vier auf diesen Eckfeldern stehenden Springer haben also nur die Aufgabe, diese 4 unbeherrschten Eckfelder zu besetzen resp zu beherrschen Diese Aufgabe erfüllen sie nun auch dann noch, wenn man sie von ihren jetzigen Feldern aus je einen Springerzug tun laßt Man erhält also, wenn man 1, 2, 3 oder 4 dieser Eckspringer von ihrem Eckfelde aus je einen Springerzug hierhin oder dorthin ausführen laßt, stets wieder Lösungen unserer Aufgabe, und zwar ergibt dies im ganzen 14 neue Konfigurationen [2]) Da in der dreifach-symmetrischen Lösung der Fig 15

1) Für Vervollständigung dieser Liste fühle ich mich Herrn Amtsgerichtsrat Scholle und Herrn W Prager zu Dank verpflichtet.

2) Läßt man nur einen der Eckspringer einen Zug tun, so erhält man Lösung Nr 3; zieht man zwei benachbarte Eckspringer, so ergeben sich drei wesentlich verschiedene Konfigurationen: die unserer Nummern 1, 2, 4; sind es zwei gegenüberstehende Eckspringer, so resultieren die

4 „weiße“ und 4 „schwarze“ Felder des Brettes besetzt sind, andererseits der Springer aber mit jedem Zuge die Farbe wechselt (vgl. Bd. I, S. 326), so werden, wenn man einen oder drei von den vier Eckspringern je einen Springerzug tun läßt, Lösungen resultieren, in denen 3 der besetzten Felder die eine und 5 die andere Farbe aufweisen, und, wenn man zwei gegenüberstehende, d. h. „gleichfarbige“ Eckspringer ziehen läßt, so wird man Lösungen mit 2 Feldern der einen und 6 der anderen Farbe erhalten. Die Brettfarben kommen somit in unseren Lösungen im Verhältnis 4 : 4, 3 : 5 oder 2 : 6 vor. Alle Lösungen, die zugleich das Nebenproblem *F* befriedigen, müssen freilich stets ebensoviele Springer auf weißem wie auf schwarzem Feld aufweisen, und zwar gilt dies, wie sich leicht zeigen läßt, für gerades n allgemein.[1])

In ähnlicher Weise, wie im Falle $n = 6$, ergeben sich im Falle $n = 5$ aus den drei symmetrischen Lösungen (Nr. 3, 6, 8) die sämtlichen übrigen Lösungen, da in jeder jener drei symmetrischen Lösungen vier geeignet gewählte unter den fünf Springern das ganze Brett mit alleiniger Ausnahme des von dem fünften Springer besetzten Feldes beherrschen und man somit diesen fünften Springer wieder einen Springerzug ausführen lassen darf.[2]) Was die Farben der Brettfelder betrifft, so haben wir in

---

Nrn. 7 und 10; die Bewegung von drei Eckspringern liefert die Nrn. 6, 8, 9, 11 und die von allen vier schließlich die Nrn. 19, 20, 21, 22 — Übrigens ergeben sich auch mehrere der sonstigen Lösungen (Nr 12—18) oder vielleicht alle durch ähnliche Erwägungen, wie es die obenstehende ist, aus anderen Lösungen; so sieht man z. B. leicht, daß in Lösung 21 der Springer 33 nur für die Beherrschung des Feldes 21 und Springer 34 nur für die von Feld 26 notwendig ist, und daß die eigenen Felder dieser beiden Springer ohnehin beherrscht sind; aus dieser Erwägung heraus erhält man aus Lösung 21 sofort die Lösungen 12, 13 und 15.

1) Sollen w Springer auf weißem und s auf schwarzem Felde eine Lösung des Nebenproblems *F* darstellen, so ist dies nur so möglich, daß die w Springer sämtliche $\frac{n^2}{2}$ schwarzen Felder beherrschen und die s Springer sämtliche $\frac{n^2}{2}$ weißen. Nun ist aber bei geradem n die Konfiguration der weißen Felder derjenigen der schwarzen kongruent (die eine geht durch Drehung um 90° in die andere über). Falls also w und s ungleich wären, d. h. w etwa kleiner als s, so wäre es möglich, auch die Beherrschung der $\frac{n^2}{2}$ weißen Felder ebenso, wie die der schwarzen, bereits durch w Springer, statt durch s, zu erreichen. Unsere Lösung der $w + s$ Springer würde also nicht die Mindestzahl von Springern enthalten, sondern durch eine mit $2w$ Springern ersetzt werden können.

2) So ergeben sich aus Lösung 3 die Lösungen 1 und 2, aus Lösung 6 die Nrn. 4 und 5, aus Lösung 8 wieder die Nrn 1 und 4 und außerdem 7 — Übrigens könnte man die verschiedenen Lösungen auch durch folgende Erwägungen herleiten: Die drei Springer 32, 33, 34 beherrschen alle Felder mit Ausnahme der folgenden vier. 23, 31, 35, 43.

den Lösungen dieses Falles $n = 5$ entweder 3 weiße und 2 schwarze Felder (Nrn. 3, 6) — weiß sei die Farbe der Eckfelder, also die Farbe von 13 Brettfeldern, schwarz also die der übrigen 12 Felder — oder aber 2 weiße und 3 schwarze Felder (Nrn. 1, 2, 4, 5, 7) oder schließlich (Nr. 8) ein weißes und 4 schwarze Felder.[1] Wie unsere Liste angibt, genügt keine einzige Lösung der „Angriffsforderung"; das Nebenproblem F wird somit für $n = 5$ mehr als 5 Springer erfordern (vgl. Bd. I, S. 290f. und 288). Auch in dem Falle $n = 4$ übrigens, dessen 3 Lösungen mit je 4 Springern wir bereits in Bd. I (S 311) erschöpfend angaben, genügt keine dieser Lösungen der Bedingung F und, da, wie wir wissen, bei geradem n jede Lösung dieses Nebenproblems ebensoviele Springer auf weißem wie auf schwarzem Feld, zusammen also jedenfalls eine gerade Anzahl, aufweist, so müssen hier mithin mindestens 6 Springer erforderlich sein; diese Anzahl ist freilich auch ausreichend (Beispiel: 12, 13, 22, 23, 31, 34).

Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, daß der Fall $n = 3$ zwei, und zwar einfach-symmetrische, Lösungen: 1) 11, 12, 13, 22; 2) 11, 12, 21, 22, besitzt. Die zweite weist je zwei weiße und schwarze Felder, die erste drei weiße und ein schwarzes, auf. Beide Lösungen genügen der Bedingung „Angriffsverbot"; dagegen besitzt das Nebenproblem F für dieses Brett überhaupt keine Lösung, also auch nicht mit mehr als vier Springern, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil das Mittelfeld des Brettes von keinem anderen Felde aus beherrscht wird.

Für $n = 7$ gibt es folgende drei Lösungen[2]:

Man kann nun von diesen vier Feldern, deren Mittelpunkte die Figur eines Rhombus bilden, entweder zwei besetzen, und zwar hierbei wiederum entweder zwei gegenuberliegende Felder des Rhombus· Lösungen Nr 6 und Nr. 8 (Figur 14), oder zwei benachbarte: Lösung Nr 4, oder aber nur ein Feld (zwei wesentlich verschiedene Falle), dessen Springer dann von den übrigen drei Rhombenecken zwei beherrscht, so daß also ein Brettfeld noch unbeherrscht bleibt und von einem anderen Felde aus durch den letzten Springer beherrscht werden muß; so erhält man zu den bisherigen Lösungen noch Nr 1, 5, 7 hinzu Aus Nr 1 endlich ergeben sich, da die vier Springer 11, 33, 31, 43 alle Brettfelder mit Ausnahme von 44 beherrschen, leicht die allein jetzt noch fehlenden Lösungen Nr. 2 und 3

1) Daß die schwarzen Felder in den Losungen haufiger als die weißen auftreten (Verhältnis 23 . 17), ist leicht erklärlich aus folgenden Gründen: *a*) Die Springer der schwarzen Felder haben die weißen Felder (mit Ausnahme der selbstbesetzten) zu beherrschen und umgekehrt; nun ist aber die Zahl der weißen Felder um 1 größer als die der schwarzen; *b*) auf keinem anderen Felde unseres Brettes außer dem Mittelfelde (33) entfaltet der Springer seine volle Schlagkraft, und durch die alleinige Besetzung dieses weißen Feldes, das in der Tat in allen Lösungen vorkommt, werden bereits 8 der 12 schwarzen Felder beherrscht

2) Nach Mitteilungen der Herren Scholle und Prager

1) 14, 32, 33, 35, 36, 52, 53, 54, 55, 56	4 Lös	*F*.
2) 23, 25, 33, 35, 43, 45, 52, 53, 55, 56	4 „	*F*.
3) 23, 25, 33, 35, 43, 45, 53, 55, 63, 65	2 „	*F*

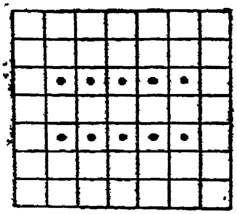


Fig 16.

von denen wir die doppelt-symmetrische Nr. 3 in Fig. 16 abbilden. Für das Nebenproblem *V* gibt es in diesem Falle anscheinend überhaupt keine Lösung. — Für $n = 9$ verdanke ich die folgende doppelt-symmetrische Lösung mit 14 Springern.

15, 32, 33, 37, 38, 43, 47, 63, 67, 72, 73, 77, 78, 95 (*V*)

Herrn Prager, und dessen Schulkameraden Herrn Walter Kling für $n = 10$ die gleichfalls doppelt-symmetrische mit 16 Springern, die ich in Fig. 17 wiedergebe (*V*). Nach Prager und Scholle gibt es für $n = 9$, 10 nur diese Lösungen.

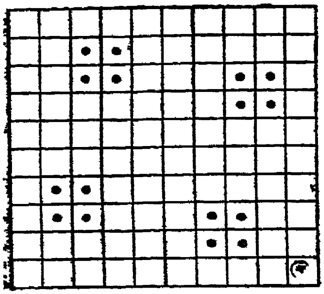


Fig. 17

Die bisher erhaltenen Ergebnisse mögen der besseren Übersicht halber in einer Tabelle, wie wir sie für das analoge Königinnen-Problem in Bd. I (S. 301) gaben, zusammengestellt werden, wobei s die Anzahl der erforderlichen Springer für das Hauptproblem, s_V und s_F die entsprechenden Anzahlen für die Nebenprobleme sein sollen, und S, L, S_V, L_V, S_F, L_F die in Bd I angegebenen Bedeutungen haben mögen. Wir erhalten so:

n	s	S	L	s_V	S_V	L_V	s_F	S_F	L_F
3	4	2	8	4	2	8		0	0
4	4	3	9	4	3	9	6	?	
5	5	8	47	5	3	7	$\geqq 6$		
6	8	22	119	8	2	3	8	7	36
7	10	3	10		0	0	10	3	10
8	12	1	2	> 12			$\geqq 14$		
9	14	1 (?)	2 (?)	14	1 (?)	2 (?)			
10	16	1 (?)	2 (?)	16	1 (?)	2 (?)			

Für $n = 11$ war bereits in Bd I eine Lösung mit 22 Springern angegeben, und dieser beträchtliche Sprung — von 16 Springern für $n = 10$ zu 22 für $n = 11$ — läßt zunächst den Verdacht entstehen, die Zahl 22 sei übermäßig groß; gleichwohl scheint dies nicht der Fall zu sein — Für

einige noch größere Bretter hat Herr Amtsgerichtsrat Scholle Lösungen bestimmt und mir freundlichst mitgeteilt; unter Benutzung seiner Resultate ergibt sich folgende Zusammenstellung, in der n und s die bisherige Bedeutung haben und $f = \frac{n^2}{s}$, also die durchschnittlich von dem einzelnen Springer beherrschte resp. besetzte Felderzahl, sein soll[1]:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
s	4	4	5	8	10	12	14	16	22	24	28	34	37
f	2, 25	4	5	4, 5	4, 9	5, 3	5, 8	6, 25	5, 5	6	6, 04	5, 76	6, 08

Während bei dem entsprechenden Problem der Königin, einer Figur „von großer Tragweite" („à longue portée", vgl. Bd. I, S. 280), die von der einzelnen Königin durchschnittlich beherrschte Felderzahl begreiflicherweise mit wachsendem n beständig wächst (s. die Tabelle in Bd. I, S. 310), hat diese Zahl für den Springer als eine Figur „von kurzer Tragweite" eine obere Grenze. Denn der Springer beherrscht höchstens 8 und, unter Einrechnung des eigenen Feldes, 9 Felder. Dieser Grenze 9 also könnte unsere Größe f sich mit wachsendem n höchstens asymptotisch nähern, ohne sie jedoch wohl je zu erreichen In dem kurzen von uns hier in der Tabelle beschriebenen Intervall zeigt f jedoch im ganzen die Tendenz beständigen Steigens durchaus noch nicht; es fällt vielmehr ziemlich stark bei $n = 6$ und 11 und weniger stark bei $n = 14$. In der Tat ist, wie schon hervorgehoben wurde, für $n = 11$ die Zahl der erforderlichen Springer über Erwarten groß; die Schlagkraft des einzelnen wird daher nur ungenügend ausgenutzt, und es ist wegen dieser relativen

1) Von den Losungen Scholles gebe ich die folgenden hier an I) für $n = 12$ die doppelt-symmetrische· 2, 3, 2, 4; 2, 9; 2, 10: 3, 3; 3, 4; 3, 9; 3, 10; 6, 3; 6, 4; 6, 9; 6, 10; 7, 3, 7, 4; 7, 9, 7, 10; 10, 3; 10, 4; 10, 9: 10, 10; 11, 3; 11, 4, 11, 9; 11, 10 (V); II) für $n = 13$ die doppelt-symmetrische: 1, 5; 2, 11; 3, 2; 3, 3, 3, 7; 3, 8; 3, 10; 3, 11; 4, 3. 5, 6; 5, 13, 6, 3; 6, 6; 7, 3; 7, 11: 8, 8; 8, 11; 9, 1; 9, 8; 10, 11; 11, 3, 11, 4; 11, 6; 11, 7; 11, 11; 11, 12; 12, 3; 13, 9; III) für $n = 14$ die einfach-symmetrische. 2, 2; 2, 3; 2, 12; 2, 13; 3, 2; 3, 3; 3, 7; 3, 8; 3, 12; 3, 13: 4, 7; 4, 8; 6, 9; 7, 3; 7, 4; 7, 11; 7, 12; 8, 3; 8, 4; 8, 11; 8, 12; 9, 9; 11, 7: 11, 8; 12, 2; 12, 3; 12, 7; 12, 8; 12, 12; 12, 13; 13, 2; 13, 3; 13, 12; 13, 13; IV) für $n = 15$: 1, 1; 2, 8, 2, 9; 2, 13; 2, 14; 3, 3; 3, 4; 3, 8; 3, 9; 3, 13, 3, 14, 4, 3; 4, 4; 7, 12; 7, 13; 8, 2; 8, 3; 8, 7, 8, 8, 8, 12; 8, 13; 9, 2; 9, 3, 9, 7; 9, 8; 12, 14; 12, 15, 13, 3; 13, 4; 13, 9; 13, 10; 13, 14; 13, 15; 14, 3; 14, 4; 14, 9; 14, 10 (V). Die ein Quadrat bildenden Springerquadrupel dieser letzten Lösung gestatten übrigens mehrfach Parallelverschiebungen, auch konnen diese Quadrupel z. T durch vier in gerader Linie stehende Springer ersetzt werden — Diese Quadrupelanordnung der Springer durfte übrigens nach Scholle überhaupt im wesentlichen die Signatur der Lösungen für größeres n sein, während wir für kleinere Werte von n, wie $n = 8$ (Fig. 13) und $n = 9$, ja Springertripel hatten

Vergeudung von Kräften von vornherein zu vermuten, daß es für diesen Fall recht viele Lösungen gibt, was in der Tat — nach Scholle — zutrifft. Daß auch im Falle $n = 6$ die Schlagkraft der Springer nur mangelhaft ausgenutzt wird, bemerkten wir schon bei Fig. 15 für die Eckspringer; aus ihr ergaben sich denn auch sogleich eine große Zahl von weiteren Lösungen.

Zu Kap. XI („Rösselsprung").

S. 320, Anm. 2, 2. Zeile: lies „II" statt „I".
S. 336, Zeile 10 v. u.: „ „Fortsetzung" statt „Fortstetzung".
S. 337, „ 12 v. o.: „ „ziemlich" statt „zielich".

Zu der **S. 369, letzte Zeile des Textes,** gegebenen Literatur ist noch eine Notiz von Bouvard (1830; s. Nr. 153 des liter. Index) nachzutragen.

Zu S. 386ff. (§ 15): Mit einer Anzahlbestimmung beschäftigt sich eine Arbeit von A. Geynet resp deren „Appendix". Ich kenne freilich nur den kurzen, in den Pariser Comptes rendus erschienenen Auszug (Nr. 274 des literar. Index), und die Arbeit selbst ist vielleicht gar nicht gedruckt.

S. 387, Zeile 3: Statt „XVIII, XIX" lies: „XVII, XVIII"

Zu S. 387, Anm. 1: Zu den hier zitierten Abhandlungen Fittings hätte bemerkt werden sollen, daß von ihnen für das Rösselsprungproblem im gewöhnlichen Sinne vorwiegend nur die letzte Arbeit, die von 1904, in Betracht kommt, während es sich bei den ersten Abhandlungen um eine wesentlich verallgemeinerte Fassung des Rösselsprungproblems handelt.

S. 392, Zeile 16 v. u.: Statt „Kap XX, § 4" lies: „XIX, § 5."

S. 400, Z. 7 v. u.: Statt n^2 lies n^3

Nachträge zu Bd. II.

Zu **S. 134, Anm. 2:** In Maurus Jókais Roman „Das namenlose Schloß", 2. Bd., 7. Teil, 2. Kap., wird — von dem Vizegespan — die Anekdote erzählt, daß ein englischer Schiffskapitän seine aus 15 Engländern und ebensoviel Irländern bestehende Mannschaft wegen Feigheit in der Schlacht zur Hälfte erschießen lassen mußte und sie nun so aufstellte, daß von der Abzählung nach je 9 gerade die verhaßten Irländer sämtlich getroffen und demzufolge erschossen wurden. Als die bei der Aufstellung der Matrosen befolgte Vorschrift wird der Merkvers „Populeam virgam mater regina tenebat" (vgl. hier S. 148) angegeben.

Zu **Kap. XVI,** insbesondere **S. 170:** Da J. B. Listings (1808—1882) Forschungen und Arbeiten zur Analysis situs in diesem Kapitel mehrfach zitiert sind, so mögen hier noch ein Paar bisher unbekannte Äußerungen von ihm wiedergegeben werden, zumal er darin zugleich von der Anregung, die er Gauß für diese Studien verdankte, spricht. Wie nämlich P. Stäckel in seiner mir erst während der Drucklegung dieses Buches zu Gesicht gekommenen Schrift „C. F Gauß als Geometer" (= Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß, Heft V), Lpz. 1918, p. 74—75, mitzuteilen in der Lage ist, sagt Listing in einem Brief vom 1 April 1836: „Die erste Idee, mich in der Sache [der Geometria situs] zu versuchen, ist mir durch allerlei Vorkommnisse bei den praktischen Arbeiten auf der Sternwarte in Göttingen und durch hingeworfene Äußerungen von Gauß beigekommen", und in einer 20 Jahre später niedergeschriebenen kurzen Autobiographie heißt es: „Einen andern Gegenstand meiner Beschäftigung bildet seit langer Zeit die Untersuchung der modalen (nichtquantitativen) Raumverhältnisse, zu der schon Leibniz die Idee gefaßt hatte. Ich habe zu dieser fast noch ganz unausgebauten quasi-mathematischen Disziplin, zum Teil durch Gauß aufgemuntert, in den Vorstudien zur Topologie, Göttingen 1847, einen ersten Versuch veröffentlicht, dem ich künftig noch andere hoffe folgen lassen zu können"

Zu **S. 215** nebst **Anm. 2** dort Für einen anderen Fall einer einfach zusammenhängenden Karte, nämlich denjenigen von solcher Länderkonfiguration, daß jedes Land mit der äußeren Begrenzung der Karte ein kontinuierliches Linienstück gemein hat, ist anscheinend in der unter Nr. 645 des literarischen Index aufgeführten, mir leider der Sprache

wegen unverständlichen Arbeit von D König gezeigt, daß hier stets drei Farben zu genügen vermögen.

Zu S. 223 nebst **Anm. 2** dort: Herr Prof F. Fitting (M-Gladbach) macht mich darauf aufmerksam, daß der Taitsche Satz, außer in dem Falle einer über alle Punkte des Liniensystems sich erstreckenden Rundreise, jedenfalls auch dann gilt, wenn es möglich ist, die sämtlichen Punkte des Liniensystems, jeden einmal, in insgesamt r getrennten Rundreisen zu durchwandern, und jede dieser r Rundreisen eine gerade Anzahl von Punkten umfaßt. In der Tat braucht man ja nur auf jeder dieser r geschlossenen Bahnen, was wegen der geraden Zahl ihrer Punkte resp. Linien jedenfalls ausführbar ist, die Linien abwechselnd mit je einem und je zwei Strichen zu versehen und gleichzeitig alle auf diesen Rundreisen nicht durchwanderten Linien des Systems dreimal zu stricheln, um so eine Dreiklasseneinteilung der Linien im Sinne des Taitschen Satzes zu erhalten. — Umgekehrt: wenn für ein Liniensystem eine solche Dreiklasseneinteilung der Linien bereits vorliegt, so braucht man ja nur die Linien der einen Klasse sich entfernt zu denken, um r ($r \geqq 1$) geschlossene Bahnen übrig zu behalten, deren jede eine gerade Anzahl von Punkten umfaßt und deren Gesamtheit alle Punkte des Liniensystems, jeden ein- und nur einmal, enthält. Wenn also kein einziger solcher Komplex von r geschlossenen Bahnen, jede mit einer geraden Anzahl von Punkten und alle zusammen die sämtlichen Punkte des Systems je einmal umfassend, möglich ist, vielmehr unter den r Bahnen, wie diese auch gewählt werden mögen, wenigstens eine stets eine ungerade Anzahl von Punkten aufweist, so kann das Liniensystem dem Taitschen Satz nicht unterworfen sein (Fitting) Zu den Liniensystemen dieser Art gehört, wie Herr Fitting bemerkt, das von Petersen als Beispiel angegebene. In der Tat überzeugt man sich unschwer, daß dort zunächst eine über alle 10 Punkte des Systems sich erstreckende Rundreise nicht möglich ist. Eine solche müßte nämlich von den 5 Linien aa', bb', cc', dd', ee', um geschlossen zu sein, 2 oder 4 enthalten; zu diesen Linien würden, wie man leicht sieht, im ersteren Falle je 4 der Seiten der beiden Fünfecke $a\,b\,c\,d\,e$ resp. $a'\,c'\,e'\,b'\,d'$ treten müssen und im anderen Falle deren je drei. In jedem der beiden Fälle ergibt sich dann nach der Struktur des Liniensystems die Unmöglichkeit. Somit kann also nur noch eine Durchwanderung der 10 Punkte in r Rundreisen ($r > 1$) in Frage kommen, jedoch kann dieses r, da Rundreisen über 3 Punkte offenbar nicht möglich sind, auch nicht > 2 sein Es stehen somit nur je zwei Rundreisen in Frage und zwar muß, da auch Rundreisen über 4 Punkte bei der besonderen Struktur des Liniensystems ausgeschlossen sind, jede der beiden Rundreisen 5 Punkte umfassen, d. h. eine ungerade Zahl, womit der gewünschte Beweis erbracht ist — Übrigens teilt Fitting zu dem Petersenschen ein zweites, verwandtes

Beispiel mit, indem er die Fünfecke **Petersens** durch die Neunecke *a b c d e f g h i* und *a' g' i' b' h' d' f' c' e'* ersetzt; das so entstehende Liniensystem von 18 Punkten der Ordnung 1 folge dem Taitschen Satz gleichfalls nicht.

Zu **S. 249, Anm. 1:** Fehlt in dem Puzzle-Spiel nicht die 16, sondern irgendeine Nummer aus der Reihe 1—15, etwa i, weist also der Spielkasten die 15 Steine 1, 2, . . . $i-1$, $i+1$, $i+2$, ... 16 auf und denken wir uns das leere Feld mit einem Stein i ausgefüllt, so besteht mithin jeder „Zug" in einer Vertauschung dieses fingierten Steins i mit einem seiner horizontalen oder vertikalen Nachbarn. Sind nun irgend zwei Stellungen I und II mit beliebiger Lage der leeren Felder gegeben und sollen diese Stellungen auf ihre Überführbarkeit ineinander geprüft werden, so denke man sich zunächst in der Stellung I eine Anzahl (d) von Zügen so ausgeführt, daß die Stellung I übergeht in eine I', die das leere Feld (i) an derselben Stelle des Brettes hat wie Stellung II Alsdann ist dieses d, wenn die leeren Felder von I und II gleichfarbig waren, eine gerade Zahl; im anderen Falle eine ungerade. Im ersteren Falle ändert sich beim Übergang von I zu I' die Inversionenanzahl um eine gerade Zahl (s. S 236, Anm. 1), im letzteren um eine ungerade. Die Stellungen I' und II gehören nun zu derselben oder zu verschiedenen Gruppen, je nachdem die Differenz ihrer Inversionenanzahlen gerade oder aber ungerade ist; denn wegen der Übereinstimmung im leeren Felde kann nur eine gerade Zahl von Zügen I' in II überführen. Damit ist denn die behauptete Verallgemeinerung des Kriteriums III genügend bewiesen (vgl S 244f).

Zu **S. 279/281, Anm. 2:** Wenn ich auch in den Literaturangaben über immerwährende Kalender, wie gesagt, keineswegs Vollständigkeit anzustreben vermag, so sei doch noch eine Stelle aus gelegentlicher Lektüre hier angemerkt: In seinem interessanten Werk „Durch Zentral-Sumatra", Bd I (Berlin 1910), p. 520—522, gibt Alfred Maaß Beschreibung und Abbildung (Tafel XIX) einer Art immerwährender Kalender, wie sie von gebildeten Malayen aufgestellt werden.

Zu **S. 304, Anm. 1.** Erst bei der letzten Korrektur dieses Druckbogens bemerke ich im „Anhang" v. d Leyens (l c p 165) die Angabe, daß ein anderer indischer Autor, Çivadâsa, die uns interessierende Frage so stellt. „Die Mutter bekommt einen Sohn, die Tochter eine Tochter, die beiden Kinder heiraten Und wie ist dann die Verwandtschaft?" Nach unseren Textausführungen erübrigt sich natürlich eine Beantwortung dieser Frage.

Über die „doppelt-periodischen" Lösungen des n-Damen-Problems.

Von G. Pólya in Zürich.

1. Man denke sich das Brett von n^2 Feldern so auf den positiven Quadranten eines rechtwinkligen Koordinatensystems gelegt, daß die Ränder den Koordinatenachsen parallel liegen und die Mittelpunkte aller Felder ganzzahlige, und zwar möglichst kleine, Koordinaten erhalten. In dieser Forderung der Ganzzahligkeit aller Mittelpunktskoordinaten liegt bereits, daß die Seite des quadratischen Brettfeldes entweder selbst als Längeneinheit dient oder aber ein Vielfaches dieser ist; da aber die Koordinaten aller Feldmittelpunkte möglichst kleine ganze Zahlen sein sollen, so kann nur das Erstere statthaben. Unter diesen Festsetzungen haben dann die nächstgelegenen Brettränder von den ihnen parallelen Koordinatenachsen den Abstand $\frac{1}{2}$, und, wenn wir unter x und y die Koordinaten des Mittelpunktes irgendeines Brettfeldes verstehen, so sind dies stets Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$. Das Problem der n Damen verlangt [1]) nun die Ermittlung von n solchen Feldern, deren Mittelpunktskoordinaten

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots (x_n, y_n),$$

den folgenden $2n(n-1)$ Ungleichungen genügen:

$$(1)\qquad x_\mu \gtrless x_\nu, \quad y_\mu \gtrless y_\nu, \quad x_\mu - x_\nu \gtrless y_\mu - y_\nu, \quad x_\mu - x_\nu \gtrless -(y_\mu - y_\nu)$$

für $\mu \gtrless \nu$.

Ich nenne eine Lösung nun „doppelt-periodisch", wenn nicht nur diese Ungleichungen (1), sondern auch die viel mehr fordernden Inkongruenzen

$$(2)\qquad x_\mu \not\equiv x_\nu, \quad y_\mu \not\equiv y_\nu, \quad x_\mu - x_\nu \not\equiv y_\mu - y_\nu, \quad x_\mu - x_\nu \not\equiv -(y_\mu - y_\nu)$$

mod. n erfüllt sind. Die so gearteten Lösungen haben nämlich eine merkwürdige geometrische Bedeutung [2]): Man denke sich nicht nur das Gebiet unseres Brettes, sondern die ganze Ebene mit einem Netz quadratischer Felder der gleichen Größe überzogen und denke sich ferner die

1) Vgl. Bd. I, Kap. IX, besonders S. 213/214 u. 244.
2) Vgl. Bd. I, S. 234—240, insbesondere Fig. 17

soeben angegebene Lösung nach beiden Richtungen hin periodisch wiederholt, d. h man denke sich zugleich mit einem Felde (x_μ, y_μ) auch alle diejenigen Felder (x'_μ, y'_μ) mit Damen besetzt, für die

$$x'_\mu \equiv x_\mu, \quad y'_\mu \equiv y_\mu$$

(mod. n) ist. Das auf diese Weise mit Figuren belegte „unendliche Brett" hat alsdann, infolge der Inkongruenzen (2), folgende Eigenschaft: Grenzt man von dem unendlichen Brett irgendwo ein endliches quadratisches Brett von n^2 Feldern, die Ränder parallel den Koordinatenachsen, ab, so befinden sich auf dem so abgegrenzten Brett genau n Damen, die sich gegenseitig nicht schlagen können, die also eine Lösung des n-Damen-Problems darstellen.

Hiernach bedarf die Bezeichnung „doppelt-periodisch" keiner weiteren Erläuterung.

Mit Rücksicht auf diese Bedeutung unserer besonderen Art von Lösungen ist es von Vorteil, unter $x_1, \ldots x_\mu, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\mu, \ldots y_n$ nicht bestimmte Zahlen, sondern bestimmte Restsysteme mod. n zu verstehen. Entsprechend werde ich den Index μ nicht immer gerade die Zahlen 1, 2, 3, .. n, sondern irgendein vollständiges Restsystem mod n durchlaufen lassen, indem ich folgende Festsetzung treffe: wenn $\mu' \equiv \mu$, so ist auch $x_{\mu'} \equiv x_\mu$, $y_{\mu'} \equiv y_\mu$ mod. n.

Die Betrachtung der doppelt-periodischen Lösungen mod n führt zu einer sehr anschaulichen und reizvollen Interpretation vieler einfacher, aber wichtiger Sätze der Zahlentheorie. Ich glaube daher, es könnte für angehende Studierende der Mathematik von einem gewissen Nutzen sein, die folgenden Auseinandersetzungen an einem Halmabrett oder auf einer karierten Schiefertafel durch Aufstellung oder Zeichnung sich eingehend klar zu machen

2 Der Inhalt der Inkongruenzen (2) kann so ausgesprochen werden. Jede der vier folgenden Zahlenreihen

$$\begin{array}{lcccc} & x_1, & x_2, & x_3, & \ldots\; x_n \\ (3) & y_1, & y_2, & y_3, & \ldots\; y_n \\ & x_1+y_1, & x_2+y_2, & x_3+y_3, & \ldots\; x_n+y_n \\ & x_1-y_1, & x_2-y_2, & x_3-y_3, & \ldots\; x_n-y_n \end{array}$$

soll ein vollständiges Restsystem mod. n repräsentieren Aus dieser Bedingung kann man den Satz ableiten

Doppelt-periodische Lösungen des n-Damen-Problems gibt es dann und nur dann, wenn n weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist.

Ich werde zuerst folgendes beweisen.

Ist n gerade und repräsentieren beide Zahlenreihen

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \\ y_1, y_2, y_3, \ldots y_n \end{array}$$

vollständige Restsysteme mod n, so können die n Zahlen

(4) $$x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3,\ \cdots x_n + y_n$$

kein vollständiges Restsystem mod. n bilden.

In der Tat ist

(5) $$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \equiv \frac{n}{2} \pmod{n},$$

und daher muß auch

$$\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \equiv \frac{n}{2}, \quad \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu \equiv \frac{n}{2}$$

mod. n sein. Daraus folgt aber

$$\sum_{\mu=1}^{n} (x_\mu + y_\mu) \equiv 0,$$

was nach (5) unmöglich wäre, wenn die Zahlen (4) ein vollständiges Restsystem mod. n bildeten. — Dieser Beweis rührt von Euler her.[1])

Ist n teilbar durch 3, so können nicht alle vier Systeme (3) *vollständige Restsysteme mod. n sein.*

In der Tat ist

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

also $$2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \equiv \frac{n}{3} \pmod{n}.$$

Wären nun alle vier Systeme (3) vollständige Restsysteme, so müßten folgende Kongruenzen stattfinden.

$$2\sum_{\mu=1}^{n} (x_\mu + y_\mu)^2 \equiv \frac{n}{3}, \quad 2\sum_{\mu=1}^{n} (x_\mu - y_\mu)^2 \equiv \frac{n}{3}$$

$$4\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu^2 \equiv 2\frac{n}{3}, \quad 4\sum_{\mu=1}^{n} y_\mu^2 \equiv 2\frac{n}{3}$$

Addiert man die ersten beiden Kongruenzen und subtrahiert man davon die beiden letzten, so zeigt sich deutlich die Unverträglichkeit der Annahmen; denn es kommt heraus:

$$0 \equiv -2\frac{n}{3} \pmod{n}.$$

Diesen Beweis verdanke ich Herrn Professor Hurwitz[2])

---

1) Euler, Commentationes arithmeticae, Bd. II, S. 309 Vgl. die Übungsaufgabe 1417 in Nouvelles Annales des Mathématiques, Bd I, 3te Folge (1882), S 384 von Herrn Hurwitz, deren Lösung auf die eben dargelegte Bemerkung zurückgeführt werden kann.

2) Es besteht der allgemeinere Satz: Ist p der kleinste Primteiler von n, so gibt es zwar solche vollständige Restsysteme x_μ, y_μ, daß

Es bleibt noch zu zeigen, daß es andererseits doppelt-periodische Lösungen stets gibt, wenn n weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist. In diesem Falle lassen sich immer ganze Zahlen r von der Art angeben, daß die drei Zahlen $r-1$, r und $r+1$ zu n relativ prim sind; z. B. kann man $r=2$ oder $r=3$ annehmen. Wählt man einen beliebigen festen Wert a, und setzt man

$$x_\mu \equiv \mu, \quad y_\mu \equiv a + \mu r,$$

so nehmen die vier Systeme (3) die Form

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots & n \\ a+r, & a+2r, & a+3r, & .. & a+nr \\ a+r+1, & a+2(r+1), & a+3(r+1), & \ldots & a+n(r+1) \\ -a-(r-1), & -a-2(r-1), & -a-3(r-1), & \ldots & -a-n(r-1) \end{array}$$

an. Alle vier Systeme bilden also arithmetische Reihen, deren Differenzen, nämlich bzw. 1, r, $r+1$, $-(r-1)$, zu n teilerfremd sind. Es wird genügen, etwa von der zweiten Reihe zu zeigen, daß die n darin enthaltenen Zahlen mod. n inkongruent sind. Wäre nämlich

$$a + r\mu \equiv a + r\nu \pmod{n},$$

so folgte

$$r(\mu - \nu) \equiv 0 \pmod{n}$$

$$\mu - \nu \equiv 0 \pmod{n}$$

In der Reihe gibt es aber nicht zwei voneinander verschiedene Glieder $a+r\mu$ und $a+r\nu$, fur welche $\mu \equiv \nu$ wäre — Diese doppelt-periodischen Lösungen sind schon in Bd. I nach Lucas gegeben worden [1])

3. Es ware nun irrtümlich zu glauben, daß alle doppelt-periodischen Losungen eine solche einfache Anordnung nach einer arithmetischen Reihe zeigen müssen Beispielsweise ist die folgende Lösung für $n = 13$:

$$\begin{array}{l} x \equiv 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13 \\ y \equiv 1\ \ 7,\ 11,\ 3,\ 8,\ 13,\ 5,\ 10,\ 2,\ 6,\ 12,\ 9,\ \ 4 \end{array} \pmod{13},$$

wie man sich leicht durch die Bildung der Systeme (3) uberzeugt, doppelt-periodisch, ohne daß jedoch die Koordinatenwerte nach einer arithmetischen Reihe foitschreiten.

Dabei möchte ich noch besonders hervorheben, daß 13 eine Primzahl ist Wenn n namlich eine zusammengesetzte (zu 2 und 3 teilerfremde) Zahl ist, so kann man eine große Anzahl doppelt-periodischer Lösungen angeben, die nicht nach einfachen arithmetischen Reihen fortschreiten, wie ich sofort erlautern will.

$x_\mu + y_\mu$, $x_\mu + 2y_\mu$, ... $x_\mu + (p-2)y_\mu$ ebenfalls vollständige Restsysteme sind, aber keine solchen, daß überdies auch noch $x_\mu + (p-1)y_\mu$ ein vollständiges Restsystem ist ($\mu = 1, 2, . \ \ n$)

1) Siehe dort S. 247—248. Vgl. auch Euler, a a O S 320—325.

Zu dem Ende betrachte ich jetzt an Stelle unseres sonstigen Brettes von n^2 Feldern ein solches von $(mn)^2$ Feldern, wo weder m noch n durch 2 oder durch 3 teilbar sein sollen. Es seien r und s so gewählt, daß

$$r-1,\ r,\ r+1 \text{ teilerfremd zu } m$$

und

$$s-1,\ s,\ s+1 \text{ teilerfremd zu } n$$

ist. Es seien ferner a und

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots\ s_n$$

bestimmte Zahlen von der Art, daß

$$s_\nu \equiv a + s\nu \pmod{n} \tag{6}$$

wird. Ich definiere ferner.

$$s_{\nu'} = s_\nu, \quad \text{falls} \quad \nu' \equiv \nu \pmod{n} \tag{7}$$

Endlich sei noch eine Zahl b beliebig, aber fest gewählt

Ich setze nun

$$x_{n\mu+\nu} \equiv n\mu + \nu \pmod{mn}, \quad y_{n\mu+\nu} \equiv nr\mu + s_\nu + b \pmod{mn}$$

und behaupte, daß $(x_{n\mu+\nu}, y_{n\mu+\nu})$ eine doppelt-periodische Lösung des Problems der mn Damen ergibt, wenn μ ein bestimmtes vollständiges Restsystem mod. m und ν ein ebensolches mod. n durchläuft.

In der Tat erhält man auf diese Weise mn Restepaare

$$(x_{n\mu+\nu}, y_{n\mu+\nu}),$$

und es ist nur zu zeigen, daß die den Systemen (3) analogen vier Systeme, deren jedes jetzt mn Glieder enthält, vollständige Restsysteme mod mn bilden. Letzteres ergibt sich beispielsweise für das zweite System so· Ist

$$y_{n\mu'+\nu'} \equiv y_{n\mu+\nu} \pmod{mn} \tag{8}$$

oder, was dasselbe,

$$nr\mu' + s_{\nu'} + b \equiv nr\mu + s_\nu + b \pmod{mn}, \tag{9}$$

so folgt daraus

$$s_{\nu'} \equiv s_\nu \pmod{n},$$

also nach (6)

$$s\nu' \equiv s\nu \pmod{n}$$

$$\nu' \equiv \nu \pmod{n}. \tag{10}$$

Dann ist aber nach (7)

$$s_{\nu'} = s_\nu,$$

und, wenn man dies in (9) einsetzt, so erhält man:

$$nr\mu' \equiv nr\mu \pmod{mn}$$

$$r\mu' \equiv r\mu \pmod{m}$$

$$\mu' \equiv \mu \pmod{m} \tag{11}$$

Das Ergebnis der Analyse ist mithin: Die Kongruenz (8) kann nur unter den beiden Bedingungen (10) und (11) bestehen, w z. b. w.

Die Konstruktion, deren Richtigkeit soeben bewiesen wurde, mag auch durch ein Beispiel erläutert werden. Die kleinsten Zahlen, die hier, als weder durch 2 noch durch 3 teilbar, in Betracht kommen, sind: $m = 5$, $n = 5$. Ich wähle ferner

$$r = 3 \qquad s = 2$$
$$b = 5 \qquad a = 2$$

Dann ist

$$s_\nu \equiv 2 + 2\nu \pmod{5},$$

aber dadurch sind die s_ν noch nicht völlig festgelegt. Ich darf daher für ein erstes Beispiel (Fig. 1)

$$s_1 = 4, \quad s_2 = 6, \quad s_3 = 8, \quad s_4 = 10, \quad s_5 = 12$$

und für ein zweites (Fig. 2)

$$s_1 = 4, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 3, \quad s_4 = 5, \quad s_5 = 2$$

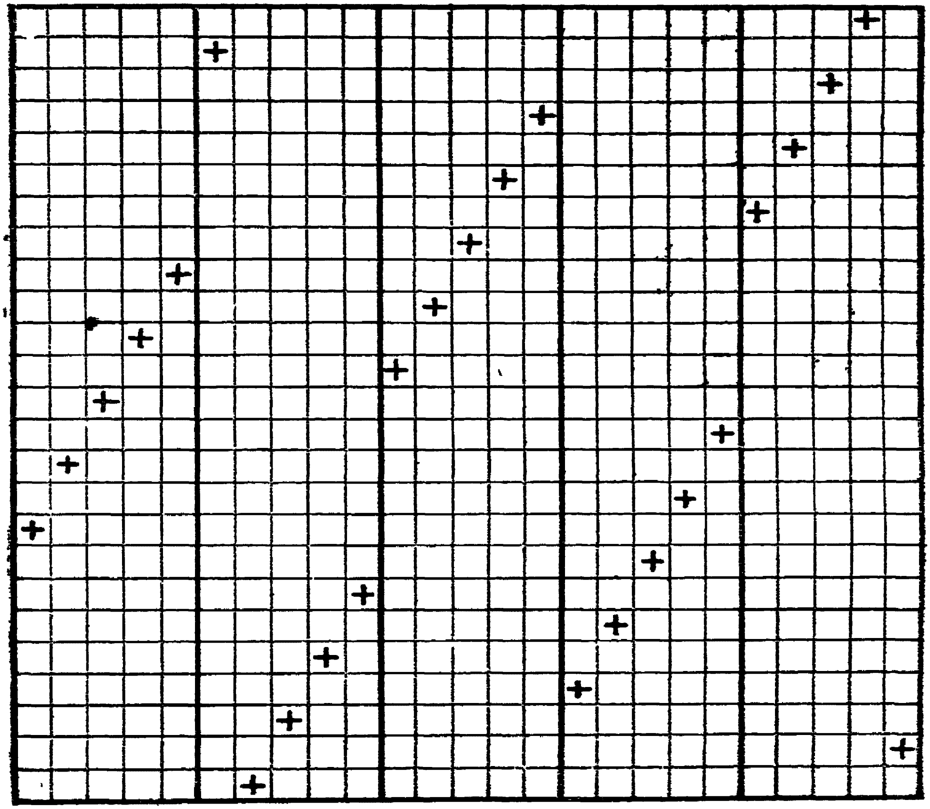


Fig 1

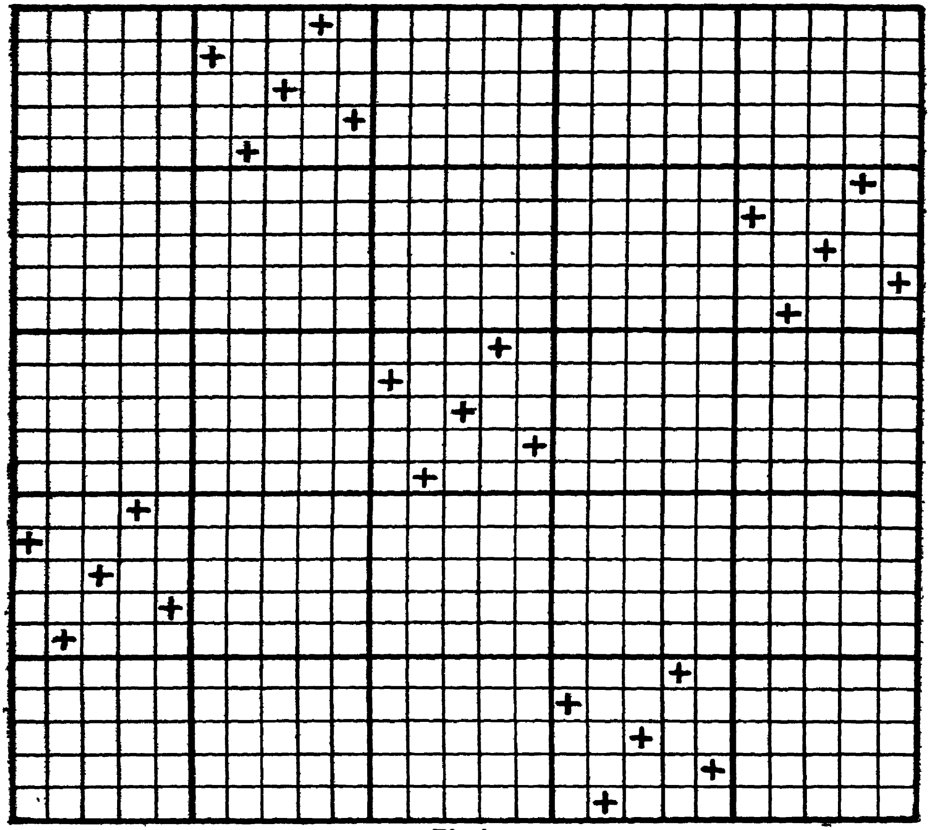


Fig 2.

wählen. Grenzt man vom unendlichen Brett ein quadratisches Brett von 25^2 Feldern durch die Ungleichungen

$$1 \leqq x_{5\mu+\nu} \leqq 25, \qquad 1 \leqq y_{5\mu+\nu} \leqq 25$$

ab, so erhält man Fig. 1 und Fig. 2. — Offenbar kann man für Zahlen, die aus 3 oder mehr Faktoren zusammengesetzt sind, noch mehr zusammengesetzte Aufstellungen finden

4. In Bd. I ist eine ausführliche Besprechung den „doppelt-symmetrischen" Lösungen [1]) gewidmet, d h. denjenigen Lösungen, die bei einer Drehung des Brettes um einen rechten Winkel in sich selbst übergehen. Wie dort gezeigt wurde, ist zur Existenz solcher Lösungen erforderlich, daß n von der Form $4m$ oder von der Form $4m+1$ ist.

Es ist wohl nicht ohne Interesse, zu untersuchen [2]), ob es doppelt-

1) Siehe S. 221—224 und S 249—258.

2) Vgl. Encyklopädie d. math. Wissensch. Bd. I 2, S 1083 in dem Referat über Mathematische Spiele von W. Ahrens

symmetrische Lösungen auch für größeres n gibt. Ich werde folgendes zeigen:

Ist nicht nur die Zahl n selbst, sondern sind auch alle ihre Primfaktoren von der Form $4m+1$, so hat das Problem der n Damen Lösungen, die zugleich doppelt-symmetrisch und doppelt-periodisch sind.

Sind alle Primfaktoren von n von der Form $4m+1$, so gibt es bekanntlich[1]) Zahlen r von der Eigenschaft, daß

$$r^2 \equiv -1 \pmod{n}. \tag{12}$$

Wie man sieht, ist r notwendig teilerfremd zu n. Aus

$$(r-1)(r+1) \equiv r^2 - 1 \equiv -2 \pmod{n}$$

geht ferner hervor, daß auch $r-1$ und $r+1$ zu n teilerfremd sind. Ich setze nun

$$x_\nu \equiv \nu, \quad y_\nu \equiv r\nu \pmod{n}. \tag{13}$$

Wenn ν ein vollständiges Restsystem mod n durchläuft, so stellt (13), wie unter 2 dargelegt wurde, eine doppelt-periodische Lösung des n-Damen-Problems dar.

Zugleich mit ν durchläuft auch $r\nu$ ein vollständiges Restsystem mod. n. Nach (12) und (13) ist

$$x_{r\nu} \equiv r\nu \equiv y_\nu, \quad y_{r\nu} \equiv r^2\nu \equiv -x_\nu \pmod{n}.$$

Das bedeutet aber, daß bei einer Drehung um 90° im Uhrzeigersinne die zu (x_ν, y_ν) kongruenten Punkte in die Punkte übergehn, die zu $(x_{r\nu}, y_{r\nu})$ kongruent sind, d. h. daß bei einer solchen Drehung des ganzen unendlichen Brettes die doppelt-periodische Lösung (13) in sich selbst übergeht. Grenzt man von dem unendlichen Brett durch die Ungleichungen

$$-\frac{n-1}{2} \leqq x_\nu \leqq \frac{n-1}{2}, \qquad -\frac{n-1}{2} \leqq y_\nu \leqq \frac{n-1}{2}$$

ein endliches Brett von n^2 Feldern, mit dem Punkte (0, 0) als Mittelpunkt, ab, so gehn die darauf befindlichen n Figuren durch die besagte Drehung in sich über, w. z. b. w.

Der Leser findet die eben gefundene Lösung für $n=5$ und für $n=13$ im Bd. I figürlich dargestellt: Fig. 7, S 216 resp Fig 23, S. 258. An diesen Aufstellungen ist folgendes zu beobachten: Es gibt 4 Königinnen, die von der im Mittelpunkte (0, 0) des Brettes stehenden Königin möglichst kleinen Abstand haben. Sind a und b die beiden Koordinaten des Feldes, das von irgendeiner dieser 4 Königinnen besetzt ist, so ist

$$n = a^2 + b^2, \tag{14}$$

1) Vgl. etwa Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie, 4te Auflage, S 90—91.

wo die beiden Zahlen a und b untereinander und zu n teilerfremd sind. Ähnliches Verhalten ist in den nächsten Fällen $n = 17$, 25 zu beobachten, und dies dient dazu, diese zierlichen Aufstellungen möglichst rasch zu finden.

Das hier Beobachtete ist nun allgemein gültig. Um dies einzusehen und um überhaupt die zahlentheoretische Bedeutung dieser Aufstellungen zu erkennen, sind freilich etwas eingehendere Kenntnisse nötig.[1])

Die Kongruenz (12) ist gleichbedeutend mit einer Gleichung

$$r^2 = -1 + mn,$$

worin m eine ganze Zahl bedeutet. Die quadratische Form

$$nx^2 + 2rxy + my^2$$

hat die Determinante $r^2 - mn = -1$, und muß folglich mit der einzigen reduzierten Form $x^2 + y^2$ von der Determinante -1 äquivalent sein. Das bedeutet, daß es 4 Zahlen a, b, α, β von der Art gibt, daß

$$a\beta - b\alpha = 1 \tag{15}$$

$$(ax + \alpha y)^2 + (bx + \beta y)^2 = nx^2 + 2rxy + my^2. \tag{16}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten in (16) erhält man

$$a^2 + b^2 = n$$
$$a\alpha + b\beta = r$$

und diese beiden letzten Gleichungen ergeben, mit (15) kombiniert:

$$\begin{aligned} ar &= a^2\alpha + ba\beta \\ &= a^2\alpha + b(b\alpha + 1) \\ &= n\alpha + b \\ ar &\equiv b \pmod{n}. \end{aligned}$$

Also ergibt die Lösung (13) für $v \equiv a$, $x_a \equiv a$, $y_a \equiv ra \equiv b$ wirklich eine Zerlegung von der Art (14).

Betrachtet man unser unendliches Brett als die komplexe Zahlenebene, so sind die Mittelpunkte der verschiedenen Felder die Gaußschen ganzen Zahlen.[2]) Beachtet man, daß zugleich mit v auch av ein vollständiges Restsystem mod n durchläuft, so kann unsere Losung auch in der Form

$$\begin{aligned} x_{av} + iy_{av} &\equiv av(1 + ir) \pmod{n} \\ &\equiv v(a + ib) \pmod{(a + ib)(a - ib)} \\ &\equiv 0 \pmod{a + ib} \end{aligned} \tag{13'}$$

dargestellt werden. Die Lösung (13) wird also erhalten, wenn alle diejenigen Felder des unendlichen Brettes mit Figuren belegt werden, deren

1) Vgl. etwa Dirichlet-Dedekind a. a. O. S. 164—166.
2) Vgl etwa Dirichlet-Dedekind a. a. O S. 434 ff

Mittelpunkte komplexe Vielfache der Gaußschen ganzen Zahl $a+bi$ sind, wo a und b teilerfremd sind und $(a+bi)(a-bi)=n$ ist. Dieses Punktsystem ist in lauter Quadraten von der Fläche $n=a^2+b^2$ angeordnet, und so erhellt, daß das an den Beispielen $n=5, 13, 17, 25$ beobachtete Verhalten allgemein zutrifft.

5. Das Vorangehende gibt zu verschiedenen Bemerkungen Anlaß, die auch die nicht-doppelt-periodischen Lösungen des n-Damen-Problems betreffen. Ich will mich hierbei jedoch kurz fassen, weil diese Bemerkungen kein zahlentheoretisches Interesse darbieten, zu keinem abschließenden Resultat führten und auch darum, weil eine ausführliche Darstellung zu langwierig ausfallen würde.

Die Fig. 2 legt uns die Lösung folgender Aufgabe nahe:

Aus einer beliebigen Lösung des m-Königinnen-Problems und aus einer doppelt-periodischen Lösung des n-Königinnen-Problems eine Lösung des mn-Königinnen-Problems zu konstruieren. — Die Konstruktion wird folgendermaßen ausgeführt: Man teile jedes Feld des Brettes von m^2 Feldern in n^2 gleiche Quadrate. War das betreffende Feld am Brett von m^2 Feldern unbelegt, so bleiben alle n^2 daraus entstandenen Felder ebenfalls unbelegt; war jenes hingegen belegt, so stellt man auf die n^2 daraus entstandenen Felder die gegebene doppelt-periodische Lösung des n-Königinnen-Problems auf, so daß letztere auf dem entstandenen Brett von mn Horizontal- und Vertikalreihen genau m-mal aufgestellt wird. Daß die so verteilten mn Königinnen keinen Turmangriff aufeinander ausüben können, ist klar Daß sie auch keinen Läuferangriff vollführen, kann man so einsehen: Verschiebt man zugleich die n zusammengehörigen Königinnen, die aus der Belegung eines und desselben Feldes auf dem Brett von m Reihen stammen, in einer Diagonalrichtung um n oder $2n$ oder $3n$. Felder, so kann zwar die verschobene doppelt-periodische Lösung für n neben eine andere doppelt-periodische Lösung gelangen, aber nie damit zusammenfallen, da wir doch von einer richtigen Lösung des m-Damen-Problems ausgegangen sind. Nun folgt leicht aus dem Begriff der doppelt-periodischen Lösung (vgl. unter 1), daß die $2n$ Königinnen, die an zwei angrenzenden Brettern von n^2 Feldern genau nach derselben doppelt-periodischen Lösung aufgestellt sind, einander als Läufer nicht angreifen können (wohl werden je zwei auf verschiedenen Brettern stehende Königinnen sich aus der Entfernung n als Türme angreifen). Wenn sich aber die Königinnen nach einer solchen Verschiebung um n oder $2n$ oder $3n$. Felder in der Diagonalrichtung noch immer nicht als Läufer angreifen können, so konnten sie das vor der Verschiebung um so weniger, w. z. b. w.

Die Drehung des unendlichen Brettes, die wir unter 4 betrachteten, gibt zu folgender Bemerkung Anlaß: Werden aus der Lösung (13) $n-1$ Figuren durch die Ungleichungen

$$(17) \qquad 1 \leqq x_\nu \leqq n-1\,, \quad 1 \leqq y_\nu \leqq n-1$$

isoliert, so bilden sie eine Lösung für das Brett von $(n-1)^2$ Feldern. Wird dann die Figur an dem Feld (0, 0) hinzugefügt, so bilden sie noch immer eine Lösung und zwar natürlich auf einem Brett von n^2 Feldern. Die Lösung (17) ist identisch mit der Lösung

$$(18) \qquad -n+1 \leqq x_\nu \leqq -1\,, \quad 1 \leqq y_\nu \leqq n-1\,,$$

da doch das unendliche Brett doppelt-periodisch besetzt wurde. Durch die Drehung des unendlichen Brettes um einen rechten Winkel im Uhrzeigersinne kommen aber die $n-1$ Figuren (18) mit denen in (17) zur Deckung. Man kann also, in veränderter Bezeichnung, folgendes aussagen:

Sind alle Primfaktoren von $n+1$ von der Form $4m+1$, so hat das n-Königinnen-Problem sicherlich doppelt-symmetrische Lösungen.

Als Beispiel diene die besonders einfache Aufstellung für $n = 16$ in Bd. I.

Die unter 4 angegebene Konstruktion liefert für den Fall $n = 9$ keine doppelt-symmetrische Lösung Denn die Zahl $9 = 3 \cdot 3$ ist zwar von der Form $4m+1$, jedoch ist sie nicht aus Primfaktoren von derselben Form zusammengesetzt. Aus demselben Grunde gibt die eben dargelegte Methode für $n = 8 = 9 - 1$ keine doppelt-symmetrische Lösung. Dies erklärt gewissermaßen die in Kap. IX erwähnte Tatsache, daß es für $n = 8$ und $n = 9$ überhaupt keine doppelt-symmetrischen Lösungen gibt

Literarischer Index.

Die Schriften sind chronologisch geordnet, jedoch sind einige Schriften, die mit einer anderen eng zusammenhängen, unter der gleichen Nummer wie jene und mit dem Zusatz a resp. b aufgeführt; eine nachträglich eingeschobene Schrift hat die Nummer der vorhergehenden mit dem Exponenten 1 erhalten. Im übrigen s. über den Index das Vorwort dieses Bandes, S. V—VII.

Ältere Schriften.

1. (Alcuin?). „Propositiones ad acuendos iuvenes“ Beati Flacci Albini seu Alcuini Abbatis, Caroli Magni . . . . Magistri Opera, ed. Frobenius, Tomi secundi volumen secundum, Ratisbonae 1777, p 440—448 = Patrologia latina (J. P Migne), t. 101, Paris 1863, col. 1143—1160 — Über die Autorschaft Alcuins s. M. Cantor, „Gesch. d. Mathem.“ I, 3. Aufl. 1907, p. 334ff ; das Werk ist auch Beda — fälschlich (s. „Venerabilis Bedae opera quae supersunt omnia“, London 1843, Bd. VI, Vorrede, p. XIII/XIV) — zugeschrieben und in der Kölner Ausgabe seiner Opera (1612), col. 100ff. abgedruckt.

2. Leonardo Pisano „Liber Abaci“ Scritti, pubblicati da Baldassare Boncompagni, I, Rom 1857

3. Annales Stadenses Auctore Alberto (ca 1250). Herausg von J M. Lappenberg in den Monumenta Germaniae historica (G. H Pertz), Scriptorum t 16, Hannover 1859, p. 271—359.

4. Moschopulos, Manuel Traktat über magische Quadrate (14 Jahrh.). Herausg. 1) nach einer Münchener Handschrift von S Günther in seinen „Verm. Untersuchungen“ (Nr 333 dieses Index), 1876, p. 195—203 (s. dazu auch Nr. 333ª dieses Index);

2) nach einer Pariser Handschrift, nebst französ. Übersetzung, von Paul Tannery, 1886 (Nr 449 dieses Index; s. a. Nr 430).

5. (Chuquet?) „Appendice au Triparty en la science des nombres de Nicolas Chuquet“. 1484. Publié par Aristide Marre, Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche *14*. 1881, p. 413—460.

16. Jahrhundert.

6. Riese, Adam. „Rechenbüchlein, Auff der Linien und Federn, in allerley Handthierung, Geschefften und Kauffmanschafften gestellet. Auffs newe durchlesen und fleissig corrigiret." (Das so betitelte, von mir eingesehene Exemplar der Landesbibliothek zu Wiesbaden gibt im „Beschluss" des Buches, Seite 185, selbst an: „Geben am Freytag nach Michaelis, im Jahr 1522", worauf noch einige Seiten — S. 185—191 — folgen. Ob wir es hier wirklich mit einem Exemplar der Ausgabe von 1522 oder mit einer auf Grund jener Ausgabe veranstalteten späteren Ausgabe zu tun haben, erscheint aus verschiedenen Gründen, insbesondere auch nach einem späteren gelegentlichen Hinweise Rieses auf die Ausgabe von 1522, einigermaßen zweifelhaft). — Zahlreiche weitere Ausgaben, z. B.: 1527, 1529, 1532, 1533, 1550, sowie, herausg. von Erh. Helm: 1544, 1578, 1581. — Siehe auch Nr. 12 dieses Index.

7. „Sensuit jeux, partis des eschez, composez nouvellement pour recreer tous nobles cueurs et pour eviter oysivete a ceulx qui ont voulente, desir et affection de le scavoir et apprendre et est appelle ce Livre le jeu des Princes et Damoiselles." Paris gegen 1530. Vgl. a. Nr. 195 dieses Index.

8. Agrippa von Nettesheim, Henricus Cornelius. „De occulta philosophia libri tres" Köln 1533. — Zahlreiche weitere Ausgaben, darunter solche mit einem „vierten", dem Agrippa untergeschobenen Buche der „Occulta Philosophia". Auch Übersetzungen: ins Englische (1651), ins Französische (1727), ins Deutsche (1855 Stuttgart, neuer Facsimiledruck hiervon: 1916 Berlin). Über die teilweise unklare Bibliographie der Schriften Agrippas siehe außer bibliographischen Werken (Brunet, Grässe usw): Karl Kiesewetter, „Gesch. des neueren Occultismus", 2. Aufl., besorgt von Rob. Blum (Lpz 1909), p 4/5; vgl. a. Fritz Mauthners „Einleitung" zu seiner deutschen Ausgabe von Agrippas Werk „Die Eitelkeit und Unsicherheit der Wissenschaften" (München 1913), I, p. XXXVII. — Die erste Ausgabe der „Occulta Philos", von 1531, — ich sah das Exemplar der Hamburger Stadtbibl. — enthält zwar vorn den Index aller drei Bücher, vom Text aber nur das erste, hier nicht in Betracht kommende Buch.

9. Gemma Frisius. „Arithmeticae practicae methodus facilis". Wittenberg 1544. 1548.

10. Stifel, Michael. „Arithmetica integra." Nürnberg 1544 Das Handexemplar Michael Stifels, mit vielen handschriftlichen Eintragungen von ihm versehen, befindet sich in der Hamburger Stadtbibliothek (D. A 143. 4°); vgl. a. Edmund Hoppe, „Michael Stifels handschriftlicher Nachlaß", Mitteil. der Mathem. Gesellsch. in Hamburg, Bd. III, Heft 10, 1900 — Vgl. Nr. 359 und Nr 536 dieses Index.

11. Cardan, Hieronymus (1501—1576). „Opera". Lyon 1663 (10 Bde.). T. III, IV.

12. Riese, Adam. „Rechenung nach der lenge, auff den Linihen und Feder." Leipzig 1550.

13. Tartaglia, Niccolò. „General Trattato di numeri, et misure." Venedig 1556.

14. Spinula, Franciscus. „De intercalandi ratione corrigenda, et de tabellis quadratorum numerorum, a Pythagoreis dispositorum διακόσμησις." Venedig 1562.

15. Jacob, Simon — von Coburg. „Ein New und Wolgegründt Rechenbuch auff den Linien und Ziffern." Frankfurt a. M. 1565. 4°. Weitere Ausgabe von 1612. 4°. Über die Oktavausgabe s Kap. XV, S. 133, Anm. 2.

16. Fulco, Th. „Ludus geometricus." London 1578

17. Gianutio della Mantia, Horatio. „Libro nel quale si tratta della maniera di giuocar' à scacchi, con alcuni sottilissimi partiti." Turin 1597.

18. Monanteuil. „Ludus astromathematicus." Paris 1597.

17. Jahrhundert.

19. Roth, Peter. „Arithmetica Philosophica, Oder schöne newe wolgegründte überauss künstliche Rechnung der Coss oder Algebrae" Nürnberg 1608.

20. Henisch, Georg. „Arithmetica perfecta et demonstrata." Augsburg 1609.

21. Petzoldt. „Künstl arithm. Quaestiones." Nürnberg 1609

22. Bachet de Méziriac, Claude Gaspard „Problemes plaisans et delectables, qui se font par les nombres." Lyon 1612, 2 Ausg Lyon 1624 Weitere Ausgaben, besorgt von A Labosne, Paris 1874, 1879, 1884; neue verkürzte Ausg. 1905 (uber die Numerierung der Auflagen s. Jahrb ub. d Fortschr der Mathem *36*, 1905, p. 300)

23. Remmelin, Johann. „Adyta Numeri reclusa, Das ist: Eroffnung grofser Geheimnussen . . ." Kempten 1619

24. Leurechon, Jean „Récréation mathématique" etc. Pont-à-Mousson 1624, erschienen unter dem Namen eines Neffen und Schülers des Verfassers: H. Van Netten oder auch Van Etten. Zahlreiche weitere Ausgaben von Pont-à-Mousson, Paris, Rouen usw., 1626, 1627, 1628, 1629, 1630 usw ; s. darüber a. die „Bibliothèque de la Compagnie de Jésus", herausg. von C. Sommervogel, t. IV, 1893, col 1756—1758 Weitere Ausgaben veranstaltete von 1627 an Denis Henrion, s a das Werk von Claude Mydorge (nächste Nr. dieses Index). Übersetzungen ins Holländische (Wynant van Westen) und ins Englische (W. Ough-

tred) s. unter Nr. 28 und 33 dieses Index; s. a. unter Ens, Caspar (Nr. 30 des Index). Siehe ferner Nr. 314 dieses Index.

25. Mydorge, Claude. „Examen du livre des récréations mathématiques" [des vorstehenden Leurechonschen Werkes]. Paris 1630. Weitere Ausgaben, z. B. von 1634, 1638, 1639, 1649, 1743. — Das Werk ist ein Abdruck des Leurechonschen Werkes mit Bemerkungen dazu; über den Autor dieser Bemerkungen s. G. Eneström, Bibl. mathem. (3) *14*, 1914, p. 253—258.

26. Schwenter, Daniel. „Deliciae physico-mathematicae oder mathemat. und philosophische Erquickstunden." Nürnberg 1636; unveränderter Wiederabdruck 1651, dem Georg Philipp Harsdörffer zwei weitere Bände (II, 1651; III, 1653) hinzufügte, diese unverändert wiederabgedruckt 1677 resp. 1692. — Caspar Schott, „Mechanica hydraulico-pneumatica", 1657, Praeloquium ad lectorem, p. 12, hatte das Werk Schwenters als eine deutsche Übersetzung des Leurechonschen Werkes (Nr. 24 unseres Index) bezeichnet und die „Bibliothèque de la Compagnie de Jésus" übernimmt diese Angabe; siehe jedoch die ausführliche Darstellung des Sachverhalts bei M. Cantor, „Gesch. der Mathem.", II (2. Aufl.), p. 769.

27. Lettres de Frénicle de Bessy et de Fermat à Mersenne sur les carrés magiques. 1640. Oeuvres de Fermat, II, Correspondance (Paris 1894), p. 182—197. Vgl. dazu Nouv. Corr. mathém. 1, 1874—75 (Mons 1874), p. 210· Question 65; sowie Nr. 339 dieses Index. — Siehe a. eventuell E. Brassinne, „Précis des Oeuvres mathématiques de P. Fermat et de l'Arithmétique de Diophante" (Paris 1853), p. 146—149. — Vgl. eventuell auch Nr. 634 dieses Index.

28. Wynant van Westen. „Mathematische Vermaecklyckheden" (Übersetzung des Leurechonschen Werkes, Nr. 24 dieses Index) Arnhem 1644. — 4. Aufl. ebda. 1663. Auch eine französ Ausgabe (Nimwegen 1636) wird angegeben

29. Mersenne, Marin. „Novarum observationum physico-mathematicarum tomus tertius." Paris 1647 Cap XXIV.

30. Ens, Caspar. „Thaumaturgus mathematicus" etc. Köln 1651 und weitere Ausgaben, von denen die erste (1628) nur eine Übersetzung des Leurechonschen Werkes (Nr. 24 unseres Index) sein soll („Bibliothèque de la Compagnie de Jésus", t IV, 1893, col. 1760).

31. Kircher, Athanasius „Oedipus Aegyptiacus" Classis VII (Tomi secundi Pars altera). Rom 1653. — Magische Quadrate; im wesentlichen dasselbe wie in der Schrift Nr. 36 dess Verfassers.

32. Leake „Mathematical Recreations" London 1653

33. Oughtred, William „Mathematical Recreations" lately compiled by Henry van Etten. London 1653, 1667, 1674. Vgl Nr. 24 dieses Index. In der „Bibliothèque de la Compagnie de Jésus", t IV,

1893, col. 1759/60, ist — ohne Angabe Oughtreds resp. eines anderen Übersetzers — eine Ausgabe von 1633 aufgeführt.

34. Schott, Caspar. „Magia universalis." 1657.

35. Schott, Caspar. „Technica curiosa, sive mirabilia artis" Nürnberg 1664.

36. Kircher, Athanasius. „Arithmologia sive de abditis Numerorum mysteriis." Rom 1665. Siehe a. die Bemerkung zu Nr. 31.

37. Mohr, Johann. „Arithmetischer Lustgarten." Schleswig 1665.

38. (Arnauld, Antoine.) „Nouveaux Elemens de Geometrie. (Par M. M. de Port-Royal)". 2e éd. La Haye 1690 (1. Ausg. von 1667), p. 461 bis 480: „Solution d'un ... probleme ... appellé ... les quarrez magiques" = Oeuvres d'Arnauld, t. 42, Paris 1781, p. 343—356. Wiederabgedruckt und diskutiert bei Karl Bopp, „Antoine Arnauld, der große Arnauld, als Mathematiker." Abh. zur Gesch. der mathem. Wissenschaften *14*, 1902, p. 187—338.

39. Caramuel y Lobkowitz, Johann. „Mathesis biceps vetus et nova." Campaniae 1670.

40. Weigel, Erhard. „Tetractys, summum tum Arithmeticae tum Philosophiae discursivae compendium, artis magnae sciendi genuina radix." Jena 1673.

41. (Christian Knorr von Rosenroth). „Kabbala denudata seu doctrina Hebraeorum transcendentalis et metaphysica atque theologica." Sulzbach 1677

42. Schott, Caspar. „Joco-seriorum naturae et artis, sive magiae naturalis, centuriae tres." Bamberg 1677

43. Kochanski, Adam Adamandus. „Considerationes quaedam circa Quadrata et Cubos Magicos, nec non aliquot Problemata, omnibus Arithmophilis ad investigandum proposita." Acta Eruditorum 1686, p 391—395.

44. Casalicchio, Carlo „L'utile col dolce, overo quattro centurie di Argutissimi Detti, e Fatti di Savissimi Huomini" Napoli 1687; Venezia 1723 Deutsche Ausgabe Augsburg 1706

45. „Schau-Platz der Betrieger: Entworffen in vielen List- und Lustigen Welt-Händeln" Hamburg und Frankfurt 1687

46. Prestet, Jean. „Nouveaus Elemens des Mathématiques" I, II Paris 1695 (3e éd.). Erste Ausgabe wird von 1689 angegeben

47. Tylkowski, Adalbert „Arithmeticae curiosae, editio secunda, correctior et copiosior" Oliva 1690 (Erste Ausgabe mir unbekannt).

48. Ozanam, Jacques. „Dictionnaire mathematique, ou idée generale des Mathematiques." Paris 1690, Amsterdam 1691.

49. Loubère, S de la „Du Royaume de Siam" Amsterdam 1691, t. II, p. 235—288: „Le Probleme des Quarrés Magiques selon les Indiens"; Ausgabe Paris 1691, p. 295—359. — In der deutschen Übersetzung, Nürnberg 1800, fehlt der Abschnitt über die magischen Quadrate.

50. Frenicle de Bessy, B. „Des carrés magiques", publ. par Ph. de la Hire. Divers ouvrages de mathém. et de physique. Par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences (de Paris) 1693, p. 423—507 = Mémoires de l'Académie des Sciences 1666—1699, t. V, Paris 1729, Ouvrages de Mr. Frenicle, p. 207—374 (unrichtige Paginierung: auf Seite 312 folgt sofort 333). — Angeblich nochmals abgedruckt in der Ausgabe: „Résolution des quatre principaux problèmes d'Architecture par M. Blondel et ouvrages de Mathématique de M. Frénicle." Amsterdam 1736.

51. Scharff, Michael. „Arithmetica joco-seria." Hamburg 1693.

52. Ozanam, Jacques. „Récréations mathématiques." I, II. Paris 1694. Zahlreiche weitere Ausgaben, und zwar späterhin (1696) unter dem Titel: „Récréations mathématiques et physiques"; von 1720, 1723, 1724 oder 1725 ab — die Angaben schwanken in der bibliographischen Literatur — vierbändig (Bd. I stets der vorwiegend mathem. Teil), herausgegeben von Grandin; später herausg. von J. F. de Montucla (resp. Mons de M. . . . oder auch unter dem Pseudonym „Chaula"), 1750, 1770, 1778, 1790. Über die verschiedenen Ausgaben s. a. „Intermédiaire des mathématiciens" VI, 1899, p. 112. Eine englische Ausgabe s. hier unter Nr. 130 des Index.

53. Vaget, Augustin. „De Quadrato magico impari." Wittenberg 1695.

54. Vaget, Augustin. „De pari aliisque quadrati magici generibus." Wittenberg 1695.

55. G. G. Leibnitii epistolae duae ad Joh. Christ. Schulenburgium de Arithmetica Dyadica (1698). Leibnitii Opera omnia, ed. L. Dutens, t. III, Genf 1768, p. 349—354 = Leibniz, Mathem. Schriften, herausg. von C. I. Gerhardt (3. Folge der „Gesamm. Werke", herausg. von Geo. Heinr. Pertz), Bd VII, Halle 1863, p. 238—243.

18. Jahrhundert.

56. Leibniz. „Explication de l'Arithmétique binaire" etc. Histoire de l'Académie Royale des Sciences 1703, Paris 1705, Mémoires, p 85—89; s. a. Histoire, p 58—63 = Leibnitii Opera omnia, ed L Dutens, t. III, Genf 1768, p 390—394 = Leibniz, Mathem Schriften, herausg von C. I. Gerhardt (3. Folge der „Gesamm. Werke", herausg. G H Pertz), Bd VII, Halle 1863, p. 223—227 — Vgl. a. Nr 69 dieses Index.

57. Leibniz. „De Dyadicis". Mathem. Schriften, herausg. von C. I Gerhardt, Bd. VII, Halle 1863, p. 228—234.

58. Poignard. „Traité des Quarrés sublimes contenant des Methodes Generales, toutes Nouvelles et faciles, pour faire les sept Quarres planetaires et tous autres à l'infini." Brüssel 1704. Siehe a Histoire de l'Académie des Sciences (de Paris), année 1708, Paris 1709, p. 70—71

59. Truchet, Sebastien. „Memoire sur les combinaisons.“ Mémoires de l'Acad. Roy. des Sc. pour l'année 1704, Paris 1706, p. 363—373.

60. Ph. de la Hire. „Nouvelles constructions et considerations sur les quarrés magiques, avec les démonstrations.“ Mémoires de l'Acad. Roy. des Sc. pour l'année 1705, 4°, Paris 1706, p. 127—171, 364—382; s. a. Histoire de l'Académie, l. c. p. 69—81. (In Oktavausg. d Mém. s. p. 166ff, 480ff. u. Histoire, p. 87ff.)

61. Dangicourt, Petr. „De periodis columnarum in serie numerorum progressionis Arithmeticae Dyadice expressorum.“ Miscellanea Berolinensia 1710, p. 336—376.

62. Leibniz. „Annotatio de quibusdam ludis“ etc. Miscellanea Berolinensia 1710, p. 22—26 = Leibnitii Opera omnia, ed. L. Dutens, t. V, Genf 1768, p. 203—205.

63. Sauveur, Joseph. „Construction generale des Quarrés Magiques“ Mémoires de l'Acad. Roy. des Sc (de Paris) pour l'année 1710, 4°, Paris 1712, p. 92—138. Siehe a. ebda. Histoire, p. 80—88: Bericht über die Abhandlung Sauveurs, anscheinend von Lahire verfaßt. (In Oktavausg. s. Mém. p. 124ff.; Hist. p. 105ff.)

63a. Strabbe, A. B. „Allgemeene Manier om Tovervierkanten te maaken,“ door den Heer Sauveur, uit het Fransch vertaald. Wiskundige Verlustiging door het genootschap der mathematische weetenschappen, *1*, Amsterdam 1793. Mengelwerk, p. 1—8; 22—32; 230ff.

64. Antonio, Giovanni di. „De i giuochi d'Aritmetica e alcune non ingrate proposte nel fine per passatempo de' curiosi.“ Neapel 1712.

65. Pelican, Wenceslaus Joseph. „Arithmeticus perfectus qui tria numerare nescit, sive Arithmetica dualis.“ Prag 1712.

66. Pescheck, Christian „Arith- und Geometrische Erquick-Stunden“ Bautzen 1717—1726

67. (Witgeest, S) „Natürliches Zauber-Buch oder neu-eröffneter Spielplatz rarer Künste.“ Nürnberg 1718.

68. Clausberg, C v „Demonstrative Rechenkunst.“ Leipzig 1732 (§ 1505).

69. „Gottfried Wilhelms Baron von Leibnitz Mathematischer Beweis der Erschaffung und Ordnung der Welt“ usw., herausg. von R A Nolten. Leipzig 1734. Mit einem Widmungswort des Herausgebers versehener Abdruck eines Briefes von Leibniz an den Herzog Rudolf August (1697) und Wiederabdruck der Abhandlung Leibniz' „Explication de l'Arithmetique binaire“ (Nr. 56 dieses Index). Über weitere Abdrucke dieses Briefes s. hier S. 321.

70. Leibniz. „Lettre sur la philosophie chinoise à Mons de Remond“, Section quatrième· „Des caractères dont Fohi fundateur de l'Empire chinoise [sic!] s'est servi dans ses écrits et de l'arithmétique binaire.“ Leibnitii Epistolae ad diversos, ed Christian Kortholt,

II, Leipzig 1735, p. 488—494 = Leibnitii Opera omnia, ed. Dutens, t. IV, Genf 1768, Pars I, p. 207—210.

71. Ressing, Johann Jürgen. „Zahlen-Verwechselungs-Lust" Hamburg 1737.

72. Darjes, J. G. „Dissertatio mathematica." Jena 1738.

73. Ressing, Johann Jürgen. „Arithmetische Ruhe-Stunden." Hamburg 1738.

74. Saunderson, Nicholas. „The Elements of Algebra." Vol I. Cambridge 1740.

75. Vellnagel, Christoph Friedrich. „Numerandi methodi sive arithmeticae omnes possibiles." Jena 1740.

76. Euler. „Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis." Commentarii Acad. Petropolit. *8*, ad annum 1736 (1741), p. 128—140. Wiederabgedruckt (nach G. Eneström, „Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers", Leipzig 1910, p. 13): Commentarii academ. Petropolit. VIII, ed. nova, Bononiae 1752, p 116—126. — Französ. Übersetzung von E Coupy, Nouv. ann de mathém. *10*, 1851, p. 106—118, mit einer Zusatznote des Übersetzers (p. 119).

77. Meerman, Gerhard. „Specimen calculi fluxionalis." Leiden 1742.

78. Rohlfs, Nicolaus. „Künstliches Zahlenspiel oder gründliche Anweisung, wie die sogenannten magischen Quadrate zu verfertigen." Buxtehude 1742.

79. Rusca, Pietro. „Il Maestro de' Giuochi piacevoli . . . con alcuni quesiti aritmetici." Mailand 1743.

80. Dilworth, Thomas. „School-master's Assistant." London 1744 (od. 1745).

81. Ressing, Johann Jürgen „Arithmetisch- und Algebraischer Zeitvertreiber." Dritte Edition. Hamburg 1745 — Frühere Ausgabe („Neu-vermehrter Arithmetischer Zeitvertreiber") 1736

82. Rost. „Mathematischer Lost und Nutzgarten". Nürnberg 1745

83. Steding, Joh. Nic. „Musaeum mathematicum od Mathematisches Kunst-Cabinet." Oldenburg 1746 „Nachlese".

84. Alberti, Giusepp-antonio. „I giochi numerici fatti arcani." Bologna 1747. Spätere Ausgaben werden zitiert von Venedig 1780, 1795, 1815 (7. Ed.).

85. Berckenkamp, Johann Albert „Leges numerandi universales, quibus numeratio decadica Leibnizii dyadica nec non reliqua numerationis genera aptantur" Lemgo 1747

86. „Les Amusements mathématiques." Paris und Lille 1749.

87. Pajot d'Ons-en-Bray. „Méthode facile pour faire tels quarrés magiques que l'on voudra" Mémoires de l'Acad. Roy. des Sc. (de Paris) pour l'année 1750, Paris 1754, p. 241—271; s. a Histoire de l'académie, l. c. p. 119—124. (Oktavausg.: Mém, p 363ff; Histoire, p. 172ff).

88. Euler, Leonh. „Solution d'une Question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse." Histoire de l'Acad. Roy. des Sc. (de Berlin) *15*, 1759 (1766), p. 310—337 = Leonhardi Euleri Commentationes arithm. coll., herausg. v. Fuß, Petersburg 1849, *1*, p. 337—355.

88a. „An account of Euler's Method of solving a Problem, relative to the Move of the Knight" etc. From a Correspondent. Journal of science and the arts *3*, 1817, p. 72—77. Mit einer Figurentafel. — Siehe auch die Nrn. 147 und 174 dieses Index, sowie a. die Abh. von E. Troupenas (Nr. 178).

89. Rallier des Ourmes, J. J. „Mémoire sur les quarrés magiques." Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Acad. Roy. des Sc. (de Paris), par divers Savans, (1) *4*, 1763, p. 196—241.

90. Zaake, C. G. „Praecepta arithm. utriusque." Leipzig 1763. § 14 [Magische Quadrate].

91. „Veritas quadrata mathematica, physica, philologica, theologica." Amsterdam 1765 — Ein seltenes Werk, soll etwas über magische Quadrate enthalten, reproduziert jedoch nach dem bei Johann Wolfgang Müller, „Auserlesene mathematische Bibliothek", Nürnberg 1820, p. 227/8, gegebenen Exzerpt anscheinend nur die „Terrassenmethode" (s. hier S. 27 f.).

92. „Corsa del cavallo per tutt' i scacchi dello scacchiere." Bologna, Lelio dalla Volpe, 1766. 11 S.

93. Capito, Cornelius. „Anweisung alle magischen Quadrattafeln zu verfertigen" usw. Glückstadt 1767.

94. Brander, Georg Friederich „Arithmetica binaria sive dyadica, das ist die Kunst nur mit zwey Zahlen in allen vorkommenden Fällen sicher und leicht zu rechnen." Augsburg 1769. Weitere Ausgaben v. 1770, 1775.

95. Franklin, Benjamin „Experiments and observations on electricity . . ., to which are added Letters and Papers on philosophical subjects." London 1769 (4. Ausgabe; die erste soll 1751 erschienen sein). Vgl. a The Gentleman's Magazine and Historical Chronicle, vol XXXVIII, for the year 1768, p. 313

„Des Herrn D. Benjamin Franklin's sämmtliche Werke" Aus dem Englischen und Französischen übersetzt Nebst des französischen Übersetzers, des Herrn Barbey Dubourg, Zusatzen und mit einigen Anmerkungen versehen von G. T Wenzel. 2. Bd, Dresden 1780

96. Guyot, E. G. „Récréations physiques et mathématiques." Paris 1769—1770 *1*, *2*, *3*, *4*. (In Bd. 2 die mathem. Belustigungen). — 2ᵉ éd. („Nouvelles récréations"), 1772—1775; 3ᵉ éd. 1786, usw. — Auch dreibändige Ausgaben von 1799, 1800—1801, 1810, 1814 werden angeführt. — Deutsche Übers. in 7 Bdn Augsburg 1772—1777; italienische Ausgabe („Giuochi fisici e matematici") Mantua 1817.

97. Euler, Leonh. „Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile" Novi Commentarii Acad. Petropolit. *15*, 1770 (1771), p. 75—106 = Leonhardi Euleri Comment arithm. coll. 1849,

1, p. 427—443. Siehe a. an der erstgenannten Stelle das „Summarium dissertationum", p. 13—15 — Den letzten Abschnitt der Eulerschen Abhandlung übersetzte Lebesgue, „Sur un théorème des nombres", Nouv. ann. de mathém. *15*, 1856, p. 404—406, ins Französische.

98. Ferguson. „Tables and Tracts." 1771.

99. Vandermonde, A. Th. „Remarques sur les problèmes de situation." Histoire de l'Académie des Sciences (de Paris) pour l'année 1771, Paris 1774, p. 566—574.

100. C. (Collini, Côme-Alexandre). „Solution du Probléme du Cavalier, au Jeu d'Echecs." Mannheim 1773. 60 S. — Dasselbe Thema in gleicher Weise behandelte derselbe Verf. zuvor — und zwar unter seinem Namen („Colini" [sic!]) — in der Abhandlung: „Réponse à un problème, sur le jeu des échecs." Journal encyclopédique, Bouillon 1772, t. VI, p. 453—462; VII, p. 112—118, 283—290.

101. Monge, G. „Réflexions sur un tour de cartes." Mémoires de mathém. et de physique présentés à l'Acad. des Sc. (de Paris), t. VII, année 1773 (1776), p. 390—412.

102. Hooper, W. „Rational Recreations in which the principles of numbers and natural philosophy are elucidated" London 1774.

103. Hutton, Charles. „Miscellanea mathematica." London 1775.

104. Euler, Leonh. „Observationes circa novum et singulare progressionum genus." Novi Comment. Academiae Petropolit. XX, 1775 (1776), p. 123—139; s. a. ebendort das „Summarium dissertationum", p. 20—24.

105. Euler, Leonh. „De quadratis magicis" (1776). Leonhardi Euleri Comment arithm. coll. *2*, 1849, p. 593—602 = Leonhardi Euleri Opera postuma, herausg. von P. H. Fuß u. N Fuß, Petersburg 1862, *1*, p. 140—151. — Dafür, daß die Abhandlung der Petersburger Akademie i. J. 1776 vorgelegt wurde, s. „Briefwechsel zwischen C. G J Jacobi und P. H. von Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers", Leipzig 1908, p 162

106. Euler, Leonh. „Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques." Verhandelingen van het Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen *9*, 1782, p. 85—239 = Leonhardi Euleri Comment. arithm coll. *2*, p. 302—361.

107. Ballière de Laisement „Essai sur les problèmes de situation" Rouen 1782. 74 S 7 Tafeln.

108. Funk, Christlieb Benedict. „Naturliche Magie oder Erklärung verschiedner Wahrsager- und natürlicher Zauberkunste" Berlin und Stettin 1783

109. „Onomatologia curiosa artificiosa et magica." 3 Aufl, verm u verb. v Johann Christian Wiegleb Nürnberg 1784

110. „Johann Nikolaus Martius Unterricht in der natürlichen Magie" (zuerst wohl 1719 erschienen, dann z B 1751), völlig umgear-

beitet von Joh. Christ. Wiegleb, fortgesetzt von Gottfr. Erich Rosenthal. 1—19, Berlin u. Stettin 1782—1805. — Vgl. a. Nr. 169 dieses Index.

111. (Twiss, R.) „Chess." I, 1787; II, 1789. London.

112. Vieth, G. U. A. „Über die pythagorischen Tafeln." (Hindenburgs) Leipziger Magazin für reine u. angew. Mathem. 1788, p. 228 bis 237; im Anschluß daran, p. 238—240, ein Brief A. G. Kästners, und p. 240—248 Zusatz K. F. Hindenburgs, beides zu dem Thema der Abhandlung (magische Quadrate).

113. Catel, P. F. „Mathematisches und physikalisches Kunst-Cabinet, dem Unterrichte und der Belustigung der Jugend. Nebst einer zweckmäßigen Beschreibung der Stücke, und Anzeige der Preise, für welche sie beym Verfasser dieses Werkes P. F. Catel in Berlin zu bekommen sind." Berlin u. Libau 1790.

114. „Encyclopédie méthodique" (Diderot et D'Alembert). „Dictionnaire encyclopédique des amusemens des sciences mathématiques et physiques." Paris 1792.

115. „Encyclopédie méthodique" (Diderot et D'Alembert). „Dictionnaire des jeux, faisant suite au Tome III des Mathématiques." Dieser erste Teil enthält freilich nichts über mathem. Spiele; darauf folgt jedoch: „Dictionnaire des jeux mathématiques ... suite du dictionnaire des jeux", Paris 1799, und: „Dictionnaire des jeux familiers", Paris 1797. Siehe a. in der ursprünglichen, alphabetisch geordneten Ausgabe der „Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres" einzelne Artikel, wie z B. den: „Échecs", Anhang dazu von Monneron über den Rösselsprung, in t XI, p 626 der 3. Ausgabe (Genf u Neuchatel 1778); zu der dort gegebenen Anzahlbestimmung vgl. in unserem Buch, Bd I, S 386, Anm. 1

116. Grüson, Joh Phil. „Enthullte Zaubereien und Geheimnisse der Arithmetik." Berlin 1796

117. Vieth, G. U A „Vermischte Aufsätze für Liebhaber mathematischer Wissenschaften" Berlin 1796.

118. (Ernst II. Ludwig, Herzog von Sachsen-Gotha) „Über die Auflösung einer systematischen Aufgabe des sogenannten Rössel-Sprungs auf dem Schachbrete" Kaiserlich privileg. Reichs-Anzeiger 1798, Nr. 48, 26 Febr , col 541—543. Mit einer Figurentafel Für die Autorschaft des Herzogs sei verwiesen auf Allg. Deutsche Biographie, Bd. VI, 1877, p. 310. — Siehe a. einen Artikel desselben Verfassers Reichs-Anzeiger 1797, Nr. 216, 18 Sept, col. 2319—2323.

119. Werneburg. Joh. Fr. Chr „Kurze Darstellung eines neuen Zahlen- und darnach gegebenen Maaß-, Gewichts- und Münz-Systems" 1798. — Weitere Schriften desselben Verfassers über den gleichen Gegenstand siehe bei Ullrich (Nr 499 dieses Index), p. 5f.

19. Jahrhundert.

1801—1810.

120. Horstig, C. G „Das arithmetische Duodecimal-System von seiner practischen Seite dargestellt." Leipzig 1801.

121. Wildt, Joh. Chr. Dan. „Das Burgspiel, ein Schachspiel für Drei." Neues Hannöverisches Magazin *13*, 1803 (Hannover 1804), 89. Stück, col. 1421—1424: „Der Rösselsprung auf dem sechseckigen Brette."

122. Aretin, J. Chr. Freiherr von. „Darstellung der Vortheile und verborgenen Eigenschaften der Enneadik oder des Novennal-Zählungssystems." Tübingen 1805. Die ganze Auflage dieser Schrift wurde — mit Recht — zurückgezogen, nur ein Exemplar befindet sich, mit einer diesbezüglichen Bemerkung des Autors versehen, in der Kgl. Bibl. zu Berlin.

123. Dollinger, Joseph. „Ein hundert zehen ganz neu zusammengesetzte Schach-End-Spiele. Dann vier und zwanzig verschiedene Arten, den Springer durch alle Felder hin und zurück zu spielen, ohne ein Feld doppelt zu berühren." Wien 1806.

124. Lorenz, Joh. Friedr. „Lehrbegriff der Syntactik oder Combinationslehre" (= „Lehrbegriff der Mathematik", 1 Th., 2. Abth.). Magdeburg 1806.

125. „Dizionario delle ricreazioni di scienze fisiche e matematiche trad. del francese." 14 Bde. Rom 1806—1808.

126. Leyburn, Thomas. „New Series of the Mathematical Repository." I, London 1806; II, 1809; III, 1814; IV, 1819.

127. „Neueste Anweisung zum Kreuz- Einsiedler- oder Kapuziner-Spiel." Regensburg 1807.

1811—1820.

128. Brunacci. „Compendio del Calcolo sublime." Mailand 1811, p 74—78 (Brettablauf des Turms).

129. Gergonne, J. D „Recherches sur un tour de cartes." Annales de mathématiques (de Gergonne) *4*, 1813/14, p 276—283.

130. „Recreations in Mathematics and Natural Philosophy first composed by M Ozanam [Nr. 52 dieses Index], lately recomposed, and greatly enlarged, in a new edition, by the celebrated M Montucla And now translated into english, and improved with many additions and observations, by Charles Hutton." London 1814 Vol. 1 der mathem. Teil. — Nach Poggendorffs „Handwörterbuch" (Bd. 2, 1863, col. 342) und anderen Quellen existiert bereits eine Ausgabe von 1803 Spätere Ausgaben, besorgt von C. Biddle (1840) resp. Edward Riddle (1844).

131. „Das Solitärspiel und die Promenade des Springers" Thee- und Caffee-Zeitvertreib für Herren und Damen, herausg von Ad Wilh. Schmolck, 2. Jan. 1815, p. 2—6 Mit einer Kupfertafel.

132. Mollweide, Carl Brandan. „De quadratis magicis commentatio." Leipzig 1816. Eine akademische Gelegenheitsschrift, s. a. v. demselben den Artikel „Quadrat, magisches" in G. S. Klügels „Mathematischem Wörterbuch", 1. Abth., 4. Th., 1823, p. 13—46.

133. Leybourn, Thomas. „The Mathematical Questions, proposed in the Ladies' Diary, and their original answers, ... from 1704 to 1816." I—IV, London 1817.

134. Coste, Durrande et un Abonné. [Über das Gewichtsproblem; s. hier Bd. I, S. 92, Anm.] Annales de mathém. (de Gergonne) *8*, 1817/18, p. 305—312.

135. Allizeau, Mathieu Alexandre. „Les métamorphoses ou Amusements géométriques." Paris 1818.

136. Un Abonné. „Recherches sur les polyèdres, renfermant en particulier un commencement de solution du problème [de carrelage]." Annales de mathém. (de Gergonne) *9*, 1818/19, p. 321—344. — Dieser „Abonnent" ist nach einer handschriftlichen Notiz in dem Exemplar der Sorbonne-Bibliothek niemand anders als der Herausgeber Gergonne selbst gewesen (s. Badoureau im Journal de l'École polytechn., t 30, 1881, p. 47).

1821—1830.

137. Willis, Robert. „An attempt to analyze the automaton chessplayer, of Mr. de Kempelen. To which is added a copious collection of the Knights Moves over the chess board." London 1821. — Ein Referat hierüber gibt der hier sogleich folgende Artikel.

138. „An attempt to Analyse the Automaton Chess Player of M. De Kempelen" The Edinb. Philos. Journal, conducted by Brewster and Jameson, *4*, Oct 1820—April 1821, Edinburgh 1821, Nr VIII, p. 393—398. — Siehe die vorstehende Nummer (Willis)

138a. „On the Knight's Moves over the Chess-board." Ibidem *9*, April—Oct 1823, Nr. XVIII, p 236—237 nebst Tafel VI. — Beide Artikel von demselben anonymen Verfasser; im „Roy. Soc. of London Catalogue of Scientific Papers 1800—1900", Subject Index, vol I (Cambridge 1908), p 81 ist als dieser Verf. D. Brewster genannt. Vgl. a „Briefe über die natürliche Magie, an Sir Walter Scott von David Brewster", aus dem Engl. übers .. von Friedr. Wolff (Berlin 1833), p. 314 ff.

139. Allizeau, Mathieu Alexandre. „Jeu des polygones ou Transformation des plans." Paris 1822

140. Allizeau, Mathieu Alexandre. „Les polyèdres arithmétiques ou fractionnaires." Paris 1823.

141. Hellerung, Johann Christian Daniel „Mathematische Abhandlungen." II (p. 41—70). „Theorie der vollständigen magischen Quadrate". Rostock und Schwerin 1823.

142. Mollweide, Carl Brandan. Artikel „Springer auf dem Schachbrette". Mathem. Wörterbuch, angef. von G. S. Klügel, 1. Abth., 4. Th., 1823, p. 458—467.

143. Warnsdorf, H. C. von. „Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung." Schmalkalden 1823. 69 S. + 96 Fig.
Besprechungen: 1. Literatur-Blatt Nr. 39, 40, 41; 14., 18., 21. Mai 1824; p. 153—156, 158—160, 161—163. Mit Fußnoten und einer „Nachschrift" des Redakteurs (Ad. Müllner).
2. (Hallische) Allgemeine Literatur-Zeitung 1825, 2. Bd., Mai bis August, Nr. 183, col. 625—632; Nr. 184, col. 633—639 (Müllner).

144. Bleibtreu, L. „Die arithmetischen Wunder." Frankfurt a. M. 1824. — Eine Ausgabe: Wien 1828, wird auch angegeben.

145. Jackson. „Rational Amusements for winter evenings." London 1824.

146. Vallot. „Sur le jeu du solitaire. Extrait d'une lettre à M. de Férussac." Bulletin des sciences mathém., astronom., phys. et chimiques (Première section du bulletin universel des sciences et de l'industrie, publié par Férussac), *1*, 1824, p. 137—138.

147. [Pratt, Peter.] „Studies of chess: containing a systematic introduction to the game, and the analysis of chess, by Mr. A. D. Philidor, with original comments and diagrams." 6. ed., London 1825 (p. 533—536: Rösselsprung, darunter eine Lösung Eulers nach dem unter Nr. 88a dieses Index aufgeführten „Account"; p. 74—180: über den relativen Wert der Schachfiguren. Diese Abschnitte rühren jedoch nicht oder doch nur zu unwesentlichen Teilen von Pratt her; vgl. a. P. R. v. Bilguers Handbuch des Schachspiels, herausg. von v. d. Lasa, 2. Aufl. 1852, p. 28)

148. Schinnern, Clemens Rudolph Ritter von. „Ein Dutzend mathematischer Betrachtungen." Wien 1826.

149. Stein, Johann Peter Wilhelm. „Über die Vergleichung der verschiedenen Numerationssysteme." Crelles Journal *1*, 1826, p. 369—371.

150. Mauvillon, F. W. von. „Anweisung zur Erlernung des Schachspiels." Essen 1827.

151. Netto. „Das Schachspiel unter Zweien, und dessen Geheimnisse." Berlin 1827. Anhang: „Das Problem des Rösselsprungs im Schachspiele" (eine Seite: p. 211).

152. Hugoulin. „Première collection de récréations mathématiques." Paris 1828.

153. Bouvard, A. „Marche du Cavalier des Échecs." Mém. de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon 1830, p. 23—26.

154. Klaber, H. „Aufgaben aus der höheren Rechenkunst nebst einem Anhang der Lehre von den Zauberquadraten." Prag 1830

1831—1840.

155. Billig, Eduard (Verleger, gilt auch als Verfasser). „Der Rösselsprung mit Variationen." Mittweida 1831. — Wertlos, wie zahlreiche Schriften anderer Autoren über den gleichen Gegenstand.

156. Clausen, Th , „Über eine arithmetische Aufgabe." Crelles Journal *7*, 1831, p. 30—31.

157. Müser, F. W. „Arithmetische Belustigungen" ... Münster 1831. 49 S.

158. Fibre, de. „Zauber-Quadrate und -Würfel." Hamburg 1834. — Der angegebene Verfassername „Fibre, de" ist ein Pseudonym für F. J. Brede (F. J. Brede = Fibre, de); s. a. „Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher, Bd. V, Altona 1863, p 74/75. Holzmann und Bohatta geben in ihrem Pseudonymen-Lexikon unrichtig an: „Breda, Julius", und beziehen sich hierfür auf Andreas Gottfried Schmidt, „Gallerie deutscher pseudonymer Schriftsteller vorzüglich des letzten Jahrzehents", Grimma 1840, wo p. 59 sich freilich dieser unrichtige Name findet. In dem durchschossenen Exemplar, das die Hamburger Stadtbibliothek von diesem Schmidtschen Werke besitzt (A. A. 215f), steht handschriftlich die Berichtigung „Ferdinand Julius Brede, nicht Breda, in Altona Comptoirist."

159. Ciccolini, Teod „Del cavallo degli Scacchi." Paris 1836.

160. Addison, G. A „Indian Reminiscences." London 1837 (p. 19—27: „General Solution of the knight's trick at Chess")

161. Hohndell, Gustav. „Arithmetische Unterhaltungen." I. Auch unter dem Titel: „Praktische Anleitung zur Bildung und Berechnung magischer oder sogenannter Zauberquadrate" Leipzig 1837. — 2. wohlfeile Ausgabe: „384 Zauberquadrate oder arithmetische Belustigungen für Freunde der Rechnenkunst, nebst Anleitung zu ihrer Bildung und Berechnung." Leipzig 1839.

162. Nulty, E. „A. Remarkable Arrangement of Numbers, constituting a Magic Cyclovolute" (1834). Amer. Philosophical Soc Trans (2) *5*, 1837, p 205—208

163. Violle, B „Traité complet des Carrés Magiques pairs et impairs, simples et composés, à bordures, compartimens, croix, châssis, équerres, bandes détachées, etc ; suivi d'un Traité des Cubes Magiques, et d'un Essai sur les Cercles Magiques" 2 tomes 8°, Paris 1837—38, et 1 tome fol. (49 planches), Dijon.

164. Jaclot et D'Arbel aîné. „Récréations arithmétiques ou 1800 problèmes" ... Paris & Bruxelles 1838. *1*, *2*.

165. Mone, Franz Joseph. „Räthselsammlung" Anzeiger für Kunde der teutschen Vorzeit, herausg. von Mone, 7. Jahrg , 1838, col 32 bis 50, 258—268, 371—384.

166. Unger, Ephraim Salomon. „Arithmetische Unterhaltungen." Erfurt 1838.

167. Zuckermandel, Christoph Wilhelm. „Regeln, nach denen alle Zauberquadrate, mit gleichen Liniensummen, leicht und schnell, auf eine spielende Art, und auch solche Quadrate gebildet werden können, deren Liniensummen Glieder einer arithmetischen Progression sind, und zusammen eine gewisse Jahreszahl betragen. Nebst einer Anweisung, den Rösselsprung mit vielen Veränderungen in einer Stunde gründlich zu erlernen." Nürnberg o. J. (Vorrede von 1838).

168. Lavernède, J. E. Thomas de. „Problème de situation." Mémoires de l'Académie Royale du Gard 1838/39, Nismes 1840, p. 151—179.

169. Martius, Joh. Nik. „Gesammelte Schriften über natürliche Magie." Ausgew. u. bearb. von J. H. M von Poppe. Stuttgart 1839. — Vgl. a. Nr. 110 dieses Index.

170. Leischner, Carl Ferd. „Die Zauberkunst aller Zeiten und Nationen." Weimar 1840.

171. Roget, P. M. „Description of a Method of moving the Knight" etc. Philos. Magaz (3) *16*, 1840, p. 305—309.

172. W. [Walker], G. „Chess, without the Chess-board." Fraser's Magazine for town and country, vol. 21, Nr. 123, March 1840, p. 302—318 (p. 316—317: Rösselsprung ohne Ansehen des Schachbretts).

173. Walker, G. „On the moving the Knight" etc. Philos. Magaz (3) *16*, 1840, p. 498—501.

1841—1850.

174. Stein [Elias]. „Manuel de l'amateur du jeu des échecs, ou nouvel essai sur ce jeu" Ausgabe von Milbons [= Simon Blocquel]. Paris o. J. [1841] (p 122—128· Rösselsprung, vorwiegend nach Euler Nr. 88 dieses Index)

175. Käfer, Victor. „Vollständige Anweisung zum Schachspiele". Grätz 1842. Vierte Abtheilung, p. 191—193· „Vom Rösselsprunge" Mit einer Tafel kunstvoller Rösselsprünge.

176. Libri, G. „Mémoire sur l'emploi des fonctions discontinues dans l'analyse, pour la recherche des formules générales." C R. (de Paris) *15*, 1842, p. 401—410 (p. 408 Notiz über das Rosselsprungproblem).

177. [Perenyi, Baron v] „Mnemonik des Schachspieles oder· Versinnlichung des Bretes und der Züge" Bd. I (Tafel 1—47); II (Tafel 48—108). Wien 1842.

178. Troupenas, E „Problème du cavalier, parcourant toutes les cases de l'échiquier." Le Palamède (2) *2*, 1842 Paris, p 166—171, 221—226, 268—277 Siehe dazu a. Nr. 88a dieses Index.

179. Ulbricht, C „Wunderbare Rechenkünste Eine Sammlung auserlesener arithmetischer Kunstaufgaben, unter besonderer Berücksich-

tigung der Zauber-Quadrate, hinsichts ihrer mechanischen Anfertigung." Quedlinburg 1842.

180. Vallot. „Rapport sur un travail de [A.] Suremain de Missery: Théorie générale du jeu de Solitaire considéré comme probléme d'analyse et de situation." Compte-rendu des travaux de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon 1841—1842, Dijon 1842, p. 58—70. Siehe S. 337.

181. Lionnet. „Solution d'un problème d'arithmétique" Nouv. ann. de mathém. *2*, 1843, p. 446—447.

182. Moon, Robert. „On the knight's move at chess." Cambr. Math. J. *3*, 1843, p. 233—236.

183. Brede, J. „Almanach für Freunde vom Schachspiel." Altona (1844).

184. Charpentier, Jean-Baptiste-Alexandre. „Du jeu des échecs à la portée des jeunes gens . . La marche du cavalier, offrant à elle seule un nouveau jeu géométrique." Paris 1844. 48 S. + 2 Blätter und 2 Vorblätter, diese mit dem neuen Titel: „Anciens et nouveaux jeux géométriques, . . . combinaisons curieuses sur la marche simple et double du cavalier aux échecs." Paris 1849.

185. Glaszer, Christian Flamin Heinrich August. „Gang eines Springers auf dem Schachbrette." Jahresber. Studienanstalt Erlangen 1844, p. 1—12 (Verfaßt nach Mitteilungen des Erlanger Professors Heinr. Aug. Rothe, † 1842)

186. Colenne „Le système octaval ou la numération et les poids et mesures réformés." Paris 1845.

187. Jaenisch, C. F. v. „Essai sur le calcul mathématique des valeurs relatives des pièces de l'échiquier." Le Palamède (2) *5*, 1845 Paris, p. 155—173.

188. Moon, Robert „On magic squares" Cambr. Math. J *4*, 1845, p. 209—214.

189. Tomlinson, Charles „Amusements in Chess." London 1845. (Rösselsprünge p. 114—128, 154—155; Wert der Schachfiguren p 129 bis 138)

190. Alexandre, A. „Collection des plus beaux problèmes d'échecs". Paris 1846. Auf der letzten Seite: „Problème du cavalier" Dazu die Figuren p 341

191. Lasa, T. von der „Lösung des Rosselsprungs." Schachzeitung *1*, Berlin 1846, p. 188—191; *2*, 1847, p 79—86; 97—103

192. Moon, Robert „On the theory of magic squares, cubes" etc Cambr and Dubl. Math. J. *1*, 1846, p. 160—164

193. Franz. „Rösselsprung" Schachzeitung *2*, Berlin 1847, p 341 bis 343

194. Kirkman, T. P. „On a problem in combinations“ Cambr. and Dubl. Math J. *2*, 1847, p. 191—204.

195. Lasa, T. von der. „Notiz über ein altes, bei Janot in Paris gedrucktes Quartbändchen [Nr. 7 unseres Index].“ Schachzeitung *2*, Berlin 1847, p. 317—320.

196. Listing, J. B. „Vorstudien zur Topologie.“ Göttinger Studien, red. von A. B. Krische, Göttingen 1847, Abth. *1* (Mathem. u. naturw. Abhandl.), p 811—875. — Auch als selbständiges Werk erschienen: Göttingen 1848.

197. Oppen, v. „Vom Tauschwerthe der Steine im Schach.“ Schachzeitung *2*, Berlin 1847, p 8—13; 70—79, 141—149.

198. Pott, A. F. „Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Welttheile.“ Halle 1847.

199. Beverley, William. „On the Magic Square of the Knight's March.“ Philos. Magàz. (3) *33*, 1848, p 101—105 (Mitgeteilt von H. Perigal).

200. Rädell, Carl. „Über die mathematische Behandlung des Schachspiels.“ Schachzeitung *3*, Berlin 1848, p. 101—120 (unvollendet).

201. „De oplossing van den paardensprong.“ Sissa (Maandschrift voor het schaakspel) *2*, 1848, p. 150—153, 190—194, 213—218.

201 a. Scheidius, T. (nach Haldeman, Nr. 268 dieses Index, Prodromus p. 36, auch Verf. des vorstehenden Artikels Nr. 201) „Het Problema van den Paardensprong.“ Sissa *4*, 1850, p. 209—223.
Einzelne Rösselsprünge, von verschiedenen herrührend: Sissa *3*, 1849, p. 330; *4*, 1850, p. 144, 233; *7*, 1853, p. 39, 69, 89, 102, 138, 145, 146.

202. Hanstein (anonym „Hn.“), W. „Der Rösselsprung in höchster Kunstvollendung“ Schachzeitung *4*, Berlin 1849, p 94—97.

203. Oppen, von. „William Beverley's Rösselsprung.“ Schachzeitung *4*, Berlin 1849, p. 21—24.

204. Wenzelides, Carl. „Bemerkungen über den Rösselsprung nebst 72 Diagrammen.“ Schachzeitung *4*, Berlin 1849, p 41—93, 282—285; *5*, 1850, p 212—221, 230—248

205. Cayley, A „On the triadic arrangements of seven and fifteen things.“ Philos Magaz. *37*, 1850, p. 50—53 = Collect. Papers *1*, p. 481—484.

206. [Hanstein, W., ?] „Über den Tauschwerth der Steine.“ Schachzeitung *5*, 1850, p. 225—227.

207. Kirkman, T. P „Query“ Lady's and Gentleman's Diary 1850, p 48

207 a. „Solutions to Query VI“ Lady's and Gentleman's Diary 1851, p. 48

208. Kirkman, T P. „Note on an unanswered prize question.“ Cambr and Dubl. Math. J *5*, 1850, p. 255—262.

209. Kirkman, T. P. „On the triads made with fifteen things." Philos. Magaz. *37*, 1850, p. 169—171.

210. Simrock, Karl. „Das deutsche Räthselbuch." 2. Sammlung. Frankfurt a. M., o. J. [1850].

211. Volpicelli, P. „Solution d'un problème de situation relatif au cavalier des échecs." C. R. (de Paris) *31*, 1850, p. 314—318. Vgl. a. Nr. 302 dieses Index.

1851—1860.

212. Robinson, N. H. „Mathematical Recreations." Albany 1851.

213. Wenzelides, Carl. „Über symmetrische Rösselsprünge." Schachzeitung *6*, 1851, p. 286—297.

214. Anstice, R. R. „On a problem in combinations." Cambr. and Dubl. Math. J. *7*, 1852, p. 279—292.

215. Basterot, Comte de. „Traité élémentaire du jeu des échecs." Paris 1852; 2ième éd. 1863.

216. Crelle, A. L. „Zwei Zahlen-Aufgaben; die erste mit der Auflösung, die zweite noch aufzulösen." Crelles Journ. *44*, 1852, p. 317—334.

217. Minding, Ferd. „Über den Umlauf des Springers auf dem Schachbrette (den sogenannten Rösselsprung)." Crelles Journal *44*, 1852, p. 73—82 = Bull. de la classe physico-mathém. de l'Acad. Impér. des sc de St-Pétersbourg *6*, 1848, col. 209—220; in englischer Übersetzung: „On the Knight's move at chess" in Cambr. and Dubl Math. J *7*, 1852, p. 147—156.

218. Spottiswoode, William. „On a Problem in Combinatoria Analysis." Philos. Magaz. (4) *3*, Jan.—June 1852, p. 349—354

219. Clausen, Th. „Direkte Auflösung des Rösselsprungs." Grunerts Archiv Math. Phys. *21*, 1853, p. 91—92.

220. Clausen, Th. „Verschiedene mathematische Bemerkungen und Aufgaben; aus einem Briefe an den Herausgeber", Nr. 2 Grunerts Arch. Math Phys. *21*, 1853, p 97—99

221. Lecot, V. „Récréations arithmétiques" Paris 1853

222. Nulty, E „Supplementary Note on the Construction and different Forms of the Magic Cyclovolute." Amer Philosoph Soc Trans. (2) *10*, 1853, p 17—25.

223. Kunze, Karl Ludwig Albr. „Das geometrische Figurenspiel für Kinder" . 2. Aufl, Weimar 1854 Vgl a Nr. 297 dieses Index

224. Ulbricht, C „Anleitung zur leichten und doch richtigen Anfertigung der so wunderbaren Zauberquadrate." Quedlinburg u Lpz. 1854.

225. „Sur le problème du cavalier au jeu des échecs." Par un abonné. Nouv. annal. de mathém. *13*, 1854, p. 181—186. Dazu eine Zusatznote des Redakteurs Terquem, p 187/8.

226. P[ongracz][1], Graf Arnold — zu Balassa Gyarmath. Zwei Tafeln mit zus. 26 Rösselsprüngen. Wiener Schachzeitung *1,* 1855. Mit einem Artikel „Rösselsprünge" von der Redaktion und jedenfalls in deren Namen, p. 238—241; s. a. p. 342.

227. Durand (Abbé). „Généralisation complète du problème d'Euler." La Régence (Revue des échecs etc.) *1,* 1856 Paris, p. 366—372; La nouvelle Régence *2,* 1861, p. 83—87, 117—120, 152—156. Vgl. die Bemerkung zu Nr. 245 dieses Index.

228. Hamilton, W. R. „Memorandum respecting a new System of Roots of Unity" Philos. Magaz. (4) *12,* 1856 July-Dec., p. 446.

229. Lange, Max. „Lehrbuch des Schachspiels." Halle 1856; 2. Aufl. 1865.

230. Slyvons (Anagramm-Pseudonym für Solvyns[2]), Edm. „Application de l'analyse aux sauts du cavalier du jeu des échecs." Brüssel 1856.

231. Cayley, A. „A problem in permutations." Quart J. *1,* 1857, p. 79 = Collect. Papers *3,* p. 8.

232. Cluley, Wm „The Philosophy of Chess." London o J. [1857 oder 1858].

233. Hamilton, W R „On the Icosian Calculus." British Assoc. Report 1857, Notices and abstracts, p. 3.

234. Mariage, Aimé. „Numération par huit anciennement en usage par toute la terre prouvée par les Koua des Chinois, par la Bible, par les livres d'Hésiode, d'Homère, d'Hérodote etc." Paris 1857.

235. Reiss, M. „Beiträge zur Theorie des Solitär-Spiels" (datiert: 1853). Crelles Journal *54,* 1857, p. 344—379.

235a. Ruchonnet. „Théorie du solitaire par feu le docteur Reiss, librement traduit de l'allemand" Nouv. Corr mathém *3,* 1877, p 234—241; 263—268; 289—293. Zusätze Ruchonnets p 294.

236. Bunjakowskij, W. „Sur un problème de position, relatif à la théorie des nombres." Bull. de la classe physico-mathém de l'Acad. Impér des sc. de St.-Pétersbourg *16,* 1858, col. 67—78. Referat in Nouv. ann de mathém. *17*, 1858, Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques, p. 66—67

237. Oppen, von „Rösselsprung" Schachzeitung *13,* 1858, p 174—175

238. Warnsdorf, H. C von. „Zur Theorie des Rösselsprungs." Schachzeitung *13,* 1858, p. 489—492

239. Hugel, Theod. „Die magischen Quadrate mathematisch behandelt und bewiesen." Ansbach 1859

---

1) Siehe v. d Linde, „Gesch. u Litter des Schachspiels", Bd II, 1874, p 111 u. 131.

2) Siehe La Régence I, 1860, p. 321—324, speziell p 323

240. Jaenisch, C. F. von. „De la solution la plus parfaite du Problème du Cavalier.“ The Chess Monthly *3*, 1859 New York, p. 110—114, 147—150, 176—178.

241. Mann, G. „120 neue Rösselsprünge nebst einer kurzen Anleitung: Die Kunst, den Rösselsprung ohne Schwierigkeit zu lernen.“ Nürnberg 1859.

242. Wiessner, J. „Magic square for the year 1859.“ The Mathemat. Monthly, edited by J. D. Runkle, *1*, 1859, p. 122.

243. Bellavitis, G. „Problema di posizione relativo alla teoria delle sostituzioni (Bouniakowsky, Bull. Ac. Pétersbourg, 1857, XVI nº. 365...).“ Atti dell' Istituto Veneto (3) VI, 1860—61, p. 193—195.

244. Bellavitis, G. „Disposizione sullo scacchiere di otto regine.“ Atti dell' Istituto Veneto (3) VI, 1860—61, p. 434—435; s. a. v. demselben ibidem XV, 1869—70, p. 844—845.

245. Durand (Abbé de Lisieux). „Études théoriques et pratiques.“ La Régence I, 1860, p. 52—56, 117—122, 154—157, 161—165, 213—215, 246—249, 278—280, 312—316, 342—348, 366—369; La nouvelle Régence II, 1861, p. 21—25, 51—54, 244—247, 309—314; III, 1862, p. 52—56, 119—123, 209—215, 245—248, 257—260, 289—292, 321—329; IV, 1863, p 16—22, 52—55, 115—118, 193—199, 321—325; V, 1864, p. 33—36, 65—69. — Eine ganze Anzahl der Abschnitte dieser Artikelserie hat freilich mit den in unserem Buche behandelten Fragen nichts zu tun. Drei Abschnitte der Serie sind hier im Index zu einem Artikel desselben Verfassers vom Jahre 1856 (Nr. 227) gezogen, da sie die Fortsetzung dieses bilden

246. Lequesne, E. „Solution du Problème du Cavalier“ La Régence I, 1860, p. 355—358 Siehe a. v demselben: „Quelques mots sur le problème du cavalier“ La nouvelle Régence III, 1862, p. 162—164; diese Note ist nur der begleitende Text für eine Tafel mit Rösselsprüngen, die dem betreffenden Hefte der Zeitschrift beigegeben werden sollte, aber in dem von mir eingesehenen Exemplar (Bibliothek von der Lasa) jedenfalls fehlt Ebendort, p. 218, wird ein Tafelwerk Lequesnes uber den Rösselsprung als geplant angekündigt Ob dieses erschienen ist, habe ich nicht feststellen können; Volpicelli (Nr 303 dieses Index) nennt unter den Schriftstellern des Rösselsprungs Laquesne (sic!) ohne jede weitere Angabe

247. Waitz, C „Topographische Schachstudien.“ Schachzeitung *15,* 1860, p 406—415

248. „Briefwechsel zwischen C F. Gauß und H C. Schumacher“, herausg. von C. F Peters, *1—6,* Altona 1860—65.

1861—1870.

249. Durand (Abbé). „Récréation échiquienne. Problème des huit Amazones pacifiques." La Nouvelle Régence II, 1861 (auf dem Umschlag: 1862), p. 178—181, 197—200.

250. Peirce, Benjamin. „Cyclic solutions of the school-girl puzzle." The astronomical journal, edited by B. A. Gould, *6*, 1859—1861 (Cambridge U. S. 1861), p. 169—174.

251. Polignac, Camille de. „Sur la course du cavalier au jeu des échecs." C. R. (de Paris) *52*, 1861, p. 840—842 = Cosmos *18*, 1861 I, p. 489—491.

252. Sylvester, J. J. „Note on the historical origin of the unsymmetrical six-valued function of six letters." Philos. Magaz. (4) XXI, 1861, p. 369—377 = The collected mathem. Papers of J. J. Sylvester II, Cambridge 1908, p. 264—271.

253. Woolhouse, W. S B. „On the Rev. T. P. Kirkman's problem respecting certain triadic arrangements of fifteen symbols." Philos. Magaz (4) *22*, July—Dec. 1861, p. 510—515.

254. — x. „Der geschlossene Rösselzug." Schachzeitung *16*, 1861, p. 81—85.

255. Chambure, de. „Du problème relatif à la marche du cavalier au jeu des échecs" Mémoire lu le 5 mars 1861. Mémoires de l'Institut égyptien *1*, Paris 1862, p. 67—86. 9 Planches.

256. Listing, J. B „Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyëdern." Göttinger Abhandl. *10*, 1861/62; Math Kl , p. 97—182, Göttingen 1862. Referat Cayleys über diese Arbeit vor der London Math. Soc. in deren Proceedings *2*, 12. XI. 1868, p 103—104

257. Hautin, Charles. „Das Ganze der höheren und niederen Magie." Nordhausen 1862.

258. Herschel, A. S „Sir Wm Hamilton's Icosian' Game." Quarterly Journ of Mathem. *5*, 1862, p. 305

259. Kirkman, T. P. „On the puzzle of the fifteen young ladies" Philos. Magaz (4) *23*, 1862, p. 198—204.

260. Lange, Max. „Handbuch der Schachaufgaben" Leipzig 1862.

261. Woolhouse, W S. B. „On triadic combinations of 15 symbols." Lady's and Gentleman's Diary 1862, p 84—88, wiederabgedruckt in Assurance Magazine X, 1862, pt V, Nr 49, p. 275—281

262. Jaenisch, C. F. v. „Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs." *1, 2, 3.* St.-Petersbourg 1862—1863 Ein 4. Bd , der in Aussicht genommen war (s. das nachstehend genannte Autorreferat), ist nicht erschienen (s. a. Schachzeitung *27*, 1872, p. 243). — Besprechungen: v. d. Lasa, Schachzeitung *17*, 1862, p. 65—69 (vgl.

a ibid. *28,* 1873, p. 193) und ein Autorreferat im Bull. de la classe physico-mathém. de l'Acad. Impér. des sc. de St.-Pétersbourg *6,* 1863, p. 473—477, dieses abgedruckt in La Nouvelle Régence IV, 1863, p. 326—329. Einige weitere Besprechungen sind bei v. d. Linde (Nr. 318 dieses Index), Bd. 2, p. 108 aufgeführt. Vgl. zu Bd. I des Jaenischschen Werkes a. die unter Nr. 599 dieses Index verzeichnete Arbeit.

263. Cayley, A. „On a tactical theorem relating to the triads of fifteen things." Philos. Magaz. (4) *25,* 1863I, p. 59—61 = Collect. Papers *5,* p. 95—97.

264. Lange, Max. „Tauschwerth der Steine" Schachzeitung *18,* 1863, p. 129—137.

265. Lange, Max. „Mathematische Schachfragen." Schachzeitung *18,* 1863, p. 97—102; 172—176; 203—209; 363—365.

266. Le Cointe, J. L. A. „Question sur un jeu de cartes." Annali di matem. *5,* 1863, p. 108—110.

267. Woolhouse, W. S. B. „On triadic combinations." Lady's and Gentleman's Diary 1863, p. 79—90.

268. Haldeman, S. S. „Tours of a Chess Knight." Philadelphia 1864 16°. Mit einem wertvollen bibliographischen Anhang: „Bibliography of the Chess Knights Tour" Philadelphia 1864

269. Holditch, Hamnet. „On a magic square." Quart. Journ. of Mathem. *6,* 1864, p 181—189

270. Lange, Max „Maxima und Minima." Schachzeitung *19,* 1864, p. 42—47; 78—81; 136—144; 188—191

271. Mercklein, F A A. „Marche du cavalier du jeu des échecs parcourant les 64 Cases de l'échiquier" Mémoires de la Société impériale d'Agriculture, de Sciences et d'Arts, séant à Douai, 1864. 7 S, 1 Tafel.

272. Saint-Laurent, Thomas de „Mélanges ou battements réguliers de cartes." Mémoires de l'Acad. du Gard, Nîmes 1864/65, p 489—545

273. Cretaine, A. „Études sur le problème de la marche du cavalier au jeu des échecs et solution du problème des huit dames" Paris 1865. 42 S + 25 Tafeln

274. Geynet, A „Mémoire relatif au problème du cavalier" C R. des séances de l'Académie des Sciences 60, 1865I, Paris 1865, p. 484

275. Hudson, W. H H. [Über Kartenmischen] Educ. Times Reprints *3,* 1865, p 105

276. Liharžik, Franz. „Das Quadrat die Grundlage aller Proportionalität in der Natur und das Quadrat aus der Zahl Sieben die Uridee des menschlichen Körperbaues." Wien 1865.

277. Michny, G. „Récréations mathématiques, physiques et chimiques précédées par la quadrature du cercle." 1865.

278. **Müller, Lucian.** „Über ein heutiges Kinderspiel." Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik (Jahn), 35. Jahrg., 91. Bd. = Jahrbücher für classische Philologie (Fleckeisen), 11. Jahrg., 1865, p. 217—223.

279. **Purkiss, H. J.** [Über das „Baguenaudier" resp. „Zankeisen" benannte Ringspiel.] Educ. Times Reprints *3,* 1865, p. 66/67.

280. **Schmidt, Eugen v.** „Über die mathematischen Grundverhältnisse im Schach." Schachzeitung *20,* 1865, p. 38—39. — Wertlos.

281. **Stchoulepnikoff, Gerge de.** „Twenty Solutions of the Problem of the Knights Tour." Buffalo N. Y. 1865.

282. **T.** [= **Tychsen, Camillo**]. „En analytisk Løsning af den bekjendte Skakopgave: Med Springeren at gjennemløbe alle Feltene paa Skakbrættet ved kun at besætte hvert enkelt Felt en eneste Gang." Tidsskrift for Matematik (2) *1,* 1865, p. 17—20.

283. **Frost, A. H.** „Invention of magic cubes and construction of magic squares, possessing additional properties." Quart. Journ. of Mathem. *7,* 1866, p. 92—102.

284. **Frost, A. H** „Supplementary note on nasik cubes." Quart. Journ. of Mathem. *8,* 1867, p 74

285. **Laverty, W H.** „On forming the Magic Square of Numbers from 1 to $(12n + 6)^2$." Educ. Times Reprints *8,* 1867, London 1868, p. 67—68; s. p. 68 a. Question Nr. 2243 (S. **Bills** und **Laverty**).

286. **Power, J.** „On the problem of the fifteen school girls." Quart. Journ. of Mathem. *8,* 1867, p. 236—251.

287. **Riecke, G. A** „Mathematische Unterhaltungen." *1, 2, 3.* Stuttgart 1867—1873.

288. **Woolhouse, W. S. B.** [Über eine Anordnungsaufgabe nach Art des **Kirkman**schen Pensionatsdamen-Problems.] Educ. Times Reprints *8,* 1867 (London 1868), p 76—82; s a ebda p. 82—83 (S. **Bills**).

289. **Hudson, C. T.** [Über das **Gergonne**sche Haufenproblem.] Educ. Times Reprints *9,* 1868, p. 89—91.

290. **Loyd, S.** „The Queens Tour" American Chess-Nuts von E B. **Cook**, W. R. **Henry** und C A. **Gilberg**, New York 1868, p. 396.

291. **Hagen, Hermann** „Antike und mittelalterliche Rätselpoesie." Biel 1869.

292. „The tour of the knight." The Westminster Papers (A Monthly Journal of chess .) 1869 London, Edinburgh, Dublin, p. 18.

293. **Thompson, W H.** „On magic squares." Quart. Journ. of Mathem., *10,* 1869, London 1870, p. 186—202.

294. **Risser, J. A.** [Über magische Quadrate; Titel mir unbekannt] **Appleton's** Journal, of Literature, Science and Art, Nov 1870.

1871—1880.

295. Frost, A. H. „General solution and extension of the problem of the 15 school girls." Quart. Journ. of Mathem. *11*, 1871, p. 26—37.

296. Horner, J. „On the algebra of magic squares" Quart. Journ. of Mathem. *11*, 1871, p. 57—65; 123—132; 213—224.

297. Kunze, C. L. A. „The Weimar geometrical amusement." Weimar 1871. Mir nicht zugänglich; vermutlich nur eine englische Ausgabe von Nr. 223 dieses Index.

298. Reiß, M. „Évaluation du nombre de combinaisons desquelles les 28 dés d'un jeu de dominos sont susceptibles d'après la règle de ce jeu." Annali di matematica (2) *5*, 1871, p. 63—120.

299. Gros, L. (anonym: „Un clerc de notaire Lyonnais") „Théorie du baguenodier." Lyon 1872. Verlag v. Aimé Vingtrinier.

300. Pessl, Heinrich von. „Über eine besondere Art magischer Quadrate" Jahresber. Gymn. u. latein. Schule zu Amberg für das Studienjahr 1871/72. Amberg 1872.

301. Tarry, H. „Solution du problème du cavalier au jeu d'échecs." Les Mondes (2) *28*, 1872, p. 60—64.

302. Volpicelli, Paolo. „Solution complète du problème relatif au cavalier des échecs" Seconde note [vgl. Nr. 211 dieses Index]. C. R. (Paris) *74*, 1872, p. 1099—1102

303. Volpicelli, Paolo „Soluzione completa e generale mediante la geometria di situazione del problema relativo alle corse del cavallo sopra qualunque scacchiere." Atti della Reale Academia dei Lincei *25*, Rom 1872, p 87—160; 364—454; *26*, 1873, p. 49—187; 241—325. Auch als Sonderabdruck (Rom 1872) erschienen.

304. „Le Polygraphile" Paris 1872.

305. Carpenter, Geo. E „The Eight Queens Problem, or how to place eight queens upon the board without being en prise" Brownsons Chess Journal, Dubuque (Jowa), *5*, Nr. 35 ff., 1873 und 1874. Nach eigener Angabe des Verfassers inhaltlich in die spätere Abhandlung von ihm (Nr. 590 dieses Index) übergegangen.

306. Curtiss, F. H. [Über das Achtdamenproblem, Titel mir nicht bekannt] Brownsons Chess Journal, Dubuque (Jowa), *5*, 1873, p 185

307. Drach, S. M „An easy general rule for filling up all magic squares" The Messenger of Mathem (2) *2*, 1873, p. 169—174; 187

308. Hierholzer, C „Über die Moglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren" Mathem. Annal. *6*, 1873, p. 30—32.

309. Meyer, Heinr F. L „The Knight's Tour." The Leisure Hour, Family Journal, Nr. 1147, London, 20 od. 22.(?) Dec 1873, p 813—815.

310. J. R. „Eine Rösselsprungs-Frage." Deutsche Schachzeitung *28*, 1873, p. 283.

311. Régnier, Alfred. „Problème de la marche du cavalier." Les Mondes (2) *32,* 1873, p. 507—514.

311a. Volpicelli, P. „Réponse aux critiques faites à ma solution du problème du cavalier et des échecs." Les Mondes (2) *33,* 1874, p. 126—130.

312. Weber, A. „Untersuchungen über das indische Schachspiel" (Fortsetzung). Monatsber. d. Berliner Akad 1873, Berlin 1874, p. 705—735. (Darin drei Rösselsprünge aus Nîlakaṇṭha's nîtimayûkha.) — Vgl. a. unten Nr. 321.

313. Wiener, Chr. „Über eine Aufgabe aus der Geometria Situs." Mathem. Annal. *6,* 1873, p 29—30.

314. Deblaye, A. „Étude sur la récréation du P. Jean Levrechon." Mém. de la Société philotechnique de Pont-à-Mousson 1874. — Siehe Nr. 24 dieses Index.

315. Glaisher, J. W. L. „On the problem of the eight queens." Philos. Magaz. *48,* 1874, p. 457—467.

316. Günther, S. „Zur mathematischen Theorie des Schachbretts." Grunerts Archiv Math. Phys. *56,* 1874, p. 281—292.

317. Lagarrigue, F. „Curiosités mathématiques" 2. éd Clichy 1874.

318. Linde, Antonius van der. „Geschichte und Litteratur des Schachspiels." 2 Bde., Berlin 1874

319. Pauls, E. „Das Maximalproblem der Damen auf dem Schachbrete." Deutsche Schachzeitung *29,* 1874, p. 129—134; 257—267; s. a. ibidem *31,* 1876, p. 334.

320. Bolton, Henry Carrington. [Über magische Quadrate; Titel mir unbekannt] Acta Columbiana nov 1874—june 1875.

321. Stenzler, Adolf Friedrich. „Über Nîlakantha's Rösselsprung." Monatsber. der Berliner Akad 1874, Berlin 1875, p 21—23. — Vgl. a. oben Nr. 312.

322. Cantor, M. „Zahlentheoretische Spielerei" Zeitschr. fur Math. und Phys. *20,* 1875, Hist-litt Abt., p. 134—135.

323. Duras, W. „Zahlensysteme uberhaupt und das dekadische insbesondere." Progr.? 1875

324. Frankenstein, Prof. Gustavus „A Magic Cube." Cincinnati Commercial 1875, 11. Marz.

325. Günther, S. „Beweis eines Fundamentalsatzes von den magischen Quadraten" Grunerts Archiv Math. Phys. *57,* 1875, p. 285—296.

326. Hartmann, S. „Magische Quadrate." Prag 1875

327. Pérez. „Loi générale pour la construction des carrés magiques impairs" 1875 11 S

328. Sachau, Ed. „Algebraisches über das Schach bei Bîrûnî" Zeitschr der Deutschen Morgenländ. Gesellsch. *29,* 1875, p. 148—156.

329. Sylvester, J. J. „On the fifteen young ladies problem." London Math. Soc. Proc. *7,* 1875/76, p. 235—236.

330. Vanderweyde, Prof. P. H. „Magic Squares." Manufacturer and Builder, Dec. 1875—May 1876.

331. Braun, Ferd. „Der junge Mathematiker und Naturforscher." 1876. — Neue wohlfeile Ausg 1881.

332. Exner, G. „Der Rösselsprung als Zauberquadrat." Progr. Gymn. Hirschberg 1876.

333. Günther, S. „Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften", Kap IV: „Historische Studien über die magischen Quadrate" (p. 188—270). Leipzig 1876.

333a. Eberhard, A. „Zu Moschopulos' Tractat über die magischen Quadrate." Hermes *11,* 1876, p. 434—442. — Siehe Nr. 4 dieses Index.

334. Günther, S. „Die magischen Quadrate bei Gauß" Zeitschr. für Math. und Phys. *21,* 1876, Hist.-litt. Abt., p. 61—64.

335. Hugel, Th. „Das Problem der Magischen Systeme." Neustadt a. d. H. 1876.

336. Lucas, Ed. „Sur un problème d'Euler relatif aux carrés magiques." Nouv. Corr. mathém. *2,* 1876, p. 97—101

337. Mansion, P. „Sur les carrés magiques." Nouv Corr. mathém. *2,* 1876, p. 161—164, 193—201.

338. Müller, Felix. „Über eine zahlentheoretische Spielerei" Zeitschr f. Math u. Phys *21,* 1876, p. 227—228

339. „Extrait d'une lettre de M. P S. [sur les carrés magiques]." Nouv. Corr. mathém. *2,* 1876, p. 55—58 u 122—123; s a p 88 (Ed. Lucas) — Vgl. Nr 27 dieses Index.

340. Tarry, H „Les carrés magiques Etude historique et arithmétique." Alger 1876

341. Taylor, H. M. „On the Relative Values of the Pieces in Chess." Philos Magaz (5) *1,* Jan.—June 1876, p. 221—229

342. Flye Sainte-Marie, C „Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier," Bull de la soc mathém *5,* 1876 77, p 144—150

343. Barnard, F A. P. „Magic Squares" Johnson's Cyclopaedia, vol *3,* 1877 — Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch, Bd III (1896), p. 71 führt von demselben Verf. eine Abhandlung „On the theory of magic squares" aus den „Proceedings of the National Academy of Sciences" 1876 an, die durch den Zusatz: „Auch in Johnson's Cyclop", wohl jedenfalls als mit der vorstehenden identisch gekennzeichnet werden soll Ich finde jedoch in dem Bande, der die „Proceedings" der genannten Gesellschaft für die Zeit von 1863 bis 1894 vereinigt, nur den Titel der Abhandlung, nicht diese selbst (p 112, Session von 1876).

344. Cayley, A. „Note on Magic Squares.“ The Messenger of mathem. *6,* 1877, p. 168 = Collect. Papers *10,* p 38.

345. Frost, A. H. „On the Knight's Path.“ Quart. Journ. of Mathem. *14,* 1877, p. 123—125.

346. Frost, A. H. „A Simple Method of tracing Paths of a Knight“ etc. Quart. Journ. of Mathem. *14,* 1877, p. 354—359.

347. Kamp, Jens. „Danske Folkeminder, Æventyr, Folkesagn, Gaader, Rim og Folketro.“ Odense 1877, p. 322—327: „Tegngaader.“

348. Lauber, G. „Aufklärung von Schachgeheimnissen oder Anleitung zur raschen und sicheren Erlernung der Kunst Rösselgänge .. zu fertigen.“ Ratibor 1877 (auf dem äußeren Umschlag: 1878). 70 S. + 52 Fig.

349. Badoureau, A. „Sur les figures isoscèles“ C. R. (Paris) *87,* 1878, p. 823—825.

350. Brocard, H „Note sur divers articles de la Nouvelle Correspondance.“ Nouv. Corr. mathém. *4*, 1878, p. 45—50 (Nr 18, p. 45/46, betrifft das Dominospiel)

351. Cesàro, E.; Proth, F.; P. S. [Über magische Dreiecke.] Nouv. Corr. mathém. *4,* 1878, p. 159, 293—295, 395—396; *6,* 1880, p. 317—320.

352. Frost, A. H. „On the General Properties of Nasık Squares.“ Quart. Journ. of Mathem. *15,* 1878, p. 34—49.

353. Frost, A. H. „On the general Properties of Nasik Cubes“ Quart. Journ. of Mathem. *15,* 1878, p. 93—123; 366—368 („Description of Plates 3 to 9“).

354. Loyd, S. „Chess Strategy, a Treatise on the Art of Problem Composition.“ 1878

355. „Catalogue of the Chess Collection of the late George Allen, Professor of the Greek Language in the University of Pennsylvania“ Philadelphia 1878. VIII + 89 S.

356. Anton, Friedrich. „Encyklopädie der Spiele“. 4. Aufl. 1884; 5 Aufl 1889. 1 Aufl. soll von 1879 sein, zugleich = 3. Aufl. des ursprünglich von L von Alvensleben verfaßten Buches (1853; 2. Aufl. 1855).

357. Busschop, P. „Recherches sur le jeu du solitaire“, herausg. v J. Busschop. Brügge 1879.

358. Cayley, A. „On the colouring of maps“ Roy. Geogr Soc. Proc. *1,* 1879, p. 259—261 = Collect. Papers *11,* p. 7—8

359. Giesing, Julius „Stifels arithmetica integra.“ Döbeln 1879. 97 S. (p 56—61: Zauberquadrate). Vgl. Nr. 10 dieses Index

360. Hertzsprung, S. „Løsning og udvidelse af opgave 402.“ Tidsskrift for Matematik (4) *3,* 1879, p. 134—140; vgl. a. ibidem p. 79.

361. Johnson, Wm. Woolsey und Story, William E. „Notes on the '15' Puzzle" Amer. Journ. of mathem. *2*, 1879, p. 397—399; p. 399—404.

362. Kempe, A. B. „On the Geographical Problem of the Four Colours." Amer. Journ. of mathem. *2*, 1879, p. 193—200.

362a. Story, W. E. „Notes on the preceding paper." Amer. Journ. of mathem. *2*, 1879, p. 201—204.

Siehe a. Kempes Artikel in Nature *21*, Nov. 1879—April 1880, p. 399—400 und den Auszug daraus in London Math. Soc. Proc. *10*, 1878—1879, p. 229—231. Vgl. a. Nature *20*, May—Nov. 1879, p. 275.

363. Mittenzwey, L. „Mathematische Kurzweil." Leipzig 1879. — 3 Aufl. 1903 — 4. Aufl. 1904. — 5. Aufl. 1907. — 6. Aufl. 1912.

364. Wekerle, L. [Nach Angabe eines Schachkatalogs das Pseudonym eines hervorragenden Schachmeisters (?)]. „Die Philosophie des Schach." Leipzig 1879.

365. Frazer, Persifor. „Three Methods and Forty-Eight Solu tions of the Fifteen Problem." Amer. Philosoph Soc. Proc. *18*, 1878 —1880, p. 505—510; s. a. ibid. p. 419.

366. Macfarlane, A. „On a Calculus of Relationship." Roy Soc Edinb Proc. *10*, 1878—80 (1880), p 224—232.

367. Tait, P G „On the Colouring of Maps" Roy. Soc Edinb. Proc *10*, 1878—80 (1880), p 501—503

368. Tait, P. G. „Note on the Theory of the '15 Puzzle'" Roy. Soc. Edinb Proc. *10*, 1878—80 (1880), p. 664—665 = Scientific Papers by P. G. Tait, vol. *1*, 1898, p 406—407

369. Guthrie, Frederick. „Note on the Colouring of Maps" Roy. Soc Edinb. Proc. *10*, 1878—80 (1880), p. 727—728

369a. Tait, P. G „Remarks on the previous Communication" Roy Soc. Edinb. Proc. *10*, 1878—80 (1880), p 729

370. Bellavitis, G. „Giuoco americano" Atti dell Istituto Veneto (5) *6*, 1879—80, p. 901—904

371. Hermary, H A H „Sur le jeu du solitaire." Assoc franç. *8*, Congrès de Montpellier 1879, Paris 1880, p. 284—294.

372. Laquière, E. M. „Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier" Bull. de la soc. mathém *8*, 1879/1880, p. 82—102, 132—158. Zusammen mit der als Nr 395 dieses Index aufgeführten Abhandlung wiederabgedruckt als besondere Schrift mit dem Haupttitel: „Géométrie de l'échiquier", Paris 1880

373. Cramer, Bernhard. „Lösung aller möglichen Stellungen des Spiel der Fünfzehn (Boss Puzzle)." Leipzig, o. J. [1880?]. 4 S. 16°

374. Fleury, H. „La clé du taquin, ou la solution des quinze." Marseille 1880.

375. Frisby, E. „On magic squares.“ Bull. of the Philosoph. Society of Washington *3*, 1880, p. 143—147.

376. Henry, Charles. [Sur le Taquin.] Gazette anecdotique littéraire, artistique et bibliographique, 5e année, t. 2, Paris 1880, p 87—92; s. a. ibidem p. 58—59. Vgl. zu der Note Henrys auch Nouv. ann de mathém. (2) *20*, 1881, p. 5.

377. Kirkman, T. P. [Über das 15-er Puzzle]. Educ. Times Reprints *34*, 1880 II (1881), p. 113—114 Vgl. a. Nr. 394 dieses Index.

378. Leopold, L. „Das System und die Lösung des Boss Puzzle, Spiel der Fünfzehn.“ Hamburg 1880.

379. Sch. [Schubert, H.]. „The Boss Puzzle.“ Hamburgischer Correspondent Nr. 82, 6. April 1880, S. 11, Sprechsaal.

380. Schubert, H. „Theoretische Entscheidung über das Boss-Puzzle Spiel.“ Hamburg 1880. 2 Aufl.

381. Sylvester, J. J. [Über das Kirkmansche Problem der 15 Pensionatsdamen.] Educ Times Reprints *33*, 1880, p. 53.

382. Tait, P. G. „Note on a Theorem in Geometry of Position.“ Roy. Soc. Edinb. Trans. *29*, 1880, p. 657—660 = Scientific Papers by P. G. Tait, vol. 1, 1898, p. 408—411

383. Tanner, Lloyd. [Über Kartenmischen in der Art des Mongeschen Verfahrens.] Educ. Times Reprints *33*, 1880, p. 73—75.

384. Tissandier, Gaston. „Les carrés magiques à propos du Taquin, jeu mathématique.“ La Nature *8*, 1880, 2ième semestre, p. 81—82.

385. Mondésir, de „Le dernier mot du taquin“ La Nature *8*, 1880, 2ième semestre, p. 266/267.

386. Carpmael, E. „Some Solutions of Kirkman's 15-school-girl problem“ London Math. Soc. Proc. *12*, 1880/81, p. 148—156.

387. Laquière, E. M. „Des carrés doublement magiques“ Assoc. franç *9*, Congrès de Reims 1880, Paris 1881, p. 243—254.

388. Lemoine, Em. „Questions de probabilités et valeurs relatives des pièces du jeu des échecs.“ Assoc franç *9*, Congrès de Reims 1880, Paris 1881, p. 179—183.

1881—1890.

389. Badoureau, A. „Mémoire sur les figures isoscèles.“ Journal de l'école polytechnique, 49ième cahier, *30*, 1881, p. 47—172 (IX: p. 85—88). Auch als Separatdruck: Paris 1881, Gauthier-Villars, erschienen

390. Boncompagni, Baldassare et Catalan, Eugène „Carré magique de la villa Albani.“ Mathesis *1*, 1881, p. 121; 151 (Rectifications).

391. Grierson, George A. „An american puzzle“ The Indian Antiquary *10*, 1881 Bombay, p. 89—90.

392. Harmuth, Th. „Über magische Quadrate und ähnliche Zahlenfiguren.“ Grunerts Archiv Math. Phys *66*, 1881, p. 286—313.

393. Harmuth, Th „Über magische Rechtecke mit ungeraden Seitenzahlen." Grunerts Archiv Math. Phys. *66,* 1881, p. 413—447.

394. Kirkman, T. P. „Note on the Solution of the 15-Puzzle"... Educ. Times Reprints *35,* 1881, p. 29—30. Vgl. Nr. 377 dieses Index.

395. Laquière, E. M. „Note sur le nombre des marches rentrantes du cavalier, que l'on peut obtenir en remplissant successivement les deux demi-échiquiers rectangulaires ayant pour frontière commune l'une des médianes de l'échiquier total." Bull. de la soc. mathém. *9,* 1881, p 11—17. — Vgl. a. Nr. 372 dieses Index.

396. Lemoine, E. „Quelques questions de Géométrie de position sur les figures qui peuvent se tracer d'un seul trait." Assoc franç. *10,* Congrès d'Alger 1881, p. 175—180.

397. Linde, Antonius van der. „Das erste Jartausend der Schachlitteratur." Berlin 1881.

398. Macfarlane, A. „An analysis of relationships." Philos. Magaz. *11,* 1881, p. 436—446.

399. Macfarlane, A. „An Analysis of Relationship." Educational Times Reprints *36,* 1881, p. 78—81. Siehe a. ebda., vol. *35,* 1881, p. 110—111.

400. Polignac, C. de. „Note sur la marche du cavalier dans un échiquier." Bull. de la soc. mathém. *9,* 1881, p 17—24.

401. Tebay, S. und Heppel, G. [Über das 16-zellige magische Quadrat.] Educ Times Reprints *36,* 1881, p. 57—62.

402. Tissandier, Gaston. „Les récréations scientifiques ou l'enseignement par les jeux." Paris 1881.

403. Bourget, J „Sur un problème de permutations successives nommé Battement de Monge" Journal de mathém de Liouville (3) *8,* 1882, p. 413—434.

404. Harmuth, Th., „Über magische Parallelepipeda" Grunerts Archiv Math. Phys. *67,* 1882, p 238—253.

405. Hijo, Paul de (Pseudonym des Abbé Jolivald in Mandern, Kreis Diedenhofen) „Le problème du cavalier des échecs d'après les méthodes qui donnent la symétrie par rapport au centre. Ouvrage contenant plus de quatre cent treize mille parcours du cavalier." Metz 1882 XII + 170 S

406. Lucas, Ed. „Récréations mathématiques." I, II, III, IV. Paris 1882—1894 2 Aufl von I, II 1891 bzw 1896. — In dieses Werk ist eine größere Anzahl von Einzelartikeln des Verfassers, oft in erweiterter verbesserter Fassung, übergegangen, insbesondere die folgenden [die zugesetzten eckigen Klammern geben Band und Abschnitt der „Récr mathém." an, in die der betr. Artikel übernommen ist]: Revue scientifique (2) *17,* 1879—1880, p 154—161 [II, 1ère Récr.]; *18,* 1880, p 948 —953 [I, 4ième Récr.]; *19,* 1880—1881, p 36—42 [I, 7ième & 6ième Récr.];

ibid. p. 375—380 [I, 2ième Récr.]; (3) *1*, 1881, p. 408—412 [I, 1re Récr.]; ibid. p. 783—788 [I, 8ième Récr.]; *2*, 1881—1882, p. 365—370 [I, 5ième Récr.]; *5*, 1883, p. 555—557 [II, 3ième Récr.]; *6*, 1883—1884, p. 12—17 [IV, 7ième Récr.]; ibid. p. 370—375 [IV, Note I, p. 205 ff.]; ibid. p. 812 [IV, p. 8—9]; *8*, 1884—1885, p. 482—496 [III, 2ième Récr. und I, 6ième Récr., sowie verschiedene Kapitel der „Arithmétique amusante", Nr 539 dieses Index]. Siehe a. die Notiz zu Nr. 440 dieses Index. — Vgl. auch Nr. 558 dieses Index.

407. Macfarlane, A „Algebra of relationship" Roy Soc. Edinb. Proc. *11*, 1882, p. 5—14; 162—173.

408. Malmsten, C J. „Generalisering af det s. k. 'Femtonspelet' (Boss Puzzle-Spel)." Göteborgs kongl. Vetenskaps- och Vitterhets-Samh. Handlingar, Ny Tidsföljd, XVII. Häftet, 1882, p. 77—105.

409. Monteiro, Alfredo Schiappa. „Solução da questão proposta No. 17." Jornal di Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pel Dr. F. Gomes Teixeira, *3*, 1882, p 81—86

410. Scheffler, H. „Die magischen Figuren." Leipzig 1882.

411. Cherriman, J. B „Note on the Bishop's Move at Chess" Roy. Soc. of Canada Proc. and Transactions *1*, 1882 u. 1883, Montreal 1883: Trans., Sect. III, p. 19.

412. Biddle, D. „On the Relative Values of the Chessmen." Educ. Times Reprints *40*, 1883 (1884), p. 85—97.

413. Frost, A. H. Artikel „Magic squares" in Encyclopaedia britannica *15*, 1883, p. 213—216.

414. Harmuth, Th „Über polydimensionale Zahlenfiguren." Grunerts Archiv Math. Phys *69*, 1883, p 90—107.

415. Lucas, Ed „Sur l'arithmétique figurative — Les permutations." Assoc. franç. *12*, Congrès de Rouen 1883 (1884), p 83—97

416. Macfarlane, A. „Analysis of relationships of consanguinity and affinity." Anthropol. Inst. Journ. *12*, 1883, p 46—63

417. Macfarlane, A „Arithmetical notation of kinship." Nature *28*, 1883, p. 588.

418. Mantel „Sur les combinaisons d'éléments dispersés dans un plan." Assoc franç. *12*, Congrès de Rouen 1883, Paris 1884, p 171—175

419. Parmentier, Th „Problème des *n* reines." Assoc franç. *12*, Congrès de Rouen 1883, Paris 1884, p 197—213.

420. Perott, J. „Sur le problème des fous" Bull. de la soc. mathém *11*, 1883, p. 173—186

421. Allardice, R E und Fraser, A. Y. „La Tour d'Hanoï" Edinb. Mathem Soc Proc. *2*, 1883—1884, Edinburgh 1884, p 50—53.

422. Schoute, P H „Wiskundige Verpoozingen" Eigen Haard. Geïllustreerd volkstijdschrift, onder redactie van H. de Veer, E. van den Ven, en C. Rochussen, Haarlem 1883 und 1884

423. Biddle, D. [Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über den Rösselsprung.] Educ. Times Reprints *41,* 1884, p. 70—72.

424. Frolow (Froloff), M. „Le problème d'Euler et les carrés magiques." Avec un atlas. Traduit du Russe. St.-Pétersbourg 1884. (Auch eine Ausgabe: Paris 1884, wird zitiert). — „Nouvelle étude, suivie de Notes par M. M. Delannoy et Ed. Lucas." Paris 1886. — Außerdem noch ein Neudruck ohne Jahresangabe: „Les carrés magiques". — Vgl. a Nr. 440 dieses Index.

425. Héraud, A. „Jeux et récréations scientifiques." 1884. — Paris 1903.

426. Jenkins, M.; Biddle, D. „Solution of question 7623." [Rösselsprung.] Educ. Times Reprints *41,* 1884, p 93—96; 96—98.

427. Palamède (Vte du Ligondès). „Polygraphie du cavalier appliquée à la recherche des carrés magiques." Orléans 1884 (nach ander. Ang.: 1874).

428. Parville, Henri de. „La Tour d'Hanoï et la Question du Tonkin." La Nature *12,* 1884, premier semestre, p. 285—286; s. a. Journal des Débats v. 27. Dezbr. 1883.

429. Tait, P. G. „Listing's Topologie." Introductory Address to the Edinburgh Mathematical Society, Nov. 9, 1883 Philos. Magaz. (5) *17,* 1884, I, p. 30—46 = Scientific Papers by P. G. Tait, vol. 2, 1900, p. 85—98.

430. Tannery, Paul. „Manuel Moschopoulos et Nicolas Rhabdas" Bull. des sc. mathém. et astronom (2) *8,* 1884, p. 263—277. — Siehe Nr 4 dieses Index.

431. Arnoux, Gabriel „Solutions des carrés de magie diverse de tous les nombres entiers sans exception." Assoc franç. *14,* Congrès de Grenoble 1885, t. I, Paris 1886, p 94

432. Baltzer, R. „Eine Erinnerung an Moebius und seinen Freund Weiske." Leipziger Ber, Math.-phys. Kl. *37,* 1885, p. 1—6.

433. (Cram, James.) „Magic Squares" Dundee 1885

434. Deveau-Carlier, Alfred. „Le solitaire amusant." 1885

435. (Dommisse, J und) Schoute, P. H „Sur les carrés magiques à enceinte" Assoc. franç *14,* Congrès de Grenoble 1885, I (1886), p 93: II (1886), p 152—155

436. Schurig, R „Mathematisches." Deutsche Schachzeitung *40,* 1885, p. 337—338 Wertlose Anzahlbestimmung.

437. Wihnyk „Zum Problem des Rösselsprungs." Deutsche Schachzeitung *40,* 1885, p 98—101; 289—294

438. „Katalog der Schach-Bibliothek des verstorbenen Herrn Robert Franz" Berlin 1885.

439. Gilbert, G K. „The problem of the Knight's tour." Philos. society of Washington *7,* 1885, p. 88 in Smithsonian miscellaneous collections *33,* Washington 1888

440. Lucas, Ed. „Les carrés magiques de Fermat" Journal de mathém. élém. (2) *4* (9e année), 1885, p. 104—111, 130—136, 148—153, 176—180; (3) *1*, 1887, p. 32—34. Wiederabgedruckt in des Verfassers „Récréations mathématiques" (Nr. 406 dieses Index), t. IV, 5ième Récr.; s. a. Note III in der unter Nr. 424 dieses Index aufgeführten Schrift von Frolow von 1886; s. a. „Oeuvres de Fermat", t. IV (Paris 1912), p. 186—190.

441. Berg, F. J. van den. „Over zeker spel." Nieuw Archief voor Wiskunde *12*, 1886, p. 38—59.

442. Coccoz, V. „Carrés magiques impairs à enceintes successives." Assoc. franç. *15*, Congrès de Nancy 1886, Paris 1887, II, p. 130—134.

443. Delannoy, H. „Emploi de l'échiquier pour la solution de problèmes arithmétiques." Assoc. franç. *15*, Congrès de Nancy 1886, Paris 1887, II, p. 183—188.

444. Frolow (Froloff), M. „Nouvelles recherches sur les carrés magiques." Assoc franç. *15*, Congrès de Nancy 1886, Paris 1887, I, p. 87; II, p. 170—183.

445. Hofmann, Fritz. „Sur la marche du cavalier." Nouv annal. de mathém. (3) *5*, 1886, p. 224—226.

446. Kürten, J. B. „Theorie der magischen Zahlen-Quadrate und Kreise." Köln 1886.

447. Mac Mahon, P. A. „Certain special partitions of numbers." Quart. Journ. of Mathem. *21*, 1886, p. 367—373.

448. Schurig, R. „Die Paarung der Teilnehmer eines Turniers." Deutsche Schachzeitung *41*, 1886, p. 134.

449. Tannery, Paul. „Le traité de Manuel Moschopoulos sur les carrés magiques, texte grec et traduction." Annuaire de l'association pour l'encouragement des études grecques en France, 20e année, 1886, p. 88—118. Siehe Nr. 4 dieses Index, sowie a. Nr. 430

450. Tarry, G „Géometrie de situation: nombre de manières distinctes de parcourir en une seule course toutes les allées d'un labyrinthe rentrant, en ne passant qu'une seule fois par chacune des allées." Assoc. franç. *15*, Congrès de Nancy 1886, Paris 1887, I, p 81; II, p 49—53.

451. „Familien-Spiele aus dem im Besitz Ihrer Kaiserlichen und Königlichen Hoheiten des Kronprinzen und der Kronprinzessin des Deutschen Reiches und von Preußen befindlichen Spielschrein." Herausg. v. d. Verein für deutsches Kunstgewerbe in Berlin. Berlin 1886. (Vorhanden in der Bibliothek des Berliner Kunstgewerbemuseums). — Vgl. dazu einen Aufsatz von Franz Reuleaux in Westermanns Monatsheften *61*, Okt. 1886—März 1887, p. 72—88, 185—195

452. Berdellé, Ch. „La numération binaire et la numération octavale." Assoc. franç. *16*, Congrès de Toulouse 1887, I, Paris 1887, p 170; II, Paris 1888, p. 206—209.

453. Frith, A. „The Magic Square." Belfast 1887.

454. Hertzsprung, S. „En kombinationsopgave." Tidsskrift for Matematik (5) *5*, 1887, p. 13—17.

455. Lasa, Tassilo von Heydebrand und der —. „Verzeichnis meiner Sammlung von Schriften über das Schachspiel, in 75 Exemplaren zur Vertheilung gedruckt." Wiesbaden 1887. — Zweite Ausgabe: „Erneutes Verzeichniss einer Sammlung von Schriften über das Schachspiel." Wiesbaden 1896. 208 S. Die beiden Privatdrucke sind verschiedenen größeren Bibliotheken des In- und Auslandes übersandt.

456. Lucas, Ed. „Amusements par les jetons." La Nature *15*, 1887, 2ième semestre, p. 10/11.

457. Rivelly, Alf. „I giuochi matematici." Napoli 1887.

458. Robin. „Carrelage illimité en polygones réguliers." La Nature *15*, 1887, 2ième semestre, p. 95/96.

459. Saccani, F. „Quadrati e cubi magici." Reggio d'Emilia 1887.

460. Weinbrenner, L. „Neuer Modus zur Bestimmung der Reihenfolge der Preisträger bei Schachturnieren nebst einem Anhang enthaltend die Paarungstabellen für Schachturniere." Wien 1887.

461. „An old chess puzzle" [Achtdamenproblem]. The Chess Monthly *9*, 1887/8, p. 262—266, 314—315. (Der zweite, wichtigere Teil von „J.C.S.").

462. Barnard, F. A P „Theory of magic squares and of magic cubes." Memoirs of the National Academy of Sciences *4*, part. 1, Washington 1888, p. 207—270.

463. Chambeyron, L. „Théorie des carrés magiques." Paris 1888. 29 S.

464. Clauß, Felix. „Über magische Quadrate." Hoppes Arch. Math. Phys (2) *6*, 1888, p. 424—436.

465. Jordan, C. „Sur la marche du cavalier." Palermo Rendiconti *2*, 1888, p. 59—68. — Bestimmung der Minimalzahl von Springerzügen zwischen zwei gegebenen Feldern unter Voraussetzung eines unbegrenzten Brettes.

466. Macfarlane, A. „Problem in relationship" Roy. Soc Edinb. Proc. *15*, 1888, p. 116—117

467. Macfarlane, A [„Onkel und Neffe"] Educ Times Reprints *49*, 1888, p. 114.

467 a. Biddle, D [„Onkel und Neffe."] Educ Times Reprints *49*, 1888, p 115—116.

468. C P. [C Planck.] „Magic Squares, Cubes, etc" English mechanic and world of science, vol. *47*, 1888, March 16, p. 60

469. Berg, F J. van den. „Over even tovervierkanten" Nieuw Archief voor Wiskunde *16*, 1889, p 1—31.

470. Brunner, Heinr. „Duodecimalsystem und Decimalsystem in den Bußzahlen der fränkischen Volksrechte" Sitzungsber der Berl Akad. 1889 II, p. 1039—1043.

471. Cunningham, A. „Chess Problem." Royal Engineer's Journal 1889 und British Assoc. Report, Leeds 1890, p. 745.

472. Delannoy, H. „Emploi de l'échiquier pour la résolution de divers problèmes de probabilité" Assoc. franç. *18*, Congrès de Paris 1889, I (1889), p. 229—230; II (1890), p. 43—52; *24*, Congrès de Bordeaux 1895, I, p. 117; II (Paris 1896), p. 70—90.

473. Frolow (Froloff), M. „Egalités à deux degrés." Bull. de la soc. mathém. *17*, 1889, p. 69—83; s. a. C. R. (de Paris) *107*, 1888, p. 831—832. — Vgl. Nr. 505 dieses Index.

474. Longchamps, G. de. „Sur les égalités à deux degrés." Journal de mathém. élém. (3) *3*, 1889, p. 171—173; 195—198.

475. Lucas, Ed. „Jeux scientifiques pour servir à l'histoire, à l'enseignement et à la pratique du calcul et du dessin." 6 Broschüren 1. „Fasioulette." 2 „Pipopipette." 3. „La Tour d'Hanoï" 4. „L'Icosagonal ou le Jeu des vingt forts" 5. „L'arithmétique diabolique." 6. „Les Pavés florentins du père Sébastien."). Paris 1889 — Referat in der Zeitschrift Le Cosmos, 39ème année, t. *15* (nouvelle série), 1890, p. 156—159.

476. Pein, A „Aufstellung von n Königinnen auf einem Schachbrett von n^2 Feldern derart daß keine von einer andern geschlagen werden kann (von $n = 4$ bis $n = 10$)." Progr. der Realschule zu Bochum. Leipzig 1889.

477. Rohn, K. „Beitrag zum Acht-Damen-Problem" Abhandl. der Naturw. Gesellsch. Isis in Dresden 1889, Juli—Dez., p. 89—92.

478. „Der Zauberer im Familienkreise." 2. Aufl. Mülheim a d Ruhr (1889).

479. Sprague, T. B „On the different possible non-linear arrangements of eight men on a Chess-board" Edinburgh Mathem. Soc Proc. *8*, 1889/90, p. 30—43

480. Cayley, A „On latin squares" The Messenger of mathem (2) *19*, 1890, p. 135—137 = Collect Papers *13*, 1897, p. 55—57

481. Frolow (Froloff), M. „Sur les permutations carrées" Journ de mathém spéciales (3) *4*, 1890, p 8—11, 25—30.

482. Gutzmer, A. „Eine geometrische Frage" Naturwiss Wochenschr. *5*, 1890, p 399; *6*, 1891, p 143

483. Heawood, P J „Map-colour theorem" Quart Journ of Mathem. *24*, 1890, p 332—338

484. Hoppe, R „Bemerkung zum Königinnen-Problem." Hoppes Archiv Math. Phys (2) *8*, 1890, p. 333—334

485. Le Cointe, J. L A [Ketten im Dominospiel.] Le Cosmos *16*, Paris 1890, p 266—268, 294—298.

486. Nash [Über den Rösselsprung. Eine Anzahlbestimmung.] Educ. Times Reprints *53*, 1890, p 36—38

487. Parmentier, Th. „Sur les carrés magiques." Assoc. franç. *19*, Congrès de Limoges 1890, I, Paris 1890, p. 147—148; II, Paris 1891, p. 88—99.

488. (Schoute, P. H.) „Sur l'arrangement des joueurs et des parties dans un concours de dames ou d'échecs." L'écho de Paris, 22. Sept u. 4. Okt. 1890. — Vortrag, geh. auf dem Kongreß der „Association française pour l'avancement des sciences" zu Limoges 1890 (s. den Compte rendu dieses Congrès, t. I, p. 148); Ed. Lucas teilte den Vortrag der angegebenen Zeitung mit, die ihn unter dem Namen „Pic de Brasero" abdruckte.

489. Schwidtal, Albrecht. „Die Darstellung aller Zahlen durch die Zahl 3." Beil. z. Progr. Gymn. Königshütte 1890

490. Simon, H. „Die acht Königinnen auf dem Schachbrett." Naturwiss. Wochenschr. *5*, 1890, p 215.

491. Tarry, H. „Le problème des reines." Assoc franç. *19*, Congrès de Limoges 1890, I, Paris 1890, p. 153.

1891—1900.

492. Brunel, G. [Verschiedene topologische Arbeiten resp Referate über diese]

1. Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux (3) *5* (Paris und Bordeaux 1890), Extraits des procès-verbaux des séances 1888/89, 1889/90, p. LXXXIX;

2. ibidem, Mémoires .. (4) *4* (1894), Procès-verbaux 1892/93, p. IX—XII, XVIII—XX, XXV—XXVI, LIII;

3. ibidem, Mémoires .. (4) *5* (1895), p 165—215 („Analysis situs. Recherches sur les réseaux"), Procès-verbaux 1893/94, p XIV—XV, XXXIX—XL, s a. ibid p XXIX—XXXI, XLVII—XLVIII

493. Heffter, L. „Über das Problem der Nachbargebiete" Mathem. Annal. *38*, 1891, p. 477—508

494. Herrmann, F „Über die Theorie der magischen Systeme" Ber. des Freien Deutschen Hochstiftes, N. F *7*, 1891, II, p. 117—129

495. Lévy, Lucien. „Sur les pavages à l'aide de polygones réguliers" Bull de la soc philomathique (8) *3*, 1890—91 (1891), p 46—50.

496. Lucas, Ed „Théorie des nombres" *1*, Paris 1891 (mehr nicht erschienen; über den Plan eines 2. Bandes s. Interméd. des mathém *1*, 1894, p 94; *2*, 1895, p 341). — Vgl. zu *1* auch Assoc. franç *19*, Congrès de Limoges 1890, I, p 148

497. Parmentier, Th „Le problème du cavalier aux échecs." Assoc. franç., Congrès de Marseille 1891, Congrès de Pau 1892, Congrès de Caen 1894 Spezialveröffentlichungen der „Association française", in deren „Comptes rendus" nicht abgedruckt und im Buchhandel nicht erhältlich.

498. Petersen, Julius. „Die Theorie der regulären graphs" Acta mathem. *15*, 1891, p. 193—220

499. Ullrich, Edward. „Das Rechnen mit Duodecimalzahlen" Progr. Realschule Heidelberg 1891.

500. Johnson, Woolsey. „Octonary numeration." New York Math. Soc. *1*, 1891/92, p. 1—6.

501. Schubert, Herm. „The magic square." The Monist *2*, Chicago 1891—92, p. 487—511. — Im wesentlichen eine Übersetzung des Abschnittes VI aus dem unter Nr. 541 dieses Index aufgeführten Buche und wohl später in Nr. 575[1] übergegangen.

502. Ball, W. W. Rouse. „Mathematical Recreations and Problems." London 1. und 2. Aufl. 1892; 3. Aufl. 1896. — 4. Aufl. („Mathematical recreations and essays.") 1905. — 5. Aufl. 1911.

502a. Ball, W. W. Rouse. „Récréations et problèmes mathématiques." Übers. der 3. engl. Ausg. ins Französ. von J. Fitz-Patrick. Paris 1898. — Zweite französische Ausgabe („Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes"), nach der 4 englischen, mit vielen Zusätzen von J. Fitz-Patrick. Teil 1, Paris 1907; Teil 2, Paris 1908; Teil 3, Paris 1909. — Eine italienische Ausgabe des Ballschen Werkes („Ricreazioni e problemi matematici dei tempi antichi e moderni") veranstaltete nach dem englischen Original Dionisio Gambioli. Bologna, o. J. [1911]. 398 S.

503. Coccoz, V. „Construction des carrés magiques avec des nombres consécutifs" und weitere Abhandlungen über magische Quadrate. Assoc. franç *21*, Congrès de Pau 1892, I, Paris 1892, p. 155; II, Paris 1893, p. 136—148; *22*, Congrès de Besançon 1893, p. 171—183; *23*, Congrès de Caen 1894, I, Paris 1894, p. 98; II, Paris 1895 p 163—183; *24*, Congrès de Bordeaux 1895, I, Paris 1895, p. 179; II, Paris 1896, p. 102—110; *31*, Congrès de Montauban 1902, II, Paris 1903, p. 137—157; *32*, Congrès d'Angers 1903, I, Paris 1903, p. 112—113; II, Paris 1904, p. 142—157. Siehe a. Nr. 442 dieses Index.

504. Falkener, Edward. „Games ancient and oriental and how to play them. Being the games of the ancient Egyptians, the hiera gramme of the Greeks, the ludus latrunculorum of the Romans and the Oriental games of chess, draughts, backgammon and magic squares" London 1892

505. Frolow (Froloff), M. „Égalités à deux et à trois degrés." Bull de la soc. mathém *20*, 1892, p 69—84. — Vgl. Nr. 473 dieses Index.

506. Gutzmer, A. „Aus der Unterhaltungs-Arithmetik." Naturwiss. Wochenschr *7*, 1892, p. 251—252.

507. Massip, Maurice. „Les carrés magiques." Mém. de l'Acad. des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse (9) *4*, 1892, p 423—454.

508. Schlegel, V. „Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions." Bull. de la soc. mathém. de France *20*, 1892, p 97—103

509. Schlegel, V. „Die allgemeinen Grundlagen zweier Probleme aus der Unterhaltungs-Arithmetik.“ Hoppes Archiv Math. Phys. (2) *11*, 1892, p. 93—100.

510. Schwab, Moïse. „Médailles et amulettes à légendes hébraiques conservées au Cabinet des Médailles et Antiques de la Bibliothèque nationale“ Revue numismatique, 3ième série, t. X, 1892, p. 241—258. (Amulette mit magischen Quadraten).

511. Roberts, Samuel. „On certain General Limitations affecting Hyper-magic Squares.“ London Math. Soc. Proc. *24*, 1892/93, p 37—53.

512. Portier, B. „Constructions nouvelles des carrés diaboliques de 9 et du carré satanique de 9.“ Alger 1893. Siehe a. Assoc. franç. *22*, Congrès de Besançon 1893, I, p. 173. — Zweite Ausgabe („Le carré diabolique de 9 et son dérivé, le carré satanique de 9, tirés du carré magique de 3“). Alger 1895. 32 S. — Unter demselbeh Titel, wie die Ausgabe von 1895, existiert eine als völlig verändert bezeichnete Ausgabe: Alger-Paris 1902. 29 S.

513. Schlegel, V. „Magische Würfel von 2—5 Dimensionen.“ Nachtrags-Katalog mathematischer u. mathem.-physik. Modelle, Apparate u. Instrumente, herausg. v. W. Dyck. Leipzig 1893.

514. Sundara Row, T. „Geometrical exercises in paper-folding.“ Madras 1893. Addison & Co. — Eine neue Ausgabe, herausg. von W. W. Beman und D. E Smith, soll 1905 in Chicago im Verlage der „Open Court Publishing Co.“ erschienen sein.

515. Sylvester, J. J. „Note on a nine schoolgirls problem“ The Messenger of mathem. (2) *22*, 1893, p 159—160; 192 = The Collected Mathem Papers of J J. Sylvester, vol. IV, Cambridge 1912, p. 732—733.

516. Vinot, J „Récréations mathématiques.“ 3 Aufl Paris 1893; 4 Aufl. 1898, 5 Aufl. 1902; 6. Aufl 1911. 215 S — Es soll eine Ausgabe von 1860 — also wohl die erste — existieren

517. Ball, W. W. Rouse „Even magic squares“ The Messenger of mathem *23*, 1893/94, p. 65—69.

518. Burnside, W „On an application of the theory of groups to Kirkman's Problem“. The Messenger of mathem *23*, 1893/94, p. 137—143.

519. Dixon, A. C „Note on Kirkman's problem.“ The Messenger of mathem *23*, 1893/94, p 88—89.

520. Smyth, B S. (oder B B). „Harmonic forms“ Trans of the Kansas Acad. of Science *14*, 1893/94 (nach ander. Angabe: 1896), p. 46—83.

521. Arnoux, Gabriel. „Arithmétique graphique Les espaces arithmétiques hypermagiques.“ Paris 1894. — Referat von C A Laisant im Bull. de la société mathém de France *22*, 1894, p 28—36, sowie (russisch) von J. A Isnoskow in den Nachr. der physiko-mathem. Gesellsch. an der Kaiserl Univers zu Kasan (2) *5*, 1896, p 48—60.

522. Cavendish. „Recreations with magic squares." London 1894.

523. Curtze, M. „Zur Geschichte des Josephspiels." Bibl. mathem. (2) *8*, 1894, p. 116. Siehe a. Nr 534 dieses Index.

524. Fleury, Henry. [Über das „Chamäleon" und verwandte Spiele.] Interméd. des mathém. *1*, 1894, p. 215—216.

525. Flye Sainte-Marie, C. [Über Dominoketten] Interméd des mathém. *1*, 1894, p. 164—165.

526. Franel, J. [Über das Achtdamenproblem.] Interméd. des mathém. *1*, 1894, p. 140—141.

527. Maillet, E. „Sur une application de la théorie des groupes de substitutions à celle des carrés magiques." Mémoires de l'acad. des sc. de Toulouse (9) *6*, 1894, p. 258—280.

528. Maillet, E. „Sur les carrés latins d'Euler." Assoc. franç *23*, Congrès de Caen 1894, I, p. 101/102; II (1895), p. 244—252.

529. Redon, P. „Nouvelles recherches sur le jeu du taquin." Paris 1894.

530. Schurig, R. „Die Paarung der Theilnehmer eines Turniers." Deutsche Schachzeitung *49*, 1894, p. 33—38

531. Steinert, O „Über ebene zusammenhangende Liniengebilde." Arch. Math. Phys. (2) *13*, 1894, p. 220—222.

532. Wolf, Rudolf. „Studie über den Rösselsprung" (= Nr. 83 aus des Verfassers Artikelserie „Astronomische Mitteilungen"). Vierteljahrsschrift der Naturforsch Gesellsch. Zürich, 39 Jahrg, 1894, p. 147—164.

533. Cesàro, Franel, Adrien Akar, Delannoy, Moreau [Über das Josephsspiel resp. das sogenannte Caligulaproblem.] Interméd. des mathém. *1*, 1894, p. 30—31, 189—190; *2*, 1895, p. 120—122, 229.

534. Curtze, M. „Weiteres über das Josephspiel." Bibl. mathem. (2) *9*, 1895, p 34—36. Siehe Nr. 523 dieses Index. — Siehe a. Abhandlungen zur Gesch der Mathematik, Heft 7 (Supplement zur Zeitschr. Math. Phys *40*), 1895, p 112: „Die Handschrift Nr 14836 der Königl Hof- und Staatsbibliothek zu München"

535. Dickson, L E. „Gergonne's pile problem." Amer. Math. Soc. Bull. (2) *1*, 1895, p. 184—186.

536. Fontès, J „Sur les carrés à bordure de Stifel." Assoc franç. *24*, Congrès de Bordeaux 1895, I (Paris 1895), p. 184; II (Paris 1896), p 248—256 Vgl. Nr. 10 dieses Index.

537. Laisant, C. A. „Recueil de problèmes de mathématiques classés par divisions scientifiques contenant les énoncés, avec renvoi aux solutions de tous les problèmes posés depuis l'origine dans divers journaux: Nouvelles Annales de Mathématiques, Journal de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales, Nouvelle Correspondance mathématique, Mathesis" III. Algèbre Théorie des nombres Probabilités Géométrie de situation. Paris 1895.

538. Landau E. „Zur relativen Wertbemessung der Turnierresultate.“ Deutsches Wochenschach *11*, 1895, p. 366—369.

539. Lucas, Ed. „L'arithmétique amusante.“ Paris 1895. — Siehe a. die Zusätze zu Nr. 406 dieses Index.

540. Maillet, E. „Application de la théorie des substitutions à celle des carrés magiques.“ Quart Journ. of Mathem. *27*, 1895, p. 132—144.

541. Schubert, H. „Zwölf Geduldspiele.“ Berlin 1895. (Zuerst erschienen unter dem Titel „Mathematische Spielereien in kritischer und historischer Beleuchtung“ in: Naturwiss Wochenschr. *7*, 1892; *8*, 1893; *9*, 1894.) — Neue Ausgabe Leipzig 1899 — Vgl. auch Nr. 501 und Nr. 575[1] dieses Index.

542. Schubert, H. „Ein zahlentheoretischer Satz.“ Mitteil. d. mathem. Gesellsch. zu Hamburg *3*, 1895, p. 223—225.

542a. Busche, E. „Beweis des vorstehenden Satzes von Herrn Schubert.“ Ibidem, p. 225—226.

542b. Ahrens, W. „Über einen zahlentheoretischen Satz des Herrn Schubert.“ Zeitschr. für Math. und Phys. *40*, 1895, p. 245—247.

543. Smyly, Gilbert. [Lösung des Shilling-Sovereign-Problems.] Educ. Times Reprints *62*, 1895, p. 42; vgl. a. ibidem *59*, 1893, p. 45 (R. F Davis).

544. Tarry, G. „Propriétés du carré magique de 3.“ Journal de mathém. élém (4) *4*, 1895, p 55—56.

545. Tarry, G. „Le problème des labyrinthes.“ Nouv. annal. de mathém. (3) *14*, 1895, p 187—190

546. Tarry, G. „Sur la théorie des carrés magiques impairs à deux degrés“ 4 S, 1 Tafel. Anscheinend eine Sonderveröffentlichung der „Assoc. franç“, in deren Compte rendu *24*, Congrès de Bordeaux 1895, I, Paris 1895, p. 179 nur ein kurzes Referat steht

547. Frost, A. H. „The Construction of Nasik Squares of any Order“ London Mathem. Soc Proc *27*, 1895/6, London 1896, p 487—518.

548. Busche, E „Über die Schubert'sche Losung eines Bachet'schen Problems“ Mathem. Annal. *47*, 1896, p 105—112

549. Gelin. „Du meilleur système de numération et de poids et mesures.“ Mathesis (2) *6*, 1896, p. 161—164

550. Landau, E „Über das Achtdamenproblem und seine Verallgemeinerung.“ Naturwiss Wochenschr *11*, 2 Aug 1896, p 367—371.

551. Latoon, F „On common and perfect magic squares“ London 1896 140 S.

552. Moore, E. H „Tactical Memoranda I—III“ Amer. Journ of Mathem. *18*, 1896, p 264—303

553. Maddison, J. „Note on the history of the map-coloring problem“ Amer. Mathem Soc. Bull. (2) *3*, 1896/7, p 257

554. Ahrens, W. „Über das Gleichungssystem einer Kirchoff'schen galvanischen Stromverzweigung.“ Mathem. Annal. *49*, 1897, p 311—324.

555. Berdellé, Ch. „L'Arithmétique des Gammes" Assoc. franç. *26*, Congrès de Saint-Étienne 1897, I, Paris 1898, p. 181; II, Paris 1898, p. 198—201.

556. Davis, Ellery W. „A geometric picture of the fifteen school girl problem." Annals of Mathem. *11*, 1897, p. 156—157.

557. Gochmann, Ch. „Darstellung der Züge der Schachfiguren durch complexe Größen." 1897. Spaczinski's Bote Nr. 263 (Russisch).

558. Grosse, W. „Unterhaltende Probleme und Spiele in mathematischer Beleuchtung." Leipzig 1897. Zu einem nicht unerheblichen Teil nur eine verständnislose und daher fehlerhafte, übrigens unerlaubte Übersetzung einzelner Abschnitte des Lucas'schen Werkes (Nr. 406 dieses Index), in dem Grosse sogar „eine ganze Reihe von Fehlern" entdeckt oder nachgewiesen haben will; auf wessen Seite diese „Fehler" liegen, s. aus der Besprechung in Zeitschr. f. Math. u. Phys. *44*, 1899, p. 125—126.

559. Mc Clintock, Emory. „On the most perfect forms of magic squares, with methods for their production." Amer. Journ of Mathem. *19*, 1897, p. 99—120. (Read before the Amer. Mathem. Soc., April 25, 1896).

560. Pitrè, Giuseppe. „Indovinelli, Dubbi, Scioglilingua del popolo siciliano" = Biblioteca delle tradizioni popolari siciliane, vol. XX, Torino-Palermo 1897.

561. Stäckel, Paul. „Über Nachbargebiete im Raume" Zeitschr. f. Math. u. Phys. *42*, 1897, p. 275—276.

562. Tarry, H. „Problème des n reines sur l'échiquier de n^2 cases" Assoc. franç. *26*, Congrès de Saint-Étienne 1897, I, Paris 1898, p. 176.

563. Lange, Max. „Das Schach vom akademischen Standpunkt." Berliner Schachzeitung *2*, 1897/98, p 1—5.

564. Tait, P. G. „On the Generalization of Josephus' problem" Edinburgh Roy Soc Proc. *22*, 1897/99, Edinburgh 1900, p 165—168 = P. G. Tait, Scientific Papers *2*, Cambridge 1900, p 432—435.

565. Wernicke, P „On the solution of the map color problem." Amer. Mathem. Soc. Bull (2) *4*, 1897/8, p. 5.

566. Boije af Gennäs, C. O. „Sur un problème d'Euler mentionné par Legendre dans sa théorie des nombres (3e Éd T. II p. 144) et quelques notes sur les carrés magiques de 3 et de 4." Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Band *24*, Afd. I, No 2, Stockholm 1898 15 S.

567. Heawood, P. J „On the four-colour map theorem" Quart. Journ. of Mathem *29*, 1898, p. 270—285.

568. Heffter, L. „Über metacyklische Gruppen und Nachbarconfigurationen." Mathem Annal. *50*, 1898, p. 261—268; s. a. von demselben · „Über Nachbarconfigurationen, Tripelsysteme und metacyklische Gruppen." Deutsche Mathem.-Vereinig. Jahresber. *5*, 1896, Leipzig 1901, 1 Heft, p. 67—68.

569. Hellenbach, Lazar Baron von. „Die Magie der Zahlen als Grundlage aller Mannigfaltigkeit und das scheinbare Fatum." 2. Aufl. Leipzig 1898. 3. Aufl. Leipzig 1910. — Als Erscheinungsjahr und -ort der 1. Ausgabe wird angegeben: Wien 1882.

570. Mac Mahon, P. A. „A new method in combinatory analysis, with application to latin squares and associated questions." Transactions of the Cambridge Philos. Society *16,* 1898, p. 262—290.

571. Mertelsmann, A. F. H. „Das Problem der 15 Pensionatsdamen." Zeitschr. für Math. und Phys. *43,* 1898, p. 329—334.

572. Netto, Eugen. Artikel „Kombinatorik" (1898) in: „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften", Bd. 1, Leipzig 1898—1904, p. 28—46. — Französisch in der Bearbeitung von H. Vogt in: „Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées", Édition française, publiée sous la direction de Jules Molk, t. 1, vol. I, fasc. 1, 1904, p. 63—132 („Analyse combinatoire et Théorie des déterminants").

573. Peano, Giuseppe. „La numerazione binaria applicata alla stenografia." Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. *34,* 1898—1899 (1898), p. 47—55.

574. Petersen, J. [Über den (mit dem Farbenkartenproblem in Zusammenhang stehenden) Satz von Tait.] Interméd. des mathém. *5,* 1898, p. 225—227; *6,* 1899, p. 36—38

575. Schubert, H. „Mathematische Mußestunden." Leipzig 1898 (1 Bd.). — Zweite Aufl. (Große Ausgabe in 3 Bänden) 1900. — 3. Aufl. (3 Bde) 1907—1909 — Daneben kleine Ausgabe, 2. Aufl., 1904; 3. Aufl. 1907. — Die Bezeichnung der Ausgaben, deren zr. Zt. neueste als „Kleine Ausgabe. Dritte Auflage" und „Große Ausgabe Dritte Auflage" bezeichnet sind, ist nicht einwandfrei und irreführend; es sei daher hier ausdrücklich bemerkt, daß nicht etwa 6 verschiedene Auflagen — 3 der großen und 3 der kleinen Ausgabe — existieren, sondern nur 5 (3 der kleinen und 2 der großen Ausgabe).

575[1]. Schubert, H. „Mathematical Essays and Recreations" From the German by Th. J. Mc Cormack London und Chicago 1898 149 S — 2 Aufl. 1903. — Wohl eine Übersetzung von Nr 541; vgl. a Nr. 501.

576. André, Désiré „De la comptabilité des assauts complets." Bull de la soc. philomathique (9) *1,* 1898—99 (1899), p. 139—153. Vgl. dazu a Interméd. des mathém. *7,* 1900, p 265/6, sowie Nr. 586 dieses Index

577. Sprague, T. B „On the Eight Queens Problem" Edinburgh Mathem. Soc. Proc *17,* 1898/99, p. 43—68.

578. Fourrey, E. „Récréations arithmétiques." Paris 1899 263 S — 2e édit. 1901.

579. Landau, E. „Eine Schachfrage" Der Schachfreund, herausg v. d Berl. Schachgesellschaft *2,* 1899, p. 97—99

580. **Moore**, E. H. „Concerning the General Equations of the Seventh and the Eighth Degrees." Mathem. Annal. *51*, 1899, p 417—444.

581. **Polignac**, C. de. „Sur le théorème de **Tait**." Bull de la soc. mathém. *27*, 1899, p. 142—145.

582. **Rohn**, K. „Das Damenproblem auf dem Schachbrett." Deutsche Schachzeitung *54*, 1899, p. 1—3; 33—36; 151—153.

582a. **Folcker**. [Mitteilung über das n-Königinnen-Problem.] Deutsche Schachzeitung *54*, 1899, p. 286—287.

583. **Saint-Loup**, Louis. „Note sur les carrés magiques." Besançon 1899 10 S. 8°.

584. **Tarry**, G. „Curiosité mathématique." Nouv. ann. de mathém. (3) *18*, 1899, p. 156.

585. **André**, D. „De l'organisation des assauts complets." Bull. de la soc. philomathique (9) *2*, 1899—1900 (1900), p 45—73

586. **André**, D. „Supplément à la comptabilité des assauts complets." Bull. de la soc philomathique (9) *2*, 1899—1900 (1900), p. 77—83. — Siehe Nr 576 dieses Index.

587. **Ahrens**, W. „Über die Paarung der Turnierteilnehmer" Deutsche Schachzeitung *55*, 1900, p. 98—99; 130—132; 227—228.

588. **Bachmann**, P. Artikel „Niedere Zahlentheorie" (1900), 12: „Magische Quadrate", in: „Encyklopädie der mathem. Wissenschaften", Bd. 1, Leipzig 1898—1904, p. 580. — Wesentlich erweitert von E **Maillet** (1906) in der französ. Ausgabe: „Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées", t. I, réd. par J. **Molk**, vol. 3, p. 62—75: „Figures magiques". Mit wertvollen Anmerkungen von J. **Molk** und G. **Eneström**.

589. **Cama**, B. N. „Solution of question 14149" [Eine Anzahlbestimmung für ein Farbenkartenproblem.] Educ. Times Reprints *72*, 1900, p 103—104.

590. **Carpenter**, Geo. E „On the N Queen's Problem." The British Chess Magazine *20*, 1900, p. 42—48, 135—137, 181—183, 223—225, 264—267, 300—304, 344—364 — Vgl. Nr. 305 dieses Index.

590a. **Planck**, C. „The n Queen's Problem." The British Chess Magazine *20*, 1900, p. 94—97.

591. **Cunningham**, Allan and **Whitworth**, W. A. „Solution of question 14152" [Eine Anzahlbestimmung für ein Anordnungsproblem.] Educ. Times Reprints *72*, 1900, p. 87.

592. **Fitting**, F „Über eine Verallgemeinerung der Rösselsprungaufgabe." Zeitschr. für Math. und Phys. *45*, 1900, p. 137—160

593. **Mac Mahon**, P. A. „Combinatorial Analysis The Foundations of a New Theory." Philos. Transactions of the Roy Soc. of London, Series A, vol. 194, 1900, p. 361—386.

594. Tarry, G. „Les permutations carrées de base 6." Mémoires de la Société Roy. des sc. de Liège (3) *2*, 1900. 10 Seiten = Mathesis (2) *10*, Juillet 1900, Suppl. p. 23—30. — Vgl. a. Interméd. des mathém. *7*, 1900, p. 14—16.

594a. Tarry, G. „Le problème des 36 officiers." Assoc. franç. *29*, Congrès de Paris 1900, 1re partie, 1900, p. 122—123; 2e partie, 1901, p 170—203. Auch dem Interméd. des mathém. *8*, 1901, als Separatabdruck beigelegt.

595. Tarry, G. „Carrés magiques supérieurs." Nouv. ann. de mathém. (3) *19*, 1900, p. 176—177.

Nachtrag (19. Jahrhundert).

596. Im „Royal Society of London Catalogue of Scientific Papers 1800—1900", Subject Index, Volume I: Pure Mathematics, Cambridge 1908, p. 84/85, finde ich unter dem Titel „Magic squares" noch folgende Arbeiten, die mir nach Inhalt, wie auch nach Titel völlig unbekannt sind:

Györy, S. Magyar akademiai Értesitö 1856, p. 77.

Marchand, D. Les Mondes *2*, 1882, p. 106, 247.

Mayor, P. Bull. des Séances de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles, Lausanne, *27*, 1892, p. 243.

Rocquigny, F. [G] de. Les Mondes *2*, 1882, p. 163.

Gleichfalls nach dem „Roy. Soc. Catalogue" (l c. p. 81), teilweise in Verbindung mit dem Jahrb. über die Fortsch der Mathem, trage ich folgende mir nicht bekannte Abhandlungen nach (vgl. S. 331):

Steen, Ad. „Bestemmelse af et Kort efter Omlagning i. Bunker und et Korts Bestemmelse ved Henforelse til en given Plads." Tidsskrift for Matem. (2) *6*, 1870, p 1—14; s. a. v dems ibidem *1*, 1865, p. 49 ff.; *2*, 1866, p. 1 ff; *3*, 1867, p. 1 ff

Steen, Ad „Optælling af hvert andet Kort in en Stamme i-en bestemt Orden." Tidsskrift for Matem (2) *6*, 1870, p 181—189; sowie (3) *3*, 1873, p. 156 ff.

Dazu weitere Abhandlungen von

Hertzsprung, S. Tidsskrift for Matem. (2) *3*, 1867, p. 97 ff.

Lorenz, L „En ‚mathematisk leg.'" Tidsskrift for Matem. (3) *1*, 1871, p 53

20. Jahrhundert.
1901—1910.

597. Ahrens, W. „Mathematische Unterhaltungen und Spiele." Leipzig 1901. — 2. Aufl I, 1910; II, 1918

598. Ahrens, W. „Zur relativen Bewertung von Turnierpartien." Wiener Schachzeitung *4*, 1901, p 181—192.

598a. Ahrens, W. „Nochmals über die Bewertung von Turnierpartien." Wiener Schachzeitung *6,* 1903, Heft Juni—Juli.

599. Ahrens, W. „Mathematische Schachfragen." Deutsche Schachzeitung *56,* 1901, p. 284—287; *57,* 1902, p. 124—126, 155—159, 196—199. — Siehe Nr. 262 dieses Index.

600. Bouton, C. L. „Nim, a game with a complete mathematical theory." Annals of mathematics (2) *3,* 1901, p. 35—39.

600a. Ahrens, W. „Nim, ein amerikanisches Spiel mit mathematischer Theorie." Naturwissensch. Wochenschr. *17,* Nr. 22, 2. März 1902, p. 258—260.

601. Lecornu, J. „Sur une méthode de construction des carrés magiques naturels impairement pairs." Revue scientifique (4) *16,* 38e année, 2e semestre, 1901, p 367—369.

602. Netto, Eugen „Lehrbuch der Combinatorik." Leipzig 1901.

603. Reinhard, August. „Die Aufgabe der acht Königinnen." Deutsches Wochenschach *17,* 1901, 3. Nov., p. 329—330, abgedruckt auch in der Sonntagsbeilage „Frauenwelt" Nr. 46 zur „Staatsbürgerzeitung" vom 17. Nov 1901 — Enthält nichts Neues

603a. Freude, August „Nachtrag zur Aufgabe mit den acht Damen" Deutsches Wochenschach *17,* 1901, 17. Nov., p. 345

604. Rilly, A. „Etude sur les triangles et les carrés magiques aux deux premiers degrés." Troyes 1901.

605. Sanjána. [Über den Tauschwert der Schachfiguren.] Educ. Times Reprints *74,* 1901, p. 129

606. Szily, Kolomann v „Az öt vezér problemaja." Pesti Hirlap 1901, 10. Febr.

607. Szily, Kolomann v [„Eine Damenaufstellungsaufgabe auf dem Schachbrett"] Deutsche Schachzeitung *56,* 1901, p 96 und 127.

608. Dingler, A. H. „Ein Kartenkunststück." Naturwissensch. Wochenschr *1* (Neue Folge), 1901/2, p. 607—608

609. Harrison, C. H „On magic squares." The Messenger of Mathematics (2) *31,* 1901/2, London and Cambridge 1902, p. 52—63

610. Mac Mahon, P. A. „Magic squares and other problems upon a chess-board." Nature *65,* Nov 1901—April 1902, p. 447—452 In französ. Übersetzung: Revue scientifique (4) *17*, 39e année, 1er semestre, 1902, p 744—751

611. Petersen, J. „Les 36 officiers." Annuaire des mathématiciens 1901—1902, publié par C A. Laisant et Ad Buhl, Paris 1902, p 413—427.

612. Planck, C „Magic Squares of the Fifth Order." Nature *65,* Nov 1901—April 1902, p 509.

613. Roberts, Samuel. „Networks" London Math Soc Proc. *34,* 1901/2, London 1902, p. 259—274.

614. Ahrens, W Artikel „Mathematische Spiele" (1902) in: „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften", Bd. I, Leipzig 1898—1904, p. 1080—1093. — Französische Bearbeitung von C. A. Laisant in: „Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées", publiée sous la direction de Jules Molk, t. 1, vol. IV, p. 666—709 (noch nicht erschienen, Korrekturen 1913 abgeschlossen).

615. Bienaymé, A. „Sur un problème de substitutions étudié par Monge." Nouv. ann. de mathém. (4) *2,* 1902, p. 443—446

616. Cunningham, Allan; Taylor, H. M. „Solution of question 6845." Educ. Times Reprints (2) *1,* 1902, p. 72—74.

617. Fitting, Friedr. „Ein Anordnungsproblem." Progr. Gymn. M.-Gladbach 1902.

618. Fitting, Friedr. „Weiterer Beitrag zur verallgemeinerten Rösselsprungaufgabe." Arch. Math. Phys. (3) *3,* 1902, p. 136—151.

619. Jones, Samuel I. „Mathematical puzzles. A collection of the most amusing properties of numbers, and many of the most difficult mathematical problems, with their answers." New Point (Texas). 76 S.

620. Machado, Virgilio. „Curiosas propriedades dos numeros reveladas pelo estudo dos quadrados magicos." Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa (2) *6* (Num. XXIV — Maio 1902), p. 211—222.

621. Portier, B. „Le carré cabalistique de 8, diabolique au premier degré, magique aux deux premiers degrés (satanique)." Paris 1902. 17 S. — Auszug in: Revue scientifique (4) *19,* 40e année, 1er semestre, 1903, p 503.

622. Szily, K. v „Das Minimalproblem der Damen" Deutsche Schachzeitung *57*, 1902, p 326—328; *58,* 1903, p 65—68.

623. Willis, J. „Magic squares." Nature *66,* May—October 1902, p. 78.

624. Dixon, A C. „On map colouring." The Messenger of Mathematics (2) *32,* May 1902—April 1903, London and Cambridge 1903, p 81—83.

625. Taylor, H. M. „A problem on arrangements." The Messenger of Mathematics (2) *32,* May 1902—April 1903, London and Cambridge 1903, p. 60—63

626. Blaikie, James; Webster, H. W. „Solution of question 15021." [Achtdamenproblem] Educ. Times Reprints (2) *3,* 1903, p 30—32.

627. Blaikie, J.; Clair, J C St. „Solution of question 15129." [Zum Achtdamenproblem.] Educ. Times Reprints (2) *4,* 1903, p 28—29.

628. Bolte, Johannes (teilweise nach Reinhold Köhlers Kollektaneen). „Der Mann mit der Ziege, dem Wolf und dem Kohle" Zeitschr. des Vereins für Volkskunde, 13. Jahrg , 1903 Berlin, p. 95—96; 311.

629. Ignatiev, E. J. „Mathematische Spiele, Rätsel und Erholungen." (Russisch). Petersburg 1903. 116 S. 8°.

630. Kokott, P. „Lösung der Aufgabe Nr. 74." [Siehe hier Bd I, S. 147, Anm.] Arch. Math. Phys. (3) *5*, 1903, p. 175; s. a. ebendort (3) *4*, 1903, p. 350.

631. Tarry, G. „Carré magique." Revue scientifique (4) *19*, 40e année, 1er semestre. 1903, p. 408—409.

632. Tarry, G „Carrés panmagiques de base 3n." Assoc. franç. *32*, Congrès d'Angers 1903, I, Paris 1903, p. 112; II, Paris 1904, p. 130—142 Auszug hieraus in: Revue scientifique (4) *20*, 40e année, 2me semestre, 1903, p. 373.

633. Böhmer, P. „Ideen zu einer wissenschaftlichen Behandlung des Schachspiels." Mathem.-naturw. Bl. *1*, 1904, p. 50—52, 57—58, 133—134.

634. Fermat, P. „Le plus grand quadruple (10^2, 12^2, 16^2, 22^2) carré magique." Pour la première fois édité sans fautes d'impression par Sidoratsky. Paris 1904. — Vgl. Nr 27 dieses Index.

635. Fitting, Friedr. „Das Rösselsprungproblem in neuer Behandlung." Programm Gymn. M.-Gladbach 1904

636. Lafitte, Prosper de. „Le carré magique de 3. Solution générale du problème." Paris 1904. 31 S. 8°.

637. Polignac, C. de. „On elements connected each to each by one or the other of two reciprocal relations." Amer Journ of Mathem. *26*, 1904, p. 361—414.

638. Portier, B. „Le carré panmagique à grille de module 8. Exposition pratique." Paris 1904. 8 S. 8°.

639. Tarry, G. „Carrés cabalistiques eulériens de base 8n." Assoc. franç. *33*, Congrès de Grenoble 1904 (Paris 1905), p. 95—111.

640. Teyssonneau, E. „Cent récréations mathématiques, curiosités scientifiques." Paris 1904. 185 S. 16°.

641. Wernicke, P „Über den kartographischen Vierfarbensatz" Mathem. Ann. *58*, 1904, p. 413—426

642. Andrews, W. S. „Magic squares." The Monist *15*, 1905, p 429—461, 555—586. Wiederabgedruckt in dem Buche von Andrews, Nr. 677 dieses Index, p. 1—62.

643. Dennis, T „Solution of question 8108." [Zum Rösselsprung.] Educ. Times Reprints (2) *8*, 1905, p. 66—68

644. Hayashi, T. „Tait's problem with counters in the Japanese mathematics" Bibl. mathem. (3) *6*, 1905, p. 323

645. König, Dénes. „A térképszinezésről." Mathematikai és Physikai Lapok *14*, 1905, p 193—200.

646. Planck, C. „The Theory of Path Nasiks" 1905. Privatdruck „Published by A. T. Lawrence, Rugby, England"; s. The Monist *22*, 1912, p. 310, Anm). — Nach Angabe des Verf in The Monist *20*, 1910,

p. 618, Anm., sind Exemplare dieser Schrift vorhanden in der Bibliothek des British Museum, in der Bodleiana in Oxford, sowie in der Universitätsbibliothek in Cambridge (England).

647. Tietze, H. „Über das Problem der Nachbargebiete im Raum." Monatsh. f. Mathem. u. Phys. *16*, 1905, p. 211—216.

648. Wilson, J. Cook. „On the Traversing of Geometrical Figures." Oxford 1905. IX + 153 + 17 S.

649. Arnoux, G. „Les espaces arithmétiques dont les côtés sont des nombres premiers inégaux." Assoc. franç. *34*, Congrès de Cherbourg 1905, Paris 1906, p. 103—122; s. a. Bulletin mensuel de l'Association française pour l'avancement des sciences, 1905, p. 299.

650. Tarry, G. „Le carré trimagique de 128." Assoc. franç. *34*, Congrès de Cherbourg 1905, Paris 1906, p. 34—45; s. a Bulletin mensuel de l'Association française pour l'avancement des sciences 1905, p. 296.

651. Andrews, W. S. „Magic Cubes." The Monist *16*, 1906, p. 388—414. Wiederabgedruckt in dem Buche von Andrews, Nr. 677 dieses Index, p. 64—88.

652. Andrews, W. S. „The Franklin Squares." The Monist *16*, 1906, p. 597—604. Wiederabgedruckt in dem Buche von Andrews, Nr. 677 dieses Index, p. 89—96.

653. Browne, C. A. „Magic Squares and Phythagorean Numbers." The Monist *16*, 1906, p. 422—433. Wiederabgedruckt in dem Buche von Andrews, Nr. 677 dieses Index, p. 156—168.

654. Carus, Paul. „Reflections on magic squares. Mathematical, historical and philosophical." The Monist *16*, 1906, p. 123—137; nebst einem Zusatz von W. S. Andrews, ibid. p 137—139 Wiederabgedruckt (ohne den Zusatz) in dem Buche von Andrews, Nr. 677 dieses Index, p. 113—128.

655. Carus, Paul. „The Franklin Squares and other Mathematical Diversions." The Monist *16*, 1906, p 605—625 Wiederabgedruckt in dem Buche von Andrews, Nr 677 dieses Index, p. 96—112 und p. 168—172.

656. Hayashi, Tsuruichi. „Die magischen Kreise in der japanischen Mathematik" Bibl. mathem. (3) *6*, 1906, p 347—349 — Siehe a. von demselben „A brief history of the Japanese mathematics." Nieuw Archief voor Wiskunde (2) *6*, 1905, p. 296—361; *7*, 1907, p 105—163; sowie: „Seki's Kaihō-Honpen, Hōjin-Ensan, and Sandatsu-Kempu" Tôkyô Sûgaku-Buturigakkwai Kizi-Gaiyô *3*, 1906, p. 183—201

657. Lafitte, P. de. „Essai sur le carré magique de N à N nombres" Paris 1906. 23 S. 48 Fig. 8°

658. Laisant, C. A. „Initiation mathématique" Paris 1906 — 4. Aufl. 1908 — Autorisierte deutsche Ausgabe („Einführung in die Mathematik") von F J. Schicht Lpz u. Wien 1908.

659. Macht, Hans. „Sigillum Iovis." Mit einer Wiedergabe von Albrecht Dürers „Melencolia" Wien 1906. Im Selbstverlage des Verfassers, Druck von Adolf Holzhausen in Wien. 6 S.

660. Portier, B „Carré magique de module 5." Revue scientifique (5) *5*, 43e année, 1er semestre, janvier-juin 1906, p. 140.

661. Billy, A. „Le problème du cavalier des échecs. Etude sur la symétrie latérale en deux chaînes fermées." Paris 1906. 108 S.

662. Tarry, G. „Sur un carré magique." C. R. (Paris) *142*, 1906, p. 757—760.

663. Wilson, J. Cook. „On a supposed solution of the 'four-colour problem'." The Mathematical Gazette *3*, 1906, p. 338—340.

664. Wythoff, W. A. „A Modification of the Game of Nim." (1906). Nieuw Archief voor Wiskunde (2) *7*, 1907, p. 199—202.

665. Ahrens, W. „Mathematische Spiele." Nr. 170 der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt." Leipzig 1907; 2. Aufl. 1911; 3. Aufl. 1916.

666. Ahrens, W „Das räumliche Schachspiel" Frankfurter Zeitung, 52. Jahrg, Nr. 258, 17. Sept. 1907; abgedruckt mit einer „Nachschrift" in Wiener Schachzeitung, 10. Jahrg, 1907, p. 312—317.

666a. Maack, Ferd. „Das Schachraumspiel" Frankfurter Zeitung, 52. Jahrg., Nr. 271, 30. Sept. 1907 und Deutsche Brief-Zeitung, 4. Jahrg., 1908, p. 15—16 Von demselben Verf. existieren eine ganze Reihe weiterer Aufsätze und kleinerer Schriften zu demselben Thema; über ihren Wert s. hier S. 344 ff.

667. Bindemann, H. „Der Letzte gewinnt." Heimat und Welt, Mittwochs-Unterhaltungsbeilage der Danziger Zeitung, red. von A. Bertling, 1907, Nr 4—11, 23. Jan.—13. März.

668. Dehn, M. und Heegaard, P. Artikel „Analysis situs" (1907) in: „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften", Bd III, Teil 1, p 153—220

669. Fourrey, E. „Curiosités géométriques" Paris 1907. 431 S 8°.

670. Frierson, L. S „A Mathematical Study of Magic Squares. A new Analysis." The Monist *17*, 1907, p. 272—293. Wiederabgedruckt in dem Buche von Andrews, Nr 677 dieses Index, p. 129—152.

671. Portier, B. „Nouvelles recherches dans la magie arithmétique (Carrés de 5, 4, 6 et 7)." Paris 1907. 19 S.

672. Riollot, J. „Les carrés magiques. Contribution à leur étude." Paris 1907.

673. Sikkes, R. H. F. „Het regelmatige tooverschierkant" Wiskundig Tijdschrift (Haarlem, P. Visser Azn.), 4. Jahrg., 1907 (?), p. 49—67, 182—212; 5 Jahrg., 1908 (?), p. 46—62 — Siehe dazu auch Nr 695 dieses Index.

674. Tarry, G „La magie arithmétique dévoilée." Bull. de la Soc. philomath. (9) *9*, 1907, p. 182—195.

675. Rilly, A. „Transformations dont sont susceptibles certains carrés bimagiques." Assoc. franç. *36*, Congrès de Reims 1907, II, Paris 1908, p. 42—48.

676. Veblen, Oswald. „On magic squares." The Messenger of Mathematics (2) *37*, 1907—1908, p. 116—118.

677. Andrews, W. S „Magic squares and cubes." With chapters by Paul Carus, L. S. Frierson, C. A. Browne jr., and an introduction by Paul Carus. Chicago 1908. — Vgl. die Nrn. 642, 651, 652, 653, 654, 655, 670 dieses Index.

678. Deventer, J. G. van. „Kunstjes met de kaart, wiskundig beschouwd." De vriend der wiskunde. Tjidschrift voor allen, die examen in dat vak moeten afleggen. Onder redactie van A. J. van Breen. *23*, 1908 (?) (Culemberg: Blom & Olivierse), p. 37—44, 99—110, 205—210.

679. Dudeney, Henry E. „The world's best puzzles." The Strand Magazine *36*, 1908 (?), p. 779—787 und ?

680. Dudeney, Henry E. „The Canterbury Puzzles." 1908.

681. Dudeney, Henry E. [Über das Kirkmansche Pensionatsdamen-Problem.] Educ. Times Reprints (2) *14*, 1908, p. 97—99; *15*, 1909, p. 17—19; *17*, 1910, p. 35—38 und p. 53.

682. Margossian, A. „De l'ordonnance des nombres dans les carrés magiques impairs." Paris 1908. 140 S. — Wohl im wesentlichen übereinstimmend mit p. 1—64 von t III der „Récréations mathématiques" von W. W R. Ball in der Ausgabe von Fitz-Patrick (1909; Nr. 502a dieses Index).

683. Peirce, Charles Santiago Sanders. „Some Amazing Mazes". The Monist *18*, 1908, p. 227—241, 416—464. — Vgl a. unten Nr. 692

684. Rilly, A. „Étoiles bimagiques" Assoc franç *37*, Congrès de Clermont-Ferrand 1908 (1909), p 79—87.

685. Eckenstein, O. „Note on Kirkman's schoolgirl problem." Educ. Times Reprints (2) *16*, 1909, p 76—77; *17*, 1910, p 49—53 und p 38—39.

686. Frierson, L. S. „A New Method for Making Magic Squares of an Odd Degree" The Monist *19*, 1909, p 441—450.

687. Griend Jr, J. van de und Kerkhoven, J A. „Vraagstuk 103" und „Oplossingen." Wiskundige Opgaven. Opgaven met de oplossingen van het Wiskundig Genootschap, Bd. *10*, Amsterdam, Delsman en Nothenius, 1909?, p 241—250.

688. Kingery, H. M „A Magic Cube of Six" The Monist *19*, 1909, p. 434—441.

689. Kunst, Joh. „A nyolc vezér problémája a térben." Pesti Hirlap, 17. Okt. 1909, p. 65—66

690. Nesbitt, A. M. [Über eine Frage, das Dominospiel betreffend.] Educ. Times Reprints (2) *15*, 1909, p. 105.

691. Onnen sen., H. „Gergonne's pile problem." Amer. Mathem. Soc. Bull. (2) *16*, 1909, p. 121—130, 265.

692. Peirce, Charles Santiago Sanders. „Some Amazing Mazes. A Second Curiosity." The Monist *19*, 1909, p. 36—45. — Vgl. oben Nr. 683.

693. Pfeiffer, Hermann. „Das Buch der Probleme, Kunststücke und Gesellschaftscherze." Lpz. 1909.

694. Savage, D. F., „Overlapping Magic Squares." The Monist *19*, 1909, p. 450—459.

695. Sikkes, R. H. F. „Het onevene dubbel-tooververkant van Stifel." Wiskundig Tijdschrift (Haarlem, P. Visser Azn.), 6 Jahrg., 1909 (?), p. 81—101, 193—207. — Diese Abh. und eine frühere desselben Verf. (Nr. 673 dieses Index) auch zusammen als Sonderabdruck unter dem Titel „Het regelmatige tooververkant" (Haarlem: P. Visser Azn., 101 S., 8°) erschienen.

696. Willis, John. „Easy Methods of Constructing the Various Types of Magic Squares and Magic Cubes, with Symmetric Designs founded Thereon." Bradford u. London 1909.

697. Bennett, G. T. „The eight queens problem." The Messenger of Mathematics *39*, 1909—1910, p. 19—21.

698. Bergholt, Ernst. „The Magic Square of Sixteen Cells. A New and Completely General Formula." Nature *83*, march to june 1910, p. 368—369.

699. Bone Jr., H. B. „Over zeker spel." Wiskundig Tijdschrift, 7. Jahrg., 1910 (?) (Haarlem, P. Visser Azn.), p. 52—55.

700. Haton de la Goupillière, Julien Napoléon „Théorie algébrique d'un jeu de société" Nouv. ann de mathém. (4) *10*, 1910, p. 177—188.

701. Kerkhoven, J. A. „Wetten van regelmaat bij het probleem der 8 koniginnen." De Natuur 1910, p. 146—148.

702. Kingery, H. M. „Magic in the Fourth Dimension" The Monist *20*, 1910, p. 309—320.

703. Moore, E. H „A generalization of the game called Nim." Annals of mathematics (2) *11*, 1910, p. 93—94.

704. Nesbitt, A. M. [Über ein Anordnungsproblem.] Educ. Times Reprints (2) *18*, 1910, p 109—110.

705. Piuma, Carlo Maria. „Sui quadrati magici di nove interi." Giornale di matematiche di Battaglini *48* (= *1* der 3. Serie), 1910, p. 27—35

706. Planck, C „Four-fold Magics." The Monist *20*, 1910, p 617—630.

707. **Planck, C.** und **Andrews, W. S.** „The Construction of Magic Squares and Rectangles by the Method of ‚Complementary Differences'." The Monist *20*, 1910, p. 434—444.

708. **Savage, D. F.** „Oddly-Even Magic Squares." The Monist *20*, 1910, p. 119—126

708a. **Andrews, W. S.** „Notes on Oddly-Even Magic Squares." The Monist *20*, 1910, p. 126—130.

709. **Sayles, Harry A.** „A Magic Cube of Six." The Monist *20*, 1910, p. 299—303.

710. **Sayles, Harry A.** „Magic Circles and Spheres." The Monist *20*, 1910, p. 454—472.

711. **Tietze, Heinrich.** „Einige Bemerkungen über das Problem des Kartenfärbens auf einseitigen Flächen." Deutsche Mathem.-Vereinig. Jahresber., 19. Bd., 1910, p. 155—159.

712. **Wernicke, P.** „Das Problem der 36 Offiziere." Deutsche Mathem.-Vereinig. Jahresber, 19. Bd., 1910, p. 264—267.

713. **Worthington, John.** „Magic Cube on Six." The Monist *20*, 1910, p. 303—309.

714. **Zernike, F.** „Théorie mathématique du jeu de cloche et de marteau." Nieuw. Archief voor Wiskunde (2) *9*, 1910, p. 239—260.

715. **Amoroso, L.** „Considerazioni analitiche sulla boule de neige." Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica (3) *40*, 1910, p. 353—366.

1911—1918.

716. **Behmann, Heinr** „Das gesamte Schachbrett unter Beachtung der Regeln des Achtköniginnenproblems zu besetzen." Mathem -naturw. Blätter *8*, 1911, p. 87—89.

717. **Ernst, E.** „Mathematische Unterhaltungen" Ravensburg 1911 (?). 100 S.; 2 Bd., 1912. 84 S

718. **Fiorilli, E** „Sulla possibilità di una teoria matematica del giuoco degli scacchi." Rivista fis mat. e sc nat *23*, 1911, p. 421—431.

719. **Frierson, L. S** „Notes on Pandiagonal and Associated Magic Squares." The Monist *21*, 1911, p. 141—152.

720. **Sayles, Harry A.** „Two More Forms of Magic Squares." The Monist *21*, 1911, p. 152—158.

721. **Welsch** [Über das Josephsspiel resp. das sogenannte Caligula-problem.] Intermédiaire des Mathématiciens *18*, 1911, p. 110—112; s. a. *13*, 1906, p. 190.

722. **Aubry, Auguste.** „Problèmes abstraits et problèmes concrets." Assoc franç. *40*, Congrès de Dijon 1911: Notes et mémoires, Paris 1912, p. 45—50; s. a Procès-verbaux, Paris 1911, p 38.

723. **Eckenstein, Oscar** „Bibliography of **Kirkman's** schoolgirl problem." The Messenger of Mathematics (2) *41*, 1911—1912 (1912), p. 33—36.

724. Andrews, W. S. und Frierson, L S. „Notes on the Construction of Magic Squares of orders in which n is of the general form $4p+2$." The Monist *22*, 1912, p. 304—314.

725. Barbette, Edouard. „Les carrés magiques du $m^{\text{ième}}$ ordre." Lüttich 1912 (autographiert)

725a. Barbette, Edouard. „Les piles merveilleuses." Lüttich 1912 (autographiert). Anscheinend beide vorstehende Schriften auch in einem Bande (s. Jahrb. Fortschr. der Mathem. *43*, 1912 (1915), p 288 und 307). Von demselben Verf. gibt es anscheinend (vgl. Interméd des mathém. *21*, 1914, p. 22/23) noch ein anderes Werk: „Sur les carrés panmagiques", Paris, Gauthier-Villars.

726. Birkhoff, G. D. „A determinant formula for the number of ways of coloring a map" Annals of Mathem. (2) *14*, 1912, p. 42—46; Bull. of the Amer Mathem. Soc. (2) *18*, 1912, p. 489—490.

727. Birkhoff, G. D. „The reducibility of maps." Bull. of the Amer. Mathem. Soc (2) *18*, 1912, p 489 und Amer. Journ. of Mathem *35*, 1913, p 115—128.

728. P. C. [Paul Carus] „Magic Squares by Reversion" The Monist *22*, 1912, p. 159—160.

729. Fitting, F. „Aufstellung aller von einander unabhängigen Lösungen des Kirkman'schen 15-Pensionnatsdamen-Problems." Nieuw Archief voor Wiskunde (2) *10*, 1912, p 244—251.

730. Fitting, F. „Les Carrés magiques à cases paires" Sphinx Oedipe[1] (Directeur Fondateur: A. Gérardin) *7*, 1912, p. 168—173.

731. Onnen sen., H. „Gergonne's stapelprobleem" Wiskundig Tijdschrift, 9. Jahrg., 1912—1913 (Haarlem, P Visser Azn), p. 5—13, 81—91, 129—140, 197—205.

731a. Onnen sen., H. „Gergonnes Haufenproblem." Mathem.-naturw. Blätter *9*, 1912, p. 77—80, 94—96

732. Planck, C „The Theory of Reversions." The Monist *22*, 1912, p 53—81.

733. Sayles, Harry A. „Notes on the Construction of Magic Squares of orders in which n is of the form $8p+2$" The Monist *22*, 1912, p 472—478.

734. Veblen, O. „An application of modular equations in analysis situs" Annals of mathem. (2) *14*, p 86—94; Bull of the Amer Mathem. Soc. (2) *18*, 1912, p. 490.

735. Gardès, L. F. J. „Contribution à l'étude du solitaire." Assoc franç *41*, Congrès de Nîmes 1912 Notes et mémoires, Paris 1913, p 80—87; s a Procès-verbaux, Paris 1912, p 69.

---

1) Diese nicht gedruckte, sondern lithographierte Zeitschrift ist wohl auf keiner Bibliothek, wenigstens keiner deutschen, vorhanden und auch im französischen Buchhandel nicht vertreten.

736. Ahrens, W. „Das Josephsspiel, ein arithmetisches Kunststück. Geschichte und Literatur." Archiv für Kulturgeschichte, Bd. XI, Heft 2. 1913, p. 129—151.

737. Andrews, W. S. und Sayles, H. A. „Magic squares made with prime numbers to have the lowest possible summations." The Monist *23*, 1913, p. 623—630.

738. Bergholt, E. G. Binckes. [Über 16-zellige magische Quadrate aus Primzahlen.] Educ. Times Reprints (2) *23*, 1913, p. 99—101.

739. Genau, A. „Mathematische Überraschungen." Arnsberg i. W., o. J. [1913].

740. Ghersi, Italo. „Matematica dilettevole e curiosa." Con 693 figure originali dell'Autore.[1]) Milano 1913.

741. Portier, B. „Sur les panmagiques de module 8 à grilles." Paris 1913. 4 S.

742. Salomon, C. „Étoiles magiques à 10 et 12 branches (30, 36, 48 points) et hexagones et octogones magiques." Paris 1913. Auf dem Umschlag, wie auch im Jahrb. Fortschr. der Math. *43*, 1912, p. 288, ist noch eine frühere, offenbar nahe verwandte Schrift desselben Verf.: „L'Étoile magique à 8 branches (24 points) et les étoiles hypermagiques impaires (3 *n* points)", Paris 1912, aufgeführt.

743. Salomon, C „Étoiles magiques à 8, 16 et 20 branches (24, 64 et 100 points) et rosaces hypermagiques (16, 25 et 36 points)." Paris 1913.

---

1) In Wirklichkeit sind die Figuren teilweise so wenig „originali dell' Autore", daß der „Autore" beispielsweise in dem Kapitel „Pavimenti geometriche" (p. 621—629), das überhaupt eigentlich ganz auf meinem Buche beruht, es nicht einmal für nötig befunden hat, meine Figuren 20, 21, 22 von S 142/143, Bd I hier, neu zeichnen zu lassen, sondern sie vielmehr mechanisch, und zwar ohne Quellenangabe, reproduziert hat: Fig. 597, 599, 598, p. 628—629 dort Anscheinend noch stärker in dieser Weise benutzt sind Ed. Lucas' „Récréations mathématiques"; mechanisch reproduziert von dort sind z. B. die Figuren über das Koenigsberger Brückenproblem (Lucas I, p 22 u. 30; Ghersi, p 14 u 17); daß Koenigsberg übrigens bei Ghersi (p. 13), wie bei Lucas (p 22), in „Pomerania" liegt, ist hiernach nicht auffällig, da überhaupt dies Kapitel wohl ganz auf Lucas' Darstellung beruht. Eine wirklich ausgeglichene harmonische Darstellung ist bei dieser Art des Kompilierens natürlich nicht zu erwarten. Zusammengehörige Figuren harmonieren denn auch selbst in der äußeren Form bisweilen nicht miteinander, so beispielsweise die Figuren 597 und 588, um bei diesem vorerwähnten Kapitel zu bleiben, durchaus nicht, obwohl sie doch beide, wie der Verfasser hoffentlich bemerkt hat, denselben Fall von Parkettierung darstellen.

744. Sayles, Harry A. „Geometric magic squares and cubes." The Monist *23,* 1913, p. 631—640.

745. Ahrens, W. „Über magische Quadrate. Anzahlbestimmungen. Vorkommen auf Amuletten." Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. *45,* 1914, p. 525—535.

746. Ahrens, W. Verschiedene Aufsätze über Amulette mit mag. Quadraten, in: Weltall *15,* 1914/15, p. 81—88 („Kriegsamulette"); Niedersachsen *20,* 1914/15, p. 173—175 [Jupiteramulette]; Kosmos *12*, 1915, p. 115—117 („Sonnenamulette"); Himmel und Erde *27,* 1915, p. 281—297, 325—341; Kosmos *14,* 1917, p. 322—324 („Ein arabischer Schutzbrief aus dem Felde"); Reclams Universum *34*, Heft 21, 21. Febr. 1918, p. 367—369. Siehe a. Nr. 747 dieses Index [Jupiteramulette]; 753; 754 [Venusamulette].

747. Ahrens, W. „Das magische Quadrat auf Dürers Melancholie." Zeitschr. f. bildende Kunst *50* (= N. F. *26*), 1914/15, p. 291—301.

748. Landau, E. „Über Preisverteilung bei Spielturnieren." Zeitschr. Math. Phys. *63,* 1914, p. 192—202.

749. Shuldham, Charles D. „Associated prime number magic squares." The Monist *24*, 1914, p. 472—475

750. Shuldham, Charles D. „Pandiagonal prime number magic squares." The Monist *24*, 1914, p. 608—613.

751. Shuldham, Charles D. „Paneled magic squares." The Monist *24*, 1914, p. 613—617.

752. Czepa, A. „Mathematische Spielereien." Stuttgart, o. J. [1915].

753. Ahrens, W. „Hebräische Amulette mit magischen Zahlenquadraten." Ost und West *16,* 1916, col. 259—274 Auch in erweiterter, neugedruckter Sonderausgabe erschienen (Berlin 1916, Louis Lamm).

754. Ahrens, W. „Mathematik im Spiel und in der Liebe." Zeitschr. f. Bücherfreunde *8*^{I}, 1916, p. 81—95

755. Ahrens, W. „Studien über die ‚magischen Quadrate' der Araber." Der Islam *7,* 1916, p 186—250

755a. Wiedemann, Eilh. „Zu den magischen Quadraten." Der Islam *8,* 1917, p. 94—97.

756. Ahrens, W. und Maaß, Alfred. „Etwas von magischen Quadraten in Sumatra und Celebes" Zeitschr. f. Ethnol. *48,* 1916, p. 232—244, 244—253.

757. Bolte, Joh. „Abergläubischer Gebrauch der magischen Zahlenquadrate." Zeitschr. des Vereins für Völkerkunde in Berlin *26,* 1916, p. 306—313

758. Ruska, J. „Zur Geschichte der Schachbrettaufgabe." Zeitschr. f. mathem u. naturw Unterr *47,* 1916, p 275—282.

Nachtrag.

759. Remmelin, Johann Ludwig. „τετραγωνιασμὸς Αριθμο-ισόπλευρος. Das ist Zahlen gewiser Progression in viereckete Tafeln der gestalt zu versetzen daß solche Zahlen nach der länge, nach der breite, auch vbereck, addiert oder multipliciert, einerley collect oder product bringen." Augspurg 1628.

760. Tye, Rudolf. „Vom magischen Quadrat auf einheitlicher Grundlage mit den natürlichen Zahlen bis zum Magischen Würfel mit den Zahlen 3ter Potenz." Hamburg 1910.

761. Ahrens, W. „Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik." Berlin 1918.

762. Ahrens, W. „Die magischen Quadrate in al-Būnī's šams al-maʿārif." Der Islam, Bd. IX, 1918.

Namenregister.

Die gewöhnlichen Zahlen geben die Seiten der beiden Bände (I resp. II) an, während die fetten Zahlen diejenigen Nummern des literarischen Index bezeichnen, unter denen der betreffende Name als der des Verfassers, Herausgebers usw. vorkommt Außer den Personennamen sind auch einige wenige Titel von älteren und zugleich wichtigeren Schriften hier registriert.

Abel I, **164.**
Abraham ben Esra II, 120—122, 125, 129, 146.
Adam I, 164.
Addison, G. A. **160.**
Adelung, Joh. Christoph I, 62, 63, 184.
Adler, O. S. II, 263.
Agrippa von Nettesheim, Heinr Corn. **8.**
Ahmed el-Qalyubi II, 136.
Ahrens, W II, 145, 170, 370. **542b, 554, 587, 597, 598, 598a, 599, 600a, 614, 665, 666, 736, 745, 746, 747, 761, 762.**
Akar, Adrien II, 58, 154 **533.**
Albert, Abt I, 1. **3.**
Alberti, G. A. I, 61; II, 149, 151. **84.**
Albin, Ad. I, 169
Albrecht Friedrich, Herzog v Preußen, u s. Töchter Anna u Eleonore II, 301f.
Alcuin I, 1—4, 161; II, 316 **1.**
Alembert, D'- I, 152 **114, 115.**
Alexandre, A. **190.**
Allardice, R. E. II, 326. **421.**
Allen, George **355.**
Allizeau, Mathieu Alexandre **135, 139, 140.**
Alvensleben, L v. **356.**
Ambrosius von Mailand II, 119.
Amoroso, L **715.**
Ampère, A M. I, 33
Anderson, I 370.
Anderssen, Adolf I, 168, 238; II, 345.
André, Désiré I, 171; II, 80f. **576, 585, 586.**
Andrews, W S. **642, 651, 652, 653, 654, 655, 670, 677, 707, 708a, 724, 737, 753, 754, 755, 756.**
Annales Stadenses I, 1f., 4, 7, 105f, 156—158, 161f.; II, 316, 333. **3.**
Anstice, R. R. II, 100, 103, 114 **214.**
Anton, Friedrich **356.**
Antonio, Giovanni di **64.**
Arago, François I, 105, 106f, 109; II, 183.
Araki, Murahide II, 137—139.
Arbel, D'- aîné **164.**
Arceri, Salvatore II, 131.
Archimedes I, 333
Aretin, J. Chr Freiherr v. **122.**
Argand, Jean Robert I, 348.
Aristoteles I, 25, 163.
Arnauld, Antoine II, 6. **38.**
Arnold, Franz u Victor II, 303
Arnoux, Gabriel **431, 521, 649.**
Aubry, Auguste II, 62, 73f **722.**
Aubry, L II, 336.

August, Herzog von Braunschweig-Lüneburg („Gustavus Selenus") II, 325.
Aurie II, 279
Avé-Lallemant, Fr. Chr. Bened. II, 149

Bachet de Méziriac, Claude Gaspar I, 4, 40, 90, 93, 97, 98, 101f., 106—108, 110, 145, 148, 149, 156; II, 27—30, 56, 118f., 149, 154, 334. **22.**
Bachmann, P. II, 331. **588.**
Badoureau, A. I, 130, 133, 134, 138; II, 387. **349, 389.**
Ball, W. W. Rouse I, 40, 89, 150; II, 47, 109, 307, 334, 352. **502, 502a, 517, 682.**
Balladoro, Arrigo II, 317.
Ballière de Laisement (od Laisemont) **107.**
Baltzer, Rich II, 177, 213—215, 236. **432.**
Barbette, Ed. II, 62 **725, 725a.**
Barnard, F A P II, 39, 40. **343, 462.**
Baron, R. II, 321.
Barrau, J A II, 99, 100f.
Bartsch, Karl II, 128
Basset, René II, 136.
Basterot, Cte de I, 322 **215.**
Bastian, Adolf II, 146
Beaumont s Elie de —.
Beda Venerabilis I, 161 **1.**
Behmann, Heinr II, 349 **716.**
Bellavitis, Giusto I, 154, 226, 230, 248; II, 250f. **243, 244, 370.**
Beman, W W **514.**
Bennett, G T II, 348f, 351 **697.**
Berckenkamp, Joh Alb. **85.**
Berdellé, Ch I, 34, 43; II, 320 **452, 555.**
Berg. F J. van den I, 17; II, 319. **441, 469.**
Berger, Joh. II, 84.
Bergholt, Ernst G. Binckes **698, 738.**
Berkenmeyer, P. L. II, 314.
Bernoulli I, 321/322.
Bernoulli, Jakob I, 27.
Bernoulli, Johann II, 321, 323.
Bertini, E. II, 176.
Bertling, A. **667.**
Bertrand, J. II, 118.
Bertrand, Louis I, 320, 329f, 332.
Beverley, William I, 380f. **199, 203.**
Bézout II, 236.
Bezzel, Max I, 211
Biddle, C. **180.**
Biddle, D. I, 158, 170, 349, 362; II, 73. **412, 423, 426, 467a.**
Bienaymé, A. II, 336. **615.**
Bilguer, P. R. v. II, 388.
Billig, Ed **155.**
Bills, S. II, 100, 114. **285, 288.**
Bindemann, H I, 79. **667.**
Birkhoff, G. D. II, 213, 216. **726, 727.**
Bîrûnî I, 38. **328.**
Bismarck I, 211; II, 283
Blaikie, James I, 241 **626, 627.**
Bleibtreu, L I, 51, 145 **144.**
Blocquel, Simon **174.**
Blondel **50.**
Blucher, Familie II, 302
Blum, Rob. II, 376
Boas, E I, 323
Bobynin, V V. II, 324
Bohmer, P I, 170 **633.**
Boerhave II, 170
Bottcher, Joh. Ed II, 279, 289
Bohatta, Hanns II, 389
Boije af Gennas, C. O. **566.**
Bolte, Joh II, 131f, 315, 317 **628, 757.**
Bolton, Henry Carrington **320.**
Boncompagni, Baldassare, Principe I, 89 **2, 390.**

Bone Jr., H. B. **699.**
Boole I, 158.
Booth II, 177.
Bopp, Karl II, 6. **38.**
Borda I, 32.
Bosmans, Henri I, Vorwort (S. V).
Botton I, 229.
Bourget, J. I, 154f., 226. **403.**
Boutin, A. II, 336.
Bouton, Charles L. I, 73f., 83. **600.**
Bouvard, A. II, 360. **153.**
Brander, G. F. I, 29. **94.**
Brassinne, E. **27.**
Braun, Ferd **331.**
Braunmühl, A. von I, 32.
Brede, F. J. I, 380. **158, 183.**
Brewster, D. **138, 138a.**
Brocard, H. I, 28, 33, 34; II, 322. **350.**
Broch, O. J. I, 63; II, 328.
Brockelmann, C II, 136
Brown, Crum II, 234.
Browne, C. A. jr. **653, 677.**
Brückner, Max I, 130; II, 177, 217.
Brunacci I, 281. **128.**
Brunel, G. I, 108, 159, 386f.; II, 100, 175, 220, 310 **492.**
Brunet, J. Ch. II, 376.
Brunner, Heinr. I, 32. **470.**
Buffon I, 30, 152; II, 170.
Buhl, Ad. II, 62.
Bungus, Petrus II, Vorwort (S. VII)
Būnī, al- II, 2, 3. **762.**
Bunjakofskij, W Ja I, 154. **236, 243.**
Bunsen, Chr. Carl Josias I, 28
Burmann, Peter II, 123
Burnside, W II, 63, 101, 105 **518.**
Busche, E II, 154—157, 159, 161, 164—167 **542a, 548.**
Busschop, J I, 187 **357.**
Busschop, Paul I, 187, 207 **357.**

Caesar, J II, 119
Caligula s „Problème".
Cama, B. N II, 216. **589.**
Campe, Joachim Heinr. I, 63, 184.
Cantor, Moritz I, 1, 2, 26, 27, 28, 31, 32, 38, 40, 125, 193; II, 120, 129, 320, 375, 378 **322.**
Capito, Cornelius **93.**
Caramuel y Lobkowitz, Johann **39.**
Cardan, Hieron. I, 61; II, 120f., 326—328. **11.**
Carette II, 291.
Carnot, Lazare Nic. Marg I, 183
Carpenter, Geo E. I, 228, 260. **305, 590.**
Carpmael, E. II, 103, 109. **386.**
Carrera, Pietro I, 164.
Carus, Paul **654, 655, 677, 728.**
Casalicchio, Carlo II, 317, 334. **44.**
Catalan, Eugène II, 336. **390.**
Catel, P F. I, 62f **113.**
Cauchy II, 177
Cavendish **522.**
Cayley, A. II, 1, 64, 101, 102, 107 bis 109, 110, 174, 177f, 211, 212, 396. **205, 231, 263, 344, 358, 480.**
Cesàro, E II, 154, 156. **351, 533.**
Chambeyron, L **463.**
Chambuie, de I, 370, 374 **255.**
Charpentier, J B. A I, 177. **184.**
Chaula **52.**
Chernman, J. B. **411.**
Chicandard I, 210
Chuquet, Nicolas I, 2, 105, 156; II, 129, 333 **5.** Siehe a. „Triparty".
Ciccolini, Teod I, 351, 369. **159.**
Çivadāsa II, 363
Clair, J. C. St. I, 240; II, 351. **627.**
Clausberg, C. v. **68.**
Clausen, Th. I, 92, 370; II, 62, 100, 183 **156, 219, 220.**
Clauss, Felix **464.**
Clebsch, A. II, 176

Clifford, W. K II, 176, 221
Cluley, Wm. I, 166 **232.**
Coccoz, V. **442, 503.**
Cointe, Le — s. Le Cointe.
Cole, F. N. II, 100
Colenne I, 34 **186.**
Collini, Côme Alex I, 357—360, 362, 364. **100.**
Condorcet II, 1.
Cook, E B I, 395. **290.**
Coste, I, 92. **134.**
Coupy, E **76.**
Courbet, E I, 259.
Cram, James **433.**
Cramer, Bernh. II, 231, 247. **373.**
Crelle, A. L. II, 331, 337. **216.**
Cretaine, A. I, 226, 324, 341, 367, 374 **273.**
Cunningham, Allan I, 166; II, 73, 74 **471, 591, 616.**
Curtiss, F. H I, 226 **306.**
Curtze, M II, 123, 127, 148, 150, 315f., 33? **523, 534.**
Czepa, A. **752.**

Dangicourt, P **61.**
Darjes, J G **72.**
Davis, Ellery W. II, 104 **556.**
„ , J Barnard II, 130.
„ , R F **543.**
Deblaye, A. **314.**
Decremps, Henri I, 145.
Dedekind, R II, 371f
Deelman II, 84
Dehn, M II, 171, 177, 213, 223 **668.**
Delambre I, 31, 32f
Delannoy, H I, 16, 19, 43, 228, 349, 362, 379; II, 154, 167, 174f., 263 **424, 443, 472, 533.**
Demonferrand II, 2-1
De Morgan s. Morgan
Dennis, T I, 333. **643.**
Descartes II, 177.
Deveau-Carlier, Alfred **434.**
Deventer, J G. van II, 333 **678.**
Dickson, L E. I, 104; II, 332f. **535.**
Diderot II, 261. **114, 115.**
Dietrichstein, Fürst v. I, 381.
Dilworth, Thomas II, 316. **80.**
Dindorf II, 119.
Dingeldey, F. II, 213.
Dingler, A. H. I, 104. **608.**
Diophant II, 378; s. a „Diophant. Gleich“
Dirichlet II, 371f.
Dixon, A. C. II, 109, 216. **519, 624.**
Doliarius, Dr. — s. Böttcher, Joh. Ed
Dollinger, Jos. **123.**
Dommisse, J. **435.**
Drach, S M **307.**
Droysen, Joh Gust. II, 301.
Dubourg, Barbey **95.**
Dudeney, Henry E II, 114f., **352. 679, 680, 681.**
Durer, Albrecht II, 2, 250, 334, 424. **747.**
Dufresne, Jean I, 238
Dujardin I, 128.
Dumont, C. E I, 163
Du Pasquier s Pasquier
Durand, Abbé I, 226, 280, 286, 360, 370 **227, 245, 249.**
Duras, W **323.**
Durege, H II, 176, 177
Durrande I, 92 **134.**
Dusaulx I, 152
Dutens, L I, 27. **55, 56, 62, 70.**
Dyck, W. v I, 220, II, 105, 200. **513.**
Dykstra, Waling II, 316.

Eberhard, A. II, 22 **333a.**
„ , V II, 177
Eberty, Felix II, 328
Eckenstein, Oscar II, 114f. **685, 723.**
Elias Levita der Deutsche II, 121.

Élie de Beaumont I, 32.
Elliott, John I, 235.
Ellis, Leslie I, 158.
Endō, T. II, 138.
Eneström, Gustaf I, Vorwort (S. V), 34; II, 130, 141, 145, 378, 382 **588.**
Engel, Friedr. I, 184.
Ens, Caspar **24, 30.**
Ericsson (Pseudonym) I, 312.
Ernst II. Ludwig von Sachsen-Gotha I, 323, 400; II, 1. **118.**
Ernst, E. **717.**
Escoffier II, 281.
Escott, E. B. I, 227; II, 296
Etten, H. van I, 11; II, 134. **24, 33.**
Euler, Leonh. I, Vorwort (S. V), 41, 90, 319f., 322—324, 326, 328 bis 330, 332, 333, 336, 346f., 349f., 352, 365, 368, 379, 388, 389; II, Vorwort (S. VII), 1, 55, 61—63, 65, 66, 118, 145, 154, 166—168, 170, 177, 182, 183, 184, 366f., 394 **76, 88, 88a, 97, 104, 105, 106, 147, 174, 336, 566.** Siehe a. „Brückenproblem", „Polyedersatz", „Quadrate".
Exner, G. I, 381 **332.**
Eytelwein, J A. I, 31

Fahrenheit (Thermometerskala) I, 31.
Falkener, Edward I, 341, 350, 374, 383. **504.**
Fauquembergue, E. I, 127/128.
Feldhaus, Franz M. II, 328
Fendler, G G — u. Comp. II, 328.
Ferguson **98.**
Fermat, P II, 1, 6 **27, 440, 634.**
Férussac, A É. J. P J F., Baron d Audebard de — I, 183; II, 337. **146.**
Fibre, de s. Brede
Fiorilli, E II, 336 **718.**
Fitting, F. I, 386—388; II, 74, 99, 100, 102, 360, 362. **592, 617, 618, 635, 729, 730.**
Fitz-Patrick, J. I, 40, 89, 150; II, 109, 307, 334, 352 **502a, 682.**
Fleck, A. II, 279.
Fleury, Henry II, 231, 239. **374, 524, 525.**
Flye Sainte-Marie, C. I, 166, 357, 379, 389, 391, 393; II, 268 **342, 525.**
Foerster, Wilh. II, 290.
Folcker I, 228. **582a.**
Fontenay, Cadet de I, 8.
Fontenelle I, 145; II, 1.
Fontès, J. **536.**
Forcadel, Pierre I, 26, 106.
Foucher de Careil II, 177.
Fourrey, E. I, 4, 129, 130, 142. **578, 669.**
Fraenkel, Adolf II, 285.
Franel, J. I, 248; II, 154, 156. **526, 533.**
Frankenstein, Gustavus **324.**
Franklin, Benj. II, 1 **95, 655.**
Franz, Robert **193, 438.**
Fraser, A. Y. II, 326. **421.**
Frazer, Persifor II, 250, 242. **365.**
Frénicle de Bessy, B. II, 1, 5—7, 30, 228. **27, 50.**
Freude, August **603a.**
Fricke, R. I, 127; II, 105.
Friedrich, Kaiser I, 183, II, 229.
Friedrich Wilhelm IV, König I, 182.
Frierson, L S. **670, 677, 686, 719, 724.**
Frisby, E **375.**
Frith, A. **453.**
Frobenius (= Frobenius Forster) I, 1. **1.**
Frobenius, L I, 28.
Froedman I, 286, 291, 299

Frolow (Froloff), M I, 248, 362, 384. **424, 440, 444, 473, 481, 505.**
Frost, A. H. I, 331, 349, 374—376, 385; II, 109, 114. **283, 284, 295, 345, 346, 352, 353, 413, 547.**
Fujita, Sadusuke II, 139.
Fulco, Th. **16.**
Funk, Christl. Bened. **106.**
Fuß, N. **105.**
„ , P. H. v. I, 322; II, 145, 170. **88, 105.**

Gaidoz, H. II, 131, 136.
Galenus I, 163.
Gambioli, Dionisio **502a.**
Gardès, L. F. J. II, 337. **735.**
Gascheau, G. II, 331.
Gauss, K. F I, 86, 213f., 221, 242, 244f., 253, 285, 334f., 337, 348; II, 61f., 65, 66, 67, 170, 183, 283, 285, 349, 361, 372f., 389. **248, 334.**
Gelin I, 34. **549.**
Gemma Frisius I, 89. **9.**
Genau, A **739.**
Gérardin, A. II, 281
Gergonne, J D. I, 92, 98—100, 156; II, 177, 331 **129, 136.** Siehe a „Kartenmischen" resp „Haufenproblem"
Gerhardt, C. Imm I, 27, 182, 184. II, 170, 196 **55, 56, 57.**
Gerle, W A II, 132
Geynet, A II, 360. **274.**
Ghersi, Italo **740.**
Gianutio della Mantia, Horatio I, 321, 328, 368, 369 **17.**
Giesing, Jul. **359.**
Gilberg, C. A I, 395. **290.**
Gilbert, G. K **439.**
Gill, J. H. II, 109
Glaisher, J. W. L I, 245 **315.**
Glaszer, Chr. F. H. A. I, 324 **185.**
Gochmann, Ch. **557.**
Godt, W. II, 177.
Goedeke, K. II, 132.
Goethe I, 163, 319, 323, 340; II, 283.
Goetze, E. II, 132.
Gokai, Ampon II, 50
Goldbach, Chr. I, 320, 332; II, Vorwort (S VII).
Gottschall, Rudolf v. I, 163.
Gould, B. A. II, 103.
Grässe, J. G. Th. II, 376.
Graetz, H. II, 120
Graf, J. H. II, 176.
Grandin I, 322. **52.**
Gregor XIII., Papst II, 278; s a. „Kalenderreform, Gregorianische".
Griend, J. van de — Jr. II, 253. **687.**
Grierson, George A. II, 223. **391.**
Grimaldi I, 35.
Grolman, v. I, 63.
Gros, Louis I, 62 **299.**
Grosse, W. **558.**
Grossetaite I, 383
Grüson, Joh Phil II, 291. **116.**
Grunert, J A II, 177 **220.**
Grupen, Christian Ulr. II, 135
Gruyet II, 196.
Guarinus, Paulus I, 321, 327
Günther, Siegmund I, 226, 245; II, 3, 22, 27f, 31, 50, 146, 227. **4, 316, 325, 333, 334.**
Guhrauer, G E II, 321—323
Guthrie, Francis II, 212, 224
„ , Frederick II, 212, 224 **369.**
Gutzmer, A **482, 506.**
Guyot, Edme. Gilles I, 100, 156 **96.**
Gyory, S **596.**

Hadamard, Jacques II, 64
Haenel, Richard I, 383
Hagen, Hermann I, 1; II, 126f **291.**
Haldeman, S. S. I, 320, 342, 370, 374f., II, 392 **268.**
Halsted, G II, 177.

Hamilton, William Rowan I, 126; II, 196—202, 206—208, 210, 222f. **228, 233.** Siehe a. „Dodekaederspiel", „Ikosaederspiel".
Hammer, E. I, 33.
Hammer-Purgstall, Jos. v. I, 211.
Hampe, Hermann I, 212.
Hankel, Hermann I, 26, 27, 29, 35.
Hanstein, W. **202, 206.**
Harmuth, Th **392, 393, 404, 414.**
Harnack, Adolf v. I, 323.
Harrison, C. H. II, 47. **609.**
Harsdörffer, G. Ph **26.**
Hartenstein, G II, 170.
Hartmann, S. **326.**
Hatamen I, 28.
Haton de la Goupillière, Julien Napoléon **700.**
Hatzidakis, N. J. II, 320f.
Hautin, Charles I, 40. **257.**
Hayashi, Tsuruichi II, 138, 318. **644, 656.**
Heawood, P. J. II, 212, 217—219. **483, 567.**
Heegaard, P II, 171, 177, 213, 223. **668.**
Heffter, L II, 100, 213f., 218. **493, 568.**
Hegesippus II, 119.
Hellenbach, Lazar Baron v. **569.**
Hellerung, Joh. Chr. Dan II, 19, 40 **141.**
Hellwald, Friedr. v. II, 319f
Helm, Erh. **6.**
Henisch, Georg **20.**
Henrion, Denis **24.**
Henry, Charles II, 6, 231 **376.**
Henry, W R I, 395 **290.**
Hensel, K. I, 30, 90
Héraud, A. **425.**
Herklots, G. A II, 328.
Hermann, Joh. Jac I, 27
Hermary, Hippolyte Alexandre Hyacinthe I, 193, 195, 202, 204, 209, 210; II, 200, 259 **371.**
Herodot I, 34.
Herrmann, F II, 39, 41 **494.**
Herschel, A. S. II, 196. **258.**
Hertzsprung, S. I, 232f., 271; II, 331 **360, 454, 596.**
Hesiod I, 34.
Hesse, O. II, 100.
Hessel, J F. Chr II, 177.
Hessemer, F M. I, 63.
Heydebrand, Tassilo von — u. d. Lasa I, Vorwort (S. VI), 164, 335, 340, 357; II, 388, 395, 396. **191, 195, 455.**
Heylli, G d'— II, 228.
Hierholzer, C. II, 183 **308.**
Hiero, König I, 333.
Hijo, Paul de — Pseudonym des Abbé Jolivald; s. dies
Hindenburg, K. F. **112.**
Hinrichsen, F. W. II, 175.
Hippokrates I, 163.
Hofmann, Fritz I, 348. **445.**
Hohndell, G. **161.**
Holditch, Hamnet **269.**
Holzmann, Michael II, 389.
Homer I, 34.
Hooper, W. **102.**
Hoppe, E I, 399; II, 323, 376.
„ , R I, 241 **484.**
Horner, Joseph II, 43, 105 **296.**
Horstig, C G **120.**
Hoyer, P. II, 176.
Hudson, C. T I, 104, II, 332f **289.**
„ , W H. H. I, 156 **275.**
Hügel, Ad. II, 281
Hugel, Th. II, 39. **239, 335.**
Hugoulin **152.**
Hultsch, Friedr I, 31
Humboldt, A. v I, 25.
Hurwitz, A. II, 176, 366.

Hutt, Ed II, 291.
Hutton, Charles **103, 130.**
Huygens, Christian II, 170.
Hyde, Thomas II, 136, 149.

Ibn Esra s. „Abraham ben Esra".
Ignatiev, E. J. **629.**
Imbriani, Vittorio II, 317.
Inaudi II, 281.
Isnoskow, J. A. II, 413.

Jackson **145.**
Jaclot **164.**
Jacob, Simon — von Coburg II, 133. **15.**
Jacobi, C. G. J. I, 322; II, 145, 170, 384.
Jacobsthal, W. II, 281, 286.
Jaenisch, C. F. v. I, 164f., 170, 226, 241, 280, 281, 283, 286f., 290 bis 293, 297, 299, 335, 337—339, 374, 381, 389. **187, 240, 262.**
Jahn, Fritz II, 263, 328
„ , G. A. II, 284.
Jameson II, 387.
Janot I, 321. **195.**
Ja'qūbī II, 324.
Jaucourt, Chevalier de I, 182.
Jean Paul I, 163, 211, 323
Jenkins, Morgan I, 324, 349. **426.**
Joachim Friedrich, Kurfürst v. Brandenburg II, 301.
Johann Sigismund, Kurfürst v. Brandenburg II, 301f.
Johnson, Wm Woolsey I, 34; II, 230f. **361, 500.**
Jókai, Maurus II, 361.
Jolivald, Abbé I, 388; II, 276 **405.**
Jones (Reverend) I, 129
Jones, Samuel I **619.**
Jordan, Camille II, 174. **465.**
Joschkowitz, Paul I, Vorwort (S. IV), 40, 64, 241.
Josephus, Flavius II, 118—120, 122, 146, 152.

Käfer, Victor I, 342. **175.**
Kästner, A. G. **112.**
Kamp, Jens II, 130, 188, 316, 318, 334. **347.**
Kant, Immanuel II, 170.
Karl der Große I, 1; II, 375.
Karl XII. v. Schweden I, 29, 33/34.
Kasten, H. II, 176.
Katharina, Markgräfin v. Cüstrin II, 301.
Keller, Adelbert v. II, 132.
Kempe, A. B. II, 212, 214, 217. **362, 362a.**
Kempelen, Wolfgang v. I, 324f. **137, 138.**
Kenny, W. F. I, 351.
Kepler I, 129.
Kerkhoven, J. A. **687, 701.**
Kewitsch, G. I, 31, 399; II, 323.
Kieseritzky I, 238
Kiesewetter, Karl II, 376.
Kingery, H. M. **688, 702.**
Kircher, Athan. II, 325. **31, 36.**
Kirchhoff, G. II, 175.
Kirkman, T. P. I, 158; II, 73, 97 bis 103, 110, 111, 113, 114f., 177, 196, 220, 230, 235 **194, 207, 208, 209, 259, 377, 394.** Siehe a. „Schulmädchen-Problem", „Problem"
Klaber, H. **154.**
Klein, Felix I, 127, 220, II, 105, 217.
Kling, Walter II, 358.
Klügel, G. S. II, 67, 387, 388
Knobel, Heinr. II, 153
Knorr von Rosenroth, Christian **41.**
Kochanski, Adam Adam **43.**
Köhler, Reinhold II, 131f., 315. **628.**

König, Dénes II, 362. **645.**
Kokott, P. **630.**
Kopfermann, A. I, 229—231, 254; II, 344.
Koralek I, 226.
Kortholt, Chr. I, 28. **70.**
Krische, A. B. II, 171. **196.**
Kronecker, L I, 24, 30, 90.
Krumbacher, Karl II, 22.
Kürten, J. B. **446.**
Kunst, Joh. I, 400. **689.**
Kunze, K. L. A. **223, 297.**
Kutta, W. M II, 291.

Labosne, A. I, 40, 90, 102, 103, 110, 117; II, 27, 28, 56. **22.**
Lafitte, Prosper de **636, 657.**
Lagarrigue, F. **317.**
Lagny, Thomas Fantet de — II, 322.
Lagrange I, 31
Lagutinsky I, 128
Lahire, Ph. de II, 5, 7, 11, 63. **50, 60, 63.**
Laisant, C. A I, 26; II, 62, 79, 256, 264, 269, 321, 413 **537, 614, 658.**
Lalanne, Ludovic II, 327
Laloubère, Simon de II, 8, 23, 30. **49.**
Landau, Edm. I, 171f, 277, 279; II, 337 **538, 550, 579, 748.**
Lange, Max I, 165, 167f., 170, 211, 279, 287, 312, 321, 334 **229, 260, 265, 270, 563.**
Langedyk, S. L. II, 338—343.
Langer, Alois II, 177.
Laplace I, 28, 35; II, 236, 323
Lappenberg, J. M. I, 156 **3.**
Laquière, E. M. I, 242, 370, 373f, 391f. **372, 387, 395.**
Lasa s Heydebrand
Lasker, Emanuel I, 165, 168f
Latoon, F. **551.**
Lauber, G. I, 325, 342, 350. **348.**
Lavernède, J. E. Thomas de I, 370, 374, 386. **168.**
Laverty, W. H. **285.**
Lea, William II, 99.
Leake **32.**
Lebesgue, Victor **97.**
Lecat II, 322
Le Cointe, Ignaz Louis Alfred II, 331, 333. **266, 485.**
Le Cointe, P. II, 276.
Lecornu, J. II, 11, 15. **601.**
Lecot, V. **221.**
Legendre I, 32, 330; II, 177. **566.**
Legouvé, Ernest II, 298f, 313
Leibniz I, 1, 27—29, 35, 167, 182, 183f., 186, 193f, 399; II, 1, 170f., 183, 196, 321—323, 361. **55, 56, 57, 62, 69, 70, 85.**
Leischner, Carl Ferd. **170.**
Lemaire, G. II, 281.
Lemoine, Em I, 171, 276. **388, 396.**
Leonardo v Pisa I, 88, 89. **2.**
Leopold, L. II, 231. **378.**
Lequesne, E. I, 341 **246.**
Lesson I, 27.
Leurechon, Jean I, 11, 106; II, 134, 148f. **24, 25, 26, 28, 30, 314.**
Le Vallois II, 140, 143.
Levita s „Elias".
Lévy, Lucien I, 130, 139. **495.**
Lewis, J P II, 136.
Leybourn, Thomas I, 129f **126, 133.**
Leyen, Friedr. v. d — II, 303, 305, 363
L'huilier, S II, 177
Libri, G. II, 336f. **176.**
Lichtenberg, G Chr. II, 348.
Lichtwer, M. G II, 226
Ligondès, Vte du **427.**
Liharžik, Franz **276.**

Linde, Antonius van der I, 37, 38, 164, 166, 211, 285, 320—322, 325; II, 394, 397. **318, 397.**
Lionnet I, 212, 244. **181.**
Liouville, J. I, 163.
Lippich, F. II, 171, 176.
Listing, J. B. II, 171, 176, 177f., 183, 187, 217, 220, 361. **196, 256, 429.**
Littré, E. I, 26, 62; II, 317 f.
Löffler, Eugen II, 323
Longchamps, G. de **474.**
Loose, W. II, 129.
Lorenz, Joh. Friedr I, 51. **124.**
„ , L. V. II, 331. **596.**
Loubère, Simon de la — s. Laloubère.
Loyd, S. I, 395; II, 226, 230. **290, 354.**
Lucas, Ed. I, 8, 10, 15—17, 19, 22, 25, 32, 40, 52, 53, 59, 61, 62, 63, 173, 176, 177, 190, 204f., 209f., 226, 228f, 242, 247f, 259f, 272, 274, 277, 327, 362, 379, 399; II, 41, 69, 71, 79, 80, 94, 111, 116, 117, 174, 192, 200, 206, 217, 226, 231, 239, 256, 259, 262f., 267, 269, 275f, 319, 326, 351, 367, 429 **336, 339, 406, 415, 424, 440, 456, 475, 488, 496, 539, 558.**
Ludovici, C G II, 321—323
Lüroth, J I, 226; II, 176

Maack, Ferd **666a.**
Maaß, Alfred II, 363 **756.**
Mac Clintock, Emory II, 1, 36, 39 **559.**
Mac Cormack, Th J **575**[1].
Macfarlane, A I, 158f; II, 308f. **366, 398, 399, 407, 416, 417, 466, 467.**
Machado, Virgilio **620.**
Macht, Hans **659.**
Mac Mahon, P. A. I, 94; II, **67**, 174. **447, 570, 593, 610.**
Maddison, J **553.**
Maennchen, P. II, 286.
Maillet, E. II, 64 **527, 528, 540, 588.**
Mairan, J.J. d'Ortous de — I, 322, 326.
Malmsten, C. J. II, 231. **408.**
Mamlock, L. II, 175.
Mann, G. I, 370. **241.**
Mansion, P. **337.**
Mantel I, 209f., 277 **418.**
Mantia s Gianutio della —
Manuel Moschopulos s. Moschopulos.
Marchand, D. **596.**
Marco, Georg I, **169.**
Margossian, A. **682.**
Mariage, Aimé I, 34 **234.**
Marre, Aristide I, 2, 156; II, 129. **5.**
Martius, Joh Nik I, 62. **110, 169.**
Mascheroni, L II, 291
Maser, H. I, 331.
Massip, Maurice **507.**
Matuoka II, 140, 142f.
Matzka, W. II, 284
Mauthner, Fritz II, 376.
Mauvillon, F W von I, 370. **150.**
Maxwell, Clerk II, 178.
Mayor, P. **596.**
Mease, James II, 114f. 117
Méchain I, 33
Meermann resp Meerman, Gerhard II, 123, 126 **77.**
Mehmke, R. I, 30
Melanchthon, Philipp I, 125
Mercklein, F A A I, 370 **271.**
Mersenne, Mar. II, 1, 6. **27. 29.**
Mertelsmann, A. F. H II, 109. **571.**
Meulen, T G van der II, 316
Meun, Jean de II, 196.
Meyer, H I, 6f; II, 123
„ , Heinr. F L. **309.**

Meyer, J. L. I, 212.
Michinori II, 140, 145, 146.
Michny, G. **277.**
Migne, J. P. II, 375.
Mikami, Y. II, 50, 138—140, 142f.
Milbons s. Blocquel
Miller, W J. C. II, 73.
Minding, Ferd. I, 352, 356f., 386. **217.**
Mittenzwey, L. **363.**
Miyake II, 142f
Moebius, A. F. II, 214f., 217. **432.** Siehe a. „Moebius'sches Blatt".
Mohr, Johann **37.**
Moivre, Abraham de I, 322, 326, 337, 357f
Molk, Jules **572, 588, 614.**
Mollweide, Carl Brandan II, 67. **132, 142.**
Mommsen, Theodor II, 123, 125.
Monanteuil **18.**
Mondésir, de **385.**
Mone, Franz Joseph II, 126, 306, 308, 316, 336. **165.**
Monge, G. I, 152, 154, 155; II, 336. **101.** Siehe a. „Kartenmischen".
Monneron **115.**
Monteiro, Alfredo Schiappa **409.**
Montessus, R de I, 261.
Montmort, Pierre Rémond de — I, 145, 182, 184, 322, 326
Montucla, J. F de I, 61. **52, 130.**
Moon, Robert I, 349, 360—362 **182, 188, 192.**
Moore, E H. I, 399; II, 81, 99, 100, 105. **552, 580, 703.**
Moore, Thomas II, 190.
More, Paul E. I, 74
Moreau, C. I, 128; II, 79, 154, 167. **533.**
Morgan, De —, Augustus I, 158; II, 212
Morphy, Paul I, 168.
Moschopulos, Manuel II, 20, 22—24, 27, 28, 31, 33, 37—39, 42, 50. **4, 333a, 430, 449.**
Müller, Felix I, 40, 41, 43 **338.**
„ , Johann Wolfg. II, 383.
„ , Lucian II, 123—126, 135, 149f. **278.**
Müllner, Adolf I, 319, 324, 339, 340, 369, 371. **143.**
Müser, F. W. I, 145. **157.**
Muhammed ben Scherph I, 211.
Mulder, P. II, 103.
Muramatsu II, 139, 142, 145.
Mydorge, Claude I, 11, 106, 145, 167. **24, 25.**

Nakane II, 318
Nash I, 386. **486.**
Nauck I, 211—213, 225; II, 350.
Nesbitt, A. M. II, 73. **690, 704.**
Netten, H. van **24.**
Netto **151.**
„ , Eugen II, 100 **572, 602.**
Neuberg, J. I, 274.
Neumann, Paul F G. I, 43.
Newton, Is. I, 163; II, 1.
Nielsen, Yngvar I, 63.
Nikolaus Rhabda II, 22. **430.**
Nîlakanṭha I, 333 **312, 321.**
Noë, De la —, G. O. I, 226, 247.
Noether, M. II, 100
Nolten, Rud. Aug. I, 28; II, 321. **69.**
Nordberg I, 34.
Nulty, E. **162, 222.**
Nystrom, John W. I, 34

Olbers, Wilh II, 170
Olive, Raoul I, 59.
Onnen sen., H. II, 332f, 344. **691, 731, 731a.**
Ons, D'— -en-Bray, Pajot **87.**
Oppen, O. v — I, 381. **197, 203, 237.**

Oughtred, William 24, 33.
Ovid I, 25.
Ozanam, Jacques I, 14, 61, 145, 322, 326, 399, 400. 48, 52, 130.

Palamède (Pseudonym) s. Ligondès.
Palmström, A. I, 128.
Palomino, Diego II, 28f.
Parmentier, Th. I, 226, 228, 343 bis 346, 379, 383. 419, 487, 497.
Parville, Henri de II, 326. 428.
Pascal, Blaise I, 163; II, 196.
Pasquale, V. De II, 100.
Pasquier, L. G. Du II, 324.
Pauls, E. I, 248, 250, 253, 277, 286, 302. 319.
Peano, Giuseppe I, 38. 573.
Pein, A. I, 226, 228, 234, 241; II, 350. 476.
Peirce, Benjamin II, 103, 108, 114. 250.
Peirce, Ch. S. S. 683, 692.
Pelican, W. J. 65.
Penelope I, 164.
Perenyi, Baron v. I, 280 177.
Pérez 327.
Perigal, H. I, 381. 199.
Perott, J. I, 264, 266, 269. 420.
Perrin, R II, 177
Pertz, G H. I, 1, 27; II, 375, 380
Pescheck, Christian I, 145; II, 134 66.
Pessl, Heinr v. II, 40. 300.
Peter der Große II, 324
Peters, C A. F. I, 213; II, 61. 248.
Petersen, J II, 62, 213, 220, 223, 362f 498, 574, 611.
Petrus, Sanctus II, 130, 146.
Petzoldt 21.
Pfeiffer, August II, 122
„ , Hermann 693.
Philidor (= Danican, François André) I, 163, 164. 147.
Pic de Brasero 488.
Piper, Ferd. II, 284.
Pitrè, Giuseppe II, 131, 300, 307, 317, 334. 560.
Piuma, Carlo Maria 705.
Planck, C. II, 42, 352. 468, 590a, 612, 646, 706, 707, 732.
Plato I, 24.
Plinius der Ältere II, 189.
Poggendorff, J. C. II, 386, 401.
Poignard II, 7f, 63, 65. 58.
Poincaré, H. II, 177.
Poisson I, 105, 107, 109, 114f.
Polignac, Camille, Prince de — I, 370; II, 174, 213, 223. 251, 400, 581, 637.
Pólya, G. II, Vorwort (S. V), 364.
Pongracz, Arnold, Graf I, 341f. 226.
Poppe, J. H. M. v. I, 62. 169.
Portier, B. II, 40, 43. 512, 621, 638, 660, 671, 741.
Pott, A. F. I, 25, 27. 198.
Power, J. II, 105. 286.
Prager, W. II, 354f., 357f.
Pratt, Peter I, 170, 368f. 147.
Prestet, Jean 46.
Pringsheim, A. I, 29.
Prony, G. C F M. Riche de I, 32.
Propositiones ad acuendos iuvenes (Aufgaben zur Verstandesschärfung) I, 1—4, II, 316; s a I, 161 1.
Protagoras I, 24
Proth, F. 351.
Pund, Otto I, Vorwort (S VI).
Purkiss, H. J II, 328 279.
Putnam, K S. II, 284.
Pythagoräer I, 125f.; II, 187.
Pythagoras I, 333

Quehl, Carl I, 260.

R., de — I, 286, 290, 299.
Radziwill, Prinzessinnen Luise u. Wanda II, 302

Rädell, Carl I, 166. **200.**
Rallier des Ourmes, J. J **89.**
Ranneforth II, 84
Rath, E. II, 333.
Rau, B. Hanumanta I, 333.
Rebière, A. I, 33.
Redon, Paul I, 210. **529.**
Régnier, Alfred I, 352. **311.**
Regnier, Mathurin I, 259.
Reinhard, Aug. **603.**
Reinhardt, Curt II, 217.
Reinmar von Zweter II, 128.
Reiss, Michel I, 186, 190, 193, 195, 202, 204, 209; II, 100, 265, 275f **235, 235a, 298.**
Remak, Robert II, 92
Remmelin, Johann Ludwig **23, 759.**
Rémond, Nicolas de I, 28; II, 196. **70.**
Rémond de Montmort s. Montmort.
Ressing, Johann Jürgen I, 4; II, 134, 150, 153. **71, 73, 81.**
Reuleaux, Franz I, 183; II, 229 **451.**
Riccaut de la Marlinière I, 152.
Riddle, Edw **130.**
Riecke, G. A. I, 40; II, 279 **287.**
Riemann, B. II, 170f, 176. Siehe a. „Riemannsche Flächen".
Riese, Adam **6, 12.**
„ , Alexander I, 7; II, 123—125, 127.
Rilly, A. **604, 661, 675, 684.**
Riollot, J. **672.**
Risser, J. A **294.**
Rivelly, Alf **457.**
Rivière, Arnous de I, 169
Rizanesander II, 130.
Roberts, Samuel II, 174, 221, 223. **511, 613.**
Robin I, 130. **458.**
Robinson, N. H. **212.**
Rocquigny, F. [G.] de **596.**
Roget, P. M. I, 370—372, 374. **171.**
Rohlfs, Nicolaus **78.**
Rohn, K. I, 228, 241 **477, 582.**
Roland, E. II, 131.
Rolin I, 163
Rosenfeld, Hugo I, 241
Rosenthal, G E I, 62 **110.**
Rost **82.**
Roth, Peter **19.**
Rothe, H. A. **185.**
Row s. Sundara Row
Ruchonnet, Ch. P. I, 193. **235a.**
Rudolf August, Herzog von Braunschweig I, 28; II, 321—323, 325. **69.**
Rudolff, Christoph II, 120.
Rusca, Pietro **79.**
Ruska, Jul. II, 136, 324. **758.**

Saccani, F **459.**
Sachau, Ed. I, 38. **328.**
Sachs, Hans II, 131—133, 141, 147
Sadier, J I, 127,
Saint-Laurent, Thomas de I, 155f **272.**
Saint-Loup, Louis **583.**
Salomon, C. **742, 743.**
Sanjána I, 170 **605.**
Sartorius v Waltershausen, W II, 170.
Saunderson, N **74.**
Sauveur, Joseph II, 7 **63, 63a.**
Savage, D F **694, 708.**
Sayles, Harry A II, 31. **709, 710, 720, 733, 737, 744.**
Schahram (Shihrâm), König I, 37.
Schallopp, E. II, 85
Scharff, Michael II, 133 **51.**
Scheffler, H. II, 43. **410.**
Scheidius, T. **201a.**
Schicht, F. J. **658.**
Schiller, Friedr v. I, 323; II, 226

Schilling, C. II, 170.
Schinnern, Cl. Rud. v. I, 369, 380. **148.**
Schlegel, V. I, 92f. **508, 509, 513.**
Schmidt, Andreas Gottfried II, 389.
„ , Eugen v. **280.**
Schmolck, Ad. Wilh. **131.**
Scholle, A. II, 342, 343, 352, 353, 355, 357—360.
Schopenhauer, Arthur I, 166; II, 329.
Schott, Caspar II, 378 **34, 35, 42.**
Schoute, P. H. I, 53, 55, 228; II, 84, 231, 242, 245, 247, 249, 250, 257, 260, 326. **422, 435, 488.**
Schroeter, Timon II, 260.
• Schubert, H. I, Vorwort (S. V), 117, 119, 121—123, 212, 384; II, 94, 109, 145, 154, 156, 159, 165—167, 177, 227, 231, 241, 248, 279, 289 **379, 380, 501, 541, 542, 548, 575, 575¹.**
Schulenburg, Joh. Chr I, 27 **55.**
Schultze, Chr. Rud s. „Rudolff“.
Schumacher, H. C I, 213, 285, 334f., 337; II, 61f, 65, 389 **248.**
Schurig, R II, 84f, 92 **436, 448, 530.**
Schwab, M **510.**
Schwenter, Daniel I, 101f, II, 120f, 134, 148—150, 325f **26.**
Schwidtal, Albrecht I, 94. **489.**
Scott, Walter **138a.**
Seki, Takakazu II, 137—140, 145 **656.**
Selenus, Gustavus s August v. Braunschweig
Sharp, W J C II, 73, 174.
Shuldham, Charles D **749, 750, 751.**
Shurreef, Jaffur II, 328
Sidoratsky **684.**
Siedenburg, W II, 135
Sikkes, R. H. F. **673, 695.**
Silberschmidt, Hirsch I, 375.
Simon, H. **490.**
„ , Max II, 323.
Simony, Oskar I, 38.
Simrock, Karl II, 316, 334. **210.**
Sissa ben Dahir I, 37.
Slyvons, Pseudonym von Solvyns, s. dies.
Smith, D. E II, 138—140, 142f. **514.**
Smyly, Gilbert **543.**
Smyth, B. S (oder B. B.) **520.**
Solvyns, Edm I, 226, 323f., **342. 230.**
Somadeva II, 303.
Sommervogel, C. II, 377.
Sós, Ernst I, 127; II, 177.
Spät, Konrad s. Gerle.
Spencer, Herbert I, 32; II, 323.
Spinula, Franz **14.**
Spottiswoode, W. II, 102, 114. **218.**
Sprague, Thomas Bond I, 229f. **479, 577.**
Stäckel, P II, 145, 170, 217, 224f., 361. **561.**
Stchoulepnikoff, Gerge de **281.**
Steding, Joh Nic. **83.**
Steen, Ad. II, 331. **596.**
Stein, Elias **174.**
„ , Joh. Pet Wilh **149.**
„ , L und H. II, 323
Steinen, Karl von den — II, 320.
Steiner, Jakob II, 99, 177 Siehe a. „Problem“.
Steinert. O **531.**
Steinitz, Wilh. I, 168f.
Steinschneider, Moritz II, 121, 122, 129, 147
Stenzler, Adolf Friedrich I, 333. **321.**
Stevin, Simon I, 32.
Stifel, Michael I, 125; II, 18. **10, 359, 536, 695.** Siehe a „Quadrate, Stifelsche“

Story, W. E. II, 212, 230f. **361, 362a.**
Strabbe, A. B **63a.**
Study, E. II, 175
Sudhoff, K II, 227.
Sue, Eugène II, 298f., 313.
„ , Flore II, 298f.
Sundara Row, T II, 291, 296. **514.**
Suremain de Missery, A. II, 337 **180.**
Sutor, Andreas II, 148.
Svanberg I, 381
Svanström, O. II, 254.
Swedenborg, Emanuel I, 34.
Sylvester, J. J. II, 97, 102, 103, 104, 108, 110—113, 174, 221, 226 **252, 329, 381, 515.**
Szily, Kolomann v. I, 286, 292f, 297, 299—302, 305f., 310, 313; II, 353. **606, 607, 622.**
Ṣalāḥaddīn aṣ-Ṣafadī II, 136.

Tait, P G. I, 14, 15, 19; II, 145, 167f, 196, 212, 215f., 220, 230, 234, 248, 319 **367, 368, 369a, 382, 429, 564.** Siehe a „Taitscher Satz“ u. „Tait's, ein Problem“ —.
Tanner, Lloyd II, 336. **383.**
Tannery, Paul I, 26, 27; II, 6, 22, 50, 320. **4, 430, 449.**
Tarrasch, Siegbert I, 165; II, 345
Tarry, G. II, 40, 42, 59, 62, 67, 195, 268f, 272, 275f. **450, 544, 545, 546, 584, 594, 594a, 595, 631, 632, 639, 650, 662, 674.**
Tarry, H. I, 229, 248, 277, 355 **301, 340, 491, 562.**
Tartaglia, Niccolò I, 2, 4, 7, 89, 93, 106, 124; II, 333 **13.**
Taylor, H. M. I, 170; II, 74, 79, 337. **341, 616, 625.**
Tebay, S II, 174. **401.**
Temple II, 213.
Terquem, Olry I, 226; II, 265, 269.
Teuffel, W. S. II, 119
Teutsch, G. D II, 315f.
Teysonneau, E. **640.**
Thomae, J. II, 231, 242, 247.
Thompson, W. H II, 59. **293.**
Tietze, Heinr II, 217, 219, 224f **647, 711.**
Tissandier, Gaston II, 228. **384, 402.**
Tomlinson, Ch. I, 170. **189.**
Trémaux II, 192.
Trigaut, Nic. II, 226.
Triparty, Appendix zum — (Nic. Chuquet) I, 2, 4, 105, 156; II, 129, 333 **5.**
Tropfke, J I, 30; II, 321.
Troupenas, E. I, 370 **88a, 178.**
Truchet, Sebastien I, 130. **59.**
Tucher, Sebald II, 129
Turton II, 352.
Twiss, R. I, 321, 351 **111.**
Tychsen, Camillo I, 354 **282.**
Tye, Rudolf **760.**
Tylkowski, Adalbert I, 145; II, 130, 148, 150f. **47.**

Ulbricht C. **179, 224.**
Ullrich, Edward I, 30, 34 **119, 499.**
Unger, Ephraim Salomon I, 150 **166.**
Uri, Joh. II, 129

Vacca, G. I, 29
Vaget, Augustin **53, 54.**
Vallois, Le — s Le Vallois.
Vallot II, 337 **146, 180.**
Vandermonde, Alexandre Théophile I, 190, 287, 326, 348, 353, 356, 365, 367f, 371, 384, 388; II, 170, 183. **99.**
Vanderweyde, P. H. **330.**
Varnhagen von Ense I, 182—184.
Vassano, Pico Luii di — II, 317
Veblen, Oswald II, 213 **676. 734.**

Vellnagel, Christoph Friedr. **75.**
Veneziano, Antonio II, 131.
Vespasian II, 118
Vieth, G U. A. I, 156. **112, 117.**
Vietor, Alwin II, 250.
Vinot, J. **516.**
Violle, B. **163.**
Vivanti, G. I, 127; II, 336.
Vogt, H. **572.**
Voigt, C. A. Otto I, 169.
Volpicelli, Paolo I, 322, 352—354, 386; II, 395 **211, 302, 303, 311a.**
Voltaire I, 34, 358.
Voß, Joh. Heinr. I, 164.
Vries, J. de II, 100.

Waitz, C. **247.**
Walecki II, 69, 80, 82, 83, 88, 111, 116f.
Walker, G. **172, 173.**
Wallis, John I, 61; II, 1, 327f.
Warnsdorf, H. C. von I, 333—340, 357, 369, 374 **143, 238.**
Wattenbach, W. II, 315.
Weber, A I, 333 **312.**
„ , C. F II, 119
„ , H. I, 24; II, 170.
Webster, H W. **626.**
Weierstrass II, 99
Weigel, Erh **40.**
Weinbrenner, L. **460.**
Weiske, Ad II, 214. **432.**
Weiß, Max II, 303.
Wekerle, L (Pseudonym?) I, 166 **364.**
Welsch II, 154 **721.**
Wenzel, G. T **95.**
Wenzelides, Karl I, 338, 341, 379, 381. **204, 213.**
Werneburg, Joh. Fr. Chr I, 30. **119.**
Wernicke, P. II, 56, 63, 65, 212, 213. **565, 641, 712.**
Wertheim, G. I, Vorwort (S. IV).
Wessel I, 348.
Weule, Karl II, **329.**
White, Alain C. II, **226.**
Whitworth, W. A. II, 73, 334 **591.**
Wiedeburg, Johann Bernhard I, 29.
Wiedemann, Eilh. **755a.**
Wiegleb, Joh. Chr. I, 62f., 156. **109, 110.**
Wiener, Chr II, 191f. **313.**
Wiessner, J. **242.**
Wihnyk I, 381 **437.**
Wildt, Joh Chr. Dan I, 350 **121.**
Wilhelm III. v Großbritannien II, 190.
Will, Georg Andreas II, 325.
Willis, John **623, 696.**
„ , Robert **137, 138.**
Wilson, J. Cook II, 183, 213. **648, 663.**
Witgeest, S I, 102, 145; II, 134. **67.**
Wizel, Adam I, 34.
Wolf, Rudolf I, 388 **532.**
Wolff, Friedr. **138a.**
„ , Jens II, 130
Woodall II, 99.
Woolhouse, W S B II, 97, 102, 108, 109, 114 **253, 261, 267, 288.**
Worms II, 336
Worthington, John **713.**
Wynant van Westen I, 11 **24, 28.**
Wythoff, W A. I, 84—88. **664.**

Yoschida II, 139, 144, 145

Zaake, C G **90.**
Zach, Franz v I, 323; II, 284f
Zedler, Joh Heinr II, 328
Zeller, Chr II, 283
Zernike, F. **714.**
Zeuthen, H. G II, 320
Zuckermandel, Christoph Wilh I, 369/370 **167.**
Zulauf, K II, 100

Sachregister.

Abracadabra-Dreieck II, 335/336.
Achterspiel I, 212.
Achtersystem I, 33, 34, 35.
Achtköniginnenproblem I, 211 bis 258; II, 344, 348—351; s a. I, 271, 286, 303; II, 66; s. a. „Sechzehnköniginnenproblem".
— in 3 Dimens. I, 238/239; s a. I, 400.
—, unbedingte Existenz von Lös. für $n > 3$ I, 248f.
—, Anzahl der Lösungen I, 225f., 228—230, 271 (Tab.).
—, doppelt-periodische Lös. II, 364ff.; s. a. I, 247/248.
—, doppelt-symmetr. Lös., Def I. 223f.
—, doppelt-symmetr. Lös., Bestimmung I, 250ff.
—, doppelt-symmetr Los., Existenz II, 370ff.
Ägypten, Ägypter I, 164; II, 136, 146.
Ahnenzahl I, 37.
Albanien II, 321.
Algebra, Verschiedenes aus der — II, 98, 99/100, 200, 331
Altdorf II, 120, 325.
Amerika I, 32, 72, 182; II, 226f.; s. a. I, 235.
Amulette, Talismane II, 3, 187; s a. II, 1.
Analysis situs II, 170f, 183f, 361; s. a. II, 1
Anzug beim Schachspiel, das darin liegende Übergewicht I, 164f.; vgl. a. II, 82.
Araber, Arabisch II, 3, 125, 136, 146/147, 149
Außenwinkel eines Polygons, Summe I, 126
Azteken I, 25.

Babylonier I, 27, 30f., 399; II, 323.
„Bäume" II, 174—176
Baguenaudier I, 61—72; II, 326ff.; s. a. I, 52, 184.
Bakaïrí II, 319
Basel II, 124.
Beduh II, 336
Belgien I, 26.
Bengalen I, 25
Bern II, 126
Bild s. „Erraten"
Bodleiana (Oxford) II, 129, 423
Boss Puzzle II, 226ff, 363
Brasilien II, 319f
Brettablauf für die versch. Schachfiguren I, 392ff
Brettspiele (Schach, Mühle, Schaf u. Wolf) I, 163—181.
„Brücken" eines Liniensystems II, 173, 180
Brückenproblem, das Eulersche — II, 183ff.
Buchstaben (Vokale u. Konson.), Anordnungsproblem II, 73.
Bußzahlen I, 31/32

Cambridge II, 97, 423.
Cauersche Anstalt Berlin II, 328.
Ceylon II, 136, 146.
Chamäleon (Spiel) II, 239.
Chemie, Aus der — II, 174 f.
China, Chinesen I, 27, 35, 72 f ; II, 3, 328 f.
„chromatische Zahl“ II, 211, 213, 215, 224 f.
Combino I, 241.
„cyklomatische Ordnungszahl“ II, 176

Dänemark I, 26; II, 130, 134, 188, 316, 319, 320.
Dame (Schach) I, 213; s. a. „Königin“.
Damebrett, 100-feldriges I, 177.
Damespiel I, 163, 167.
Determinanten I, 232, 245 f., 387; s a. I, 172.
dezimales metrisches System I, 31, 32.
Dezimalsystem I, 25, 28, 29, 32, 35; II, 319/320, 321, 323/324.
Diagonalen, gebrochene II, 19, 36, 41/42
„Diophantische“ Gleichungen I, 127: II, 179.
Dodekaeder II, 179, 189, 196 ff, 221
Dodekaederspiel Hamiltons II, 180, 196—208, 222; s. a. I, 126
Dominosa und Sperr-Domino II, 263
Dominospiel, Dominosteine II, 79/80, 180, 261—276
Dreiteilung des Winkels II, 291
Drudenfuß II, 187
Duodezimalsystem s. „Zwölfersystem“.
dyadisches Zahlensystem, Dyadik I, 27/28, 29, 35 ff.; II, 321—323, s. a 319.

Ehepaare, die 3 — I, 4—11; II, 315/316.
Ehepaare, Problem der — (Anordnung) II, 73 ff.
Einer und n-er, Methode der — — — (mag. Quadr.) II, 7 ff., 19, 43, 67.
Einsiedeln (Schweiz) II, 122, 126.
Einsiedlerspiel I, 182 ff ; II, 337 f.
Elfersystem I, 27, 31.
Ellipse II, 296 f.
elliptische Funktionen II, 105.
England, Engländer, Englisch I, 32; II, 131, 320, 361.
Erfurt II, 316.
Erraten einer Zahl, eines Bildes, einer Karte od. eines Kartenpaars I, 38—48, 98 ff., 148 ff., 152 ff.; s. a. II, 265.
Eulersche Quadrate s. u „Quadrate“.

Fächer, geheimnisvoller I, 40
Fakire II, 329.
Falten von Papier, geom. Konstrukt durch — — — II, 291—297.
Fan-Tan I, 73.
Farben-Karten-Problem II, 211 ff., 361/362.
Februar, 5 Sonntage im — ? II, 284 f
Fechterturniere II, 81.
Feldernotation s u „Schachbrett“.
Finger, Benutzung als Rechenmaschine I, 24 f
Frankreich, Franzosen, Französisch I, 177, 205; II, 131, 317 f, 337
französische vigesimale Zahlwörter I, 26; II, 320
Friesen II, 316
Fünfersystem I, 25; II, 319; s a. I, 28
Fünfköniginnenproblem I, 286 ff.: s a II, 352—354.
—, dreifache Symm v Lösungen (für $n = 6$) I, 291
Fünfzehnerspiel II, 226 ff, 363

Gebrauchsmuster s. „Patente“.
Geographie, physische II, 177/178.
Gewichtsproblem I, 88 ff.; II, 329 bis 331.
Gitterschrift I, 48 ff; II, 325 f.
Göttingen II, 361.
„Graphs“ II, 171, 220 f
Grillenspiel I, 184, s. a. 63; II, 1.
Großvater, jemand sein eigener —? I, 158; II, 305 f.
Gruppentheorie (Substitutionentheorie), Verschiedenes aus der — I, 127, 143, 155, 220, 224; II, 63 f., 101, 105, 176, 199/200, 230.

halbmagische Quadrate s. „Quadr., semimag.“
Hamburg II, 227, 376, 389; s. a II, 344.
Hanoï s. „Turm“.
Haufenproblem (Gergonne) I, 98 bis 104; II, 331—333; s. a I, 156.
Hemeroskop II, 279.
Herren, 3 — u 3 Sklaven I, 11—13.
Hexaeder (Würfel) II, 179, 189, 208 bis 210, 221.

Ikosaeder II, 179, 189, 208, 221 f.
Ikosaedergruppe II, 200.
Ikosaederkalkül II, 196 f, 199 f
Ikosaederspiel Hamiltons II, 197, 200.
Inder, Indien I, 37, 320, 333; II, 187, 291, 303, 328, 363
—, Methode der — (mag Quadr.) II, 20, 23, 38 f.
Irländer II, 361
Irrgartenspiele II, 190
Italienisch II, 317 f

Japan, Japaner I, 32; II, 50, 137 bis 146, 169, 318.
Josephsspiel, Josephus-Legende II, 118—120, 122, 125 f, 134, 146, 152.
Juden II, 122, 125, 147.
„Judenersäufespiel“ II, 130, 146.
Jülich-Kleve, Erbfolge II, 301.

Kalender II, 277 ff.
—, immerwährender II, 278 ff., 363
—, Julianischer II, 277 f., 283.
Kalenderreform (Vorschläge) II, 279, 290.
—, Gregorianische II, 278, 286/287.
Kandy II, 137.
Kapuzinerspiel I, 184.
Karten s. „Erraten“.
Karten eines Kartenspiels II, 56
Kartenkunststücke I, 98—104, 148 bis 156.
Kartenmischen nach Gergonne I, 98—104; II, 331—333; s. a. I, 156
— nach Monge I, 152 ff.; II, 336
Kinderreigen II, 69 ff.
„Kneiphof“, Insel II, 183.
Knotenpunkte II, 171 f
König, Brettablauf I, 394
—, Gangart I, 274
—, Maximalproblem I, 261
—, Minimalproblem I, 312.
—, Mindestzugzahl fur vorgeschrieb. Sprung I, 284
—, Zugzahl I, 274, 278
Könige, 2 und 3 — auf dem Schachbrett I, 277
Königin, Brettablauf I, 394 f
—, Gangart I, 213/214
—, — in 3 Dimens. I, 238.
—, Maximalproblem s „Achtköniginnenproblem“; s. a II, 351 f.
—, Minimalproblem s. „Fünfköniginnenproblem“.
—, Mindestzugzahl f vorgeschrieb Sprung I, 284.
—, Zugzahl I, 276, 278; vgl. a. II, 351/352
Königinnen, 2 — auf dem Schachbrett I, 276/277.

Königinnen, 3 — auf dem Schachbrett I, 277
—, 4 — auf dem Schachbrett I, 293, 310.
Königsberg i. Pr. II, 183 f., 429.
Kohlkopf s. „Wolf“.
Konstante, „magische“ II, 4, 6, 8, 18 f.; s. a. I, 260.
Kreiswulst II, 42
Kreuzspiel I, 184.
„Kreuzzug“ II, 39
Kuas I, 28.

Labyrinthe II, 189—195.
Läufer, Brettablauf I, 395—398
—, Gangart I, 213/214, 243—245 (analyt. Formulierung); s. a. II, 39.
—, Gangart in 3 Dimens. I, 238.
—, Maximalzahl ohne Angriff I, 260, 271 f.
—, Problem der 8 resp. *n* — I, 261, 264—270, 271 (Tab.); s. a I, 245 ff.
—, Minimalproblem I, 311.
—, Mindestzugzahl für vorgeschrieb. Sprung I, 284.
—, Zugzahl I, 275 f, 278
lateinische Quadrate s u „Quadrate“.
latrunculorum ludus I, 164
Leiden II, 124, 126
Leipzig II, 328
Lineal bei geometr Konstruktionen II, 291.
„Linearkomplexion“ II, 171
„Linienkontinuum“ II, 171.
Liniensysteme II, 171 ff., 220—223
London II, 190, 344, 423
ludus latrunculorum I, 164

magische Konstante s „Konstante“
— Quadrate s. „Quadrate“
— Rösselsprünge s u. „Rösselsprünge“

Malayen II, 363.
mathematisches Mischen (Karten) I, 152.
Mecklenburg II, 135.
Meerane i. S. II, 300.
„Melencolia“ Dürers II, 2.
Menschengedanken, Satz vom gleichartigen — II, 146.
Merksprüche, Merkverse I, 6, 7, 148, 150; II, 147—152, 315 f., 335, 361.
Mischen s. „Kartenmischen“ und „mathem. Mischen“.
Moebius’sches Blatt II, 217.
Mühlespiel I, 163.
—, einfachste Form I, 172—176.
München II, 122, 127, 148, 150 f., 315.
Mutus dedit nomen cocis I, 148 bis 152; II, 335.

Nachbargebiete II, 213 ff., 224 (im Raume).
Nachbarpunkte II, 214, 218.
Neffe s. „Onkel“
Neu-Holland I, 28.
Neu-Seeland I, 27.
Nicäa, Konzil von — II, 285.
Nim I, 72—88, 399 f.
Nonnenspiel I, 182 ff; II, 337 f
Norwegen I, 63; vgl dazu II, 328: s. a I, 26.
Notation der Schachbrettfelder s. „Schachbrett“
Nürnberg II, 85, 328.
Nürnberger Tand I, 63, II, 1, 328.
Numerationssysteme I, 24 ff, II, 319 ff

„Oberreihen“ II, 156 ff.
Offiziere, 36, Problem der — — II, 55 ff.
Oktaeder II, 179, 189, 210, 222
Oktaedergruppe I, 220.
Oktavalsystem s „Achtersystem“.

Onkel und Neffe I, 156 ff.; II, 305 f., 336.
Orakelspiel II, 197.
Osterdatum, Berechnung II, 285 ff.
Osterreform II, 290.
Ostertermine, früheste u. späteste II, 288—290.

Palästina I, 24.
Paris I, 26, 33; II, 185, 190, 228, 314, 387.
Parkettierungen I, 125—144; II, 334; s. a. II, 63.
Patente, Gebrauchsmuster I, 40, 43, 183/184, 212, 235 f., 241, 260, 324; II, 153, 190, 254, 260
Pentagramm, Pentalpha II, 187
πεττεία I, 164.
Planetenquadrate resp. -zahlen II, 1.
Plombières II, 298.
Polen I, 177
Polyeder II, 176—179
—, reguläre II, 178/179, 189, s. a. 208—210.
Polyedersatz, Eulerscher II, 62, 177—179.
Polygone, reguläre I, 125 ff.; s a. II, 294—296.
Portugiesen II, 136 f.
Pregelbrücken II, 183 f.
Preis, akadem. I, 323.
Preisausschreiben II, 97.
„Problème de Caligula“ II, 131, 146.
„Problem Kirkmans“ II, 98; s a „Schulmädchen-Problem“.
—, Steinersches II, 99.
Promenaden der Pensionatsmädchen usw. II, 79—81, 94—96, 97 ff.

Quadrate, bimagische II, 41.
—, diabolische II, 41
—, doppelt-magische II, 18.
—, Eulersche II, 55, 64—68
Quadrate, Eulersche, diagonale II, 64—68.
—, —, pandiagonale II, 66—68; s. a. I, 236.
—, geränderte magische II, 18
—, gleichzeilige (magische) II, 40.
—, halbmagische s. Quadrate, semimagische.
—, kabbalistische II, 41.
—, lateinische II, 63 f., 66, 68, 264; s. a. I, 235.
—, magische II, 1—54, 59, 63 f, 67 f., 228, 249 f; s. a I, 260: II, 347 f
—, pandiagonale magische II, 39 ff, 67 f.
—, panmagische II, 40.
—, satanische II, 41
—, semidiabolische II, 41.
—, semimagische II, 40; s. a I, 379
—, Stifelsche II, 17/18, 54
—, vollkommene (magische) II, 40.
—, vollständige (magische) II, 40
—, zylindrische (magische) II, 41.
„Quadrillen“ (Domino) II, 263
Quaternionen II, 197
Quinarsystem s „Fünfersystem“

Raumschach I, 238; II, 344—348
Rechenkünstler II, 281, 286.
Rechenmaschine s. „Finger“.
Reichstag II, 227.
Reigen s. „Kinderreigen“
Reims II, 316.
Riemannsche Flächen II, 176.
Ringfläche II, 216 ff.
Ringspiel, magisches I, 63.
Römer II, 134, 277, 334
Rösselsprung I, 319 ff.; II, 360; s a. I, 166, 262/263; II, 183, 347 f
— von 2 Springern I, 333.
—, Anzahlbestimmungen I, 386 ff.; II, 360.

Rösselsprünge, geschlossene I, 326, 348f.; s. a. I, 381.
—, offene I, 326 (Def).
—, kubische I, 384—386.
—, magische I, 379—384.
—, spiralförmige I, 374.
—, symmetrische I, 331—333, 391f.; s. a. I, 381.
—, zweiteilige I, 328, 332, 368, 374, 391f. (Anzahlbestimmung); s. a. I, 381/382.
Rußland I, 32; II, 324

Säkulargleichung (Gl. der säkul. Störung.) I, 172.
Salomos Siegel od. Schlüssel II, 187.
Salta-Solo II, 260.
„Sankt Päders Lek" II, 130, 146.
Sator-Arepo-Formel II, 335.
Saturnring II, 219.
Schach, räumliches I, 238; II, 344 bis 348; s. a. I, 384
Schachautomat I, 324f.
Schachbrett I, 172 usw., II, 186, 216.
Schachbrett, Feldernotation I, 172, 184/185, 220/221, 287/288, 356, II, 349; s. a. I, 190, 326/327, 348/349 usw.
— s. a. „Weizenkörner"
Schachfiguren, Gangart s. „König", „Königin" usw.
—, Formeln f. d. Gangart I, 166; II, 336, s. a. 281 (Anm.)
—, Wert der verschiedenen — I, 170/171
—, Max. von Zügen aller — I, 279; s. übrigens „König", „Königin" usw.
Schachspiel, Ausgang bei absolut korrektem Spiel? I, 164f.
—, Mannigfaltigkeit der Positionen I, 166, 168, 169.
—, Reformvorschläge I, 169/170
Schachtheorie u. Mathem. I, 166ff.; II, 336f.
Schachturniere, Paarung der Teilnehmer II, 81ff.; vgl. a. „Turniere".
Schaf und Wolf I, 177—181
Schaltjahre u. -tage II, 277ff., 284.
Schatz, der — zu Medinet I, 212.
Schulmädchen-Problem Kirkmans II, 97—117.
Schweden II, 130; s. a. I, 26
Sechsersystem I, 27, 30f.
Sechzehnersystem I, 34/35; s. a. 27
Sechzehnköniginnenproblem I, 227; II, 338—344.
Senegalneger II, 319
Septante I, 26; vgl. a. II, 321.
Sexagesimalsystem I, 27, 29—31, 399; II, 323
Shilling s. „Sovereign"
Siebenbürgen II, 316
Siegesallee von Berlin I, 40
Sizilien II, 300, 317
Sklaven s. „Herren"
Soldaten, Übergang über e. Fluß I, 3
Solitärspiel I, 192ff.; II, 337f.; s. a. I, 63
— nter Ordn. I, 202 (Anm.)
Sonnenjahr, tropisches II, 277
Sovereign und Schilling I, 14f.
Sparren. Sparrenkoppel II, 19
Sperr-Domino s. „Dominosa"
Spielschrein Kaiser Friedrichs I, 183; II, 229
Springer, Brettablauf s. „Rösselsprung"
—, Gangart I, 325f., 273f., s. a. I, 262; II, 25, 353.
—, Gangart in 3 Dimens. I, 384.
—, Gleichung I, 355/356; s. a. 166.
—, Farbenwechsel I, 326, s. a. 262 bis 264, 283f., 348; II, 356.

Springer, Maximalproblem I, 261 bis 264.
—, Minimalproblem I, 311f.; II, 354—360.
—, Mindestzugzahl für vorgeschr. Sprung I, 281—284.
—, Zugzahl I, 273f, 278/279.
„Springerzug" II, 33—38.
Stedingerland II, 135.
Steganographie I, 48; II, 325.
Steige, Stiege II, 320
Stiefkinder-Problem II, 138—144, 146, 169.
Stuhl, der Heilige — II, 290.
Substitutionentheorie s. „Gruppentheorie".
Symmetrie, einfache, doppelte, dreifache I, 221—224.
Syrien I, 24.

Tagsucher II, 279.
Taitscher Satz II, 220—223, 362f.
Tait's, ein Problem — s. „Überspringungsaufgaben"
Talismane s. „Amulette".
Tand s. „Nürnberger Tand"
Taquin, jeu du — II, 227f
Teilung von Flüssigkeiten s „Umfüllungsaufgaben".
Terrassenmethode (mag. Quadr) II, 27f.
Tetraeder II, 179, 189, 203, 221f.
Tripel II, 98.
Tripelsysteme I, 78, 151; II, 99 bis 101, 105, 106
Tripelzüge (Solitärspiel) I, 204f.
Türken u. Christen II, 131ff
Turm, Brettablauf I, 392—394; II, 258.
—, Gangart I, 213; s. a. 281 (Anm.).
—, Maximal- u. Minimalproblem I, 259, 271 (Tab.), 311; s. a. 232, 241f., 242/243, 302.
Turm, Mindestzugzahl für vorgeschr. Sprung I, 284.
—, Zugzahl I, 275, 278.
Turm-König-Problem I, 232f.; s. a. 271.
Turm von Hanoi I, 52—61; II, 326.
Turniere, relative Bewertung der Leistungen und Preisverteilung I, 171f ; II, 337.

Überfahrten, erschwerte I, 1ff.
Überspringungsaufgaben I, 14—25; II, 318f.
Umfüllungsaufgaben I, 105—124; II, 333f.

Verwandtschaften, seltsame I, 156 bis 162; II, 298ff., 363.
Verwandtschaftskalkül I, 158/159; II, 308—310
Vierersystem I, 27, 33, 35; II, 324
Vierfarbensatz II, 211ff.
Vierschach I, 350.
Vierundsechzigersystem I, 34; s a. 29.
Vigesimalsystem I, 25f, 28; II, 320, 321.
Voiau (Steierm.) II, 315

Weizenkörner auf dem Schachbrett I, 37; II, 324; vgl. a I, 54, 68.
Welt, Erschaffung aus Nichts I, 28, 35; II, 323
Wettzählen, Wettspringen I, 145 bis 147; II, 334f.
Whistturnier II, 81.
Wiesbaden II, 376.
Winkelmaße s. „Zentesimalteilung".
Wolf, Schaf u — I, 177—181
Wolf, Ziege, Kohlkopf I, 1f; II, 315—318, 333
Wolfenbüttel II, 325.
Würfel s. „Hexaeder".

Zahl s. „Erraten“.
„Zahl und Farbe“ II, 65.
Zahlensysteme I, 25 ff.; II, 319 ff.
Zankeisen I, 63; II, 326, 328.
Zauberkette I, 63.
Zechgesellen, List der zwölf — II, 133 f., 146, 152.
Zeitmaße s. „Zentesimalteilung“.
Zentesimalteilung der Winkel- und Zeitmaße I, 32 f.
Zerlegungen einer Zahl, perfekte u. subperfekte I, 94 ff.
Ziege s. „Wolf“.
Zirkel, Geometrie des —s II, 291.
Züllchower Anstalten II, Vorwort (S. VIII), 65, 263; s. a. II, 328.
Zwanzigersystem s. „Vigesimalsystem“.
Zwölfersystem I, 27, 30 f., 35, s. a. 32; II, 324.

Berichtigungen.

Seite 97, Z. 10/9 v. u. lies: „Studiengefährten“ statt „Studenten“

Seite 126, letzte Silbe der Seite lies: „par-“ statt „par“.

Seite 147, Anm. 2, ist das Komma am Schluß der ersten Zeile zu streichen.